Rivista Mat. Univ. Parma 4, 319-326 (1953)

GAETANO VILLARI (*)

Un teorema di esistenza e di unicità per una classe di soluzioni dell'equazione $z''(t) + A(t)f(z) = 0$.

1. – Recentemente M. CIMINO (¹) ha considerato l'equazione

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dx}(x^2 y') + x^\lambda f(y) = 0\,, \qquad \lambda > 0 \text{ reale},$$

che interviene nello studio dell'equilibrio di un fluido con distribuzione sferica della densità e soggetto alle forze di mutua attrazione delle sue particelle. La (A) può pensarsi come una generalizzazione della equazione di EMDEN dell'equilibrio dei gas politropici (²)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + y^n = 0\,,$$

o di quella più generale studiata da R. FOWLER e da G. SANSONE (³)

$$\frac{d}{dx}(x^2 y') + x^\lambda y^n = 0\,, \qquad \lambda > 0 \text{ reale}.$$

Sotto l'ipotesi che la funzione $f(y)$ sia finita e continua per ogni valore positivo del suo argomento, ivi positiva e non decrescente e dotata di derivata

(*) Indirizzo: Istituto Matematico U. DINI, via Alfani 81, Firenze (Italia).

(¹) M. CIMINO, *Sulle soluzioni dell'equazione generale del potenziale newtoniano li una sfera fluida in equilibrio*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 8, 164-172 (1953).

(²) R. EMDEN, *Gaskugeln*, p. 40, Leipzig 1907.

(³) a) R. H. FOWLER, *Further studies of Emden's and similar differential equations*, Quart. J. Math., Oxford Ser., 2, 259-288 (1931).

b) G. SANSONE, *Sulle soluzioni di Emden dell'equazione di Fowler*, Univ. Roma, Ist. Naz. Alta Mat., Rend. Mat. e Appl. (5) 1, 163-176 (1940).

prima limitata, M. CIMINO ha dimostrato l'esistenza e l'unicità delle soluzioni dell'equazione (A), definite in un intorno destro dell'origine, soddisfacenti alla condizione

$$\text{(B)} \qquad \lim_{x \to 0+} y(x) = C , \qquad 0 < C < \infty .$$

In questa Nota considereremo l'equazione

$$\text{(1)} \qquad z''(t) + A(t)f(z) = 0 ,$$

con $0 < A(t) \leqslant L/t^{\lambda+2}$ per $t \geqslant t_0 > 0$, L, λ quantità reali positive, e facendo uso con opportuni adattamenti di un procedimento esistenziale dovuto a L. TONELLI ([4]), proveremo che la continuità della funzione $f(z)$ è sufficiente a garantire l'esistenza di soluzioni della (1), definite per valori sufficientemente grandi della variabile indipendente, e verificanti la relazione

$$\text{(2)} \qquad \lim_{t \to \infty} z(t) = C , \qquad 0 < C < \infty .$$

Facendo poi intervenire l'ipotesi della lipschitzianità della funzione $f(z)$ si dimostrerà anche l'unicità di tali soluzioni.

Con ciò, potendosi ricondurre l'equazione (A) al tipo (1) con la trasformazione $x = 1/t$, risulta anche provata, sotto l'ipotesi della sola continuità di $f(y)$, l'esistenza di soluzioni della (A) che verificano la (B), e viene in particolare ritrovato il risultato relativo alla loro unicità.

2. – Si consideri l'equazione

$$\text{(1)} \qquad z''(t) + A(t)f(z) = 0 ,$$

ove $0 < A(t) \leqslant L/t^{\lambda+2}$ per $t \geqslant t_0 > 0$ (L, λ quantità reali positive) ed $f(z)$ è continua per ogni valore positivo del suo argomento.

Supponiamo che esista una soluzione $z(t)$ della (1) che soddisfi alla condizione

$$\text{(2)} \qquad \lim_{t \to \infty} z(t) = C , \qquad 0 < C < \infty .$$

Se $f(C) \neq 0$, può determinarsi un intorno di C in cui $f(z)$ non si annulla; ciò porta per la (1) che da un certo valore di t in poi $z'(t)$ è monotona, e poichè vale la (2), dovrà essere $\lim_{t \to \infty} z'(t) = 0$.

([4]) a) L. TONELLI, *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra*, Bull. Calcutta Math. Soc., **20**, 31-48 (1928).

b) Cfr. anche G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte 1ª, p. 45, Bologna 1948.

In particolare, per t sufficientemente grande, se $f(C) > 0$, $z(t)$ risulta positiva crescente, $z'(t)$ positiva decrescente; se $f(C) < 0$ sarà $z(t)$ positiva decrescente, $z'(t)$ negativa crescente.

Ponendo $z(t) = z_1(t)$, $z'(t) = z_2(t)$, si ha, per $t < \alpha$,

$$z_1(t) = z_1(\alpha) - \int_t^\alpha z_2(u)\,du\,, \qquad z_2(t) = z_2(\alpha) + \int_t^\alpha A(u) f[z_1(u)]\,du\,,$$

e facendo tendere $\alpha \to +\infty$ otteniamo il sistema di equazioni integrali

$$\tag{3} \begin{cases} z_1(t) = C - \displaystyle\int_t^\infty z_2(u)\,du\,, \\ z_2(t) = \displaystyle\int_t^\infty A(u) f[z_1(u)]\,du\,. \end{cases}$$

Inversamente ogni soluzione del sistema (3), con $z_1(t)$ limitata e positiva da un certo valore di t in poi, definisce una funzione $z(t) = z_1(t)$, $z'(t) = z_2(t)$ soluzione dell'equazione differenziale (1) e soddisfacente alla condizione (2).

a) Cominciamo col supporre $f(C) > 0$.

Indichiamo con M_1 il massimo di $f(z)$ nell'intervallo chiuso (K_1, C), $0 < K_1 < C$, appartenendo K_1 all'intorno di C in cui $f(z)$ si mantiene positiva, e sia

$$\tag{4} t_1 > \tau_1 = \left[\frac{LM_1}{\lambda(\lambda+1)(C-K_1)}\right]^{1/\lambda}.$$

Ciò posto, indicando con $\bar{t}$ il più grande dei valori t_0, t_1, definiamo i termini delle successioni $\{z_1^{(n)}(t)\}$, $\{z_2^{(n)}(t)\}$ con la seguente legge:

$$\tag{5_1} \begin{cases} z_2^{(n)}(t) = 0\,, \\ z_1^{(n)}(t) = C, \end{cases} \qquad \text{per } t \geqslant \bar{t} + n,$$

$$\tag{5_2} \begin{cases} z_2^{(n)}(t) = \displaystyle\int_{t+(1/n)}^\infty A(u) f[z_1^{(n)}(u)]\,du\,, \\ z_1^{(n)}(t) = C - \displaystyle\int_t^\infty z_2^{(n)}(u)\,du\,, \end{cases} \qquad \text{per } \bar{t} \leqslant t \leqslant \bar{t} + n\,.$$

Nell'intervallo $\bar{t}+n-(1/n) \leqslant t \leqslant \bar{t}+n$ avremo:

$$z_2^{(n)}(t)=\int_{t+(1/n)}^{\infty} A(u)f(C)\,du \leqslant \frac{LM_1}{\lambda+1}\,\frac{1}{[t+(1/n)]^{\lambda+1}}<\frac{LM_1}{\lambda+1}\,\frac{1}{t^{\lambda+1}},$$

$$z_1^{(n)}(t)=C-\int_t^{\infty} z_2^{(n)}(u)\,du > C-\frac{LM_1}{\lambda+1}\int_t^{\infty}\frac{du}{u^{\lambda+1}}=C-\frac{LM_1}{\lambda(\lambda+1)}\,\frac{1}{t^{\lambda}},$$

e perciò, tenendo conto della (4),

$$\left\{\begin{array}{l} C \geqslant z_1^{(n)}(t) > K_1\,, \\ \dfrac{LM_1}{\lambda(\lambda+1)}\,\dfrac{1}{t^{\lambda+1}} > z_2^{(n)}(t) \geqslant 0\,, \end{array}\right. \qquad \text{per } t \geqslant \bar{t}+n-\frac{1}{n}.$$

Analogamente, nell'intervallo $\bar{t}+n-\dfrac{2}{n} \leqslant t \leqslant \bar{t}+n-\dfrac{1}{n}$ sarà:

$$z_2^{(n)}(t)=\int_{t+(1/n)}^{\infty} A(u)f[z_1^{(n)}(u)]\,du<\frac{LM_1}{\lambda+1}\,\frac{1}{t^{\lambda+1}},$$

$$z_1^{(n)}(t)>C-\frac{LM_1}{\lambda(\lambda+1)}\,\frac{1}{t^{\lambda}},$$

ed ancora, per la (4),

$$\left\{\begin{array}{l} C \geqslant z_1^{(n)}(t) > K_1\,, \\ \dfrac{LM_1}{\lambda+1}\,\dfrac{1}{t^{\lambda+1}} > z_2^{(n)}(t) \geqslant 0\,, \end{array}\right. \qquad \text{per } t \geqslant \bar{t}+n-\frac{2}{n}.$$

Iterando il procedimento si ha allora, per $t \geqslant \bar{t}$ e per $n=1, 2, \ldots,$

$$C \geqslant z_1^{(n)}(t) > K_1\,, \qquad \frac{LM_1}{\lambda+1}\,\frac{1}{t^{\lambda+1}} > z_2^{(n)}(t) \geqslant 0\,. \tag{6}$$

Le funzioni che compongono le successioni $\{z_1^{(n)}(t)\}$ e $\{z_2^{(n)}(t)\}$ sono dunque equilimitate e dimostriamo che sono anche equicontinue.

Posto infatti $\bar{t} \leqslant t' < t''$, dalla seconda delle (6) si ha:

$$|z_1^{(n)}(t'')-z_1^{(n)}(t')| \leqslant \int_{t'}^{t''} z_2^{(n)}(u)\,du<(t''-t')\,\frac{LM_1}{\lambda+1}\,\frac{1}{\bar{t}^{\lambda+1}}\,.$$

Si ha anche dalla prima delle (6):

$$|z_2^{(n)}(t'') - z_2^{(n)}(t')| \leqslant \int\limits_{t'+(1/n)}^{t''+(1/n)} A(u) f[z_1^{(n)}(u)]\, du \leqslant \frac{LM_1}{\lambda+1} \frac{[t''+(1/n)]^{\lambda+1} - [t'+(1/n)]^{\lambda+1}}{[t''+(1/n)]^{\lambda+1}[t'+(1/n)]^{\lambda+1}} =$$

$$= LM_1 \frac{(t''-t')[t'+(1/n)+\theta(t''-t')]^{\lambda}}{[t''+(1/n)]^{\lambda+1}[t'+(1/n)]^{\lambda+1}}, \qquad 0<\theta<1,$$

da cui, supponendo, com'è certamente lecito, $\bar{t}>1$, ed osservando che

$$\frac{[t'+(1/n)+\theta(t''-t')]^{\lambda}}{[t''+(1/n)]^{\lambda+1}} < 1,$$

si ottiene

$$|z_2^{(n)}(t'') - z_2^{(n)}(t')| < (t''-t') \frac{LM_1}{[t'+(1/n)]^{\lambda+1}} < (t''-t') \frac{LM_1}{\bar{t}^{\lambda+1}}.$$

Dalle successioni $\{z_1^{(n)}(t)\}$ e $\{z_2^{(n)}(t)\}$ è allora possibile estrarre con doppio procedimento diagonale due sottosuccessioni convergenti in ogni punto a distanza finita dell'intervallo $(\bar{t}, \infty)$ ed uniformemente convergenti in ogni intervallo finito contenuto in $(\bar{t}, \infty)$ ([5]).

Siano $\{z_1^{(r_i)}(t)\}$ e $\{z_2^{(r_i)}(t)\}$ le sottosuccessioni considerate ed indichiamo con $z_1(t)$ e $z_2(t)$ le funzioni verso cui convergono in $(\bar{t}, \infty)$.

Mostriamo che, per ogni fissato $t \geqslant \bar{t}$,

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_{t+(1/r_i)}^{\infty} A(u) f[z_1^{(r_i)}(u)]\, du = \int\limits_{t}^{\infty} A(u) f[z_1(u)]\, du, \\ \lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_{t}^{\infty} z_2^{(r_i)}(u)\, du = \int\limits_{t}^{\infty} z_2(u)\, du. \end{cases}$$

Si ha infatti, per $t' > t+1$, t' arbitrario,

$$\left| \int\limits_{t}^{\infty} A(u) f[z_1(u)]\, du - \int\limits_{t+(1/r_i)}^{\infty} A(u) f[z_1^{(r_i)}(u)]\, du \right| \leqslant L \int\limits_{t}^{t+(1/r_i)} \frac{|f(z_1)|}{u^{\lambda+2}}\, du +$$

$$+ \int\limits_{t+(1/r_i)}^{t'} \frac{|f(z_1) - f[z_1^{(r_i)}]|}{u^{\lambda+2}}\, du + \int\limits_{t'}^{\infty} \frac{|f(z_1) - f[z_1^{(r_i)}]|}{u^{\lambda+2}}\, du ;$$

([5]) Il fatto che siano equilimitati per $t \geqslant \bar{t}$ i termini delle successioni $\{z_1^{(n)}\}$ e $\{z_2^{(n)}\}$ consente di estrarre da queste due sottosuccessioni convergenti in un insieme di punti I denso in $(\bar{t}, \infty)$, per esempio l'insieme dei numeri razionali $\geqslant \bar{t}$, e rifacendosi a noti ragionamenti ne conseguono le affermazioni del testo.

tenendo conto della prima delle (6), in virtù della quale $C \geqslant z_1^{(r_i)}(t) > K_1$ e di conseguenza anche $C \geqslant z_1(t) \geqslant K_1$, il primo ed il terzo integrale che figurano al secondo membro della disuguaglianza risultano minori rispettivamente di $\int_t^{t+(1/r_i)} \frac{LM_1}{u^{\lambda+2}} du$ e $\frac{2LM_1}{\lambda+1} \frac{1}{t'^{\lambda+1}}$, e per t' sufficientemente grande ed i maggiore di un conveniente i_1 possono rendersi minori di $\sigma/3$ positivo prefissato.

Osserviamo poi che l'uniforme convergenza delle $z_1^{(r_i)}(t)$ verso $z_1(t)$ in $(\bar{t}, t')$ e la continuità della funzione $f(z)$ consentono di determinare un indice i_2 tale che per $i > i_2$ anche il secondo integrale, minore di $\frac{L}{\bar{t}^{\lambda+2}} \int_{\bar{t}}^{t'} |f(z_1) - f[z_1^{(r_i)}]| du$, risulta $< \sigma/3$. Si ha dunque, per i maggiore del più grande dei numeri i_1 e i_2 e per $t \geqslant \bar{t}$,

$$\left| \int_t^\infty A(u) f(z_1)\, du - \int_{t+(1/r_i)}^\infty A(u) f[z_1^{(r_i)}]\, du \right| < \sigma.$$

In modo analogo, per dimostrare la seconda delle (7), si ha per $t'' > \bar{t}$ e t'' arbitrario,

$$\left| \int_t^\infty z_2(u)\, du - \int_t^\infty z_2^{(r_i)}(u)\, du \right| \leqslant \int_t^{t''} |z_2(u) - z_2^{(r_i)}(u)|\, du + \int_{t''}^\infty |z_2(u) - z_2^{(r_i)}(u)|\, du\ ;$$

l'uniforme convergenza delle $z_2^{(r_i)}(t)$ verso $z_2(t)$ in $(\bar{t}, t'')$ consente di determinare l'indice i in modo che il primo integrale che figura al secondo membro della disuguaglianza risulta minore di $\sigma/2$ positivo arbitrario. Tenendo conto poi della seconda delle (6), in virtù della quale $LM_1/[(\lambda+1)t^{\lambda+1}] > z_2^{(r_i)}(t) \geqslant 0$ e quindi anche $LM_1/[(\lambda+1)t^{\lambda+1}] \geqslant z_2(t) \geqslant 0$, il secondo integrale risulta minore o uguale di $2LM_1/[\lambda(\lambda+1)t''^{\lambda}]$, e per t'' sufficientemente grande può rendersi $< \sigma/2$.

Con ciò le (7) sono dimostrate. Fatto allora, nelle (5_2), $n = r_i$ e passando al limite per $i \to \infty$, si conclude che le funzioni $z_1(t)$ e $z_2(t)$ più sopra definite soddisfano per $t \geqslant \bar{t}$ al sistema di equazioni integrali (3).

b) Se $f(C) < 0$, indichiamo con $-M_2$ $(M_2 > 0)$ il minimo dei valori assunti da $f(z)$ nell'intervallo chiuso (C, K_2), $C < K_2 < \infty$, appartenendo K_2 all'intorno di C in cui $f(z)$ si mantiene negativa, e poniamo

$$t_2 > \tau_2 = \left[\frac{LM_2}{\lambda(\lambda+1)(K_2 - C)} \right]^{1/\lambda}.$$

Con ciò, indicando con $\bar{t}$ il più grande dei valori t_0, t_2, i termini delle successioni $\{z_1^{(n)}(t)\}$ e $\{z_2^{(n)}(t)\}$ soddisfano per $t \geqslant \bar{t}$ ed $n = 1, 2, \ldots$ alle limitazioni

$$C \leqslant z_1^{(n)}(t) < K_2\,, \qquad \frac{-LM_2}{\lambda+1}\,\frac{1}{t^{\lambda+1}} < z_2^{(n)}(t) \leqslant 0\,,$$

e con procedimento analogo a quello precedentemente tenuto si prova l'esistenza di due funzioni $z_1(t)$ e $z_2(t)$ che per $t \geqslant \bar{t}$ soddisfano al sistema (3).

c) Infine, se $f(C) = 0$ la funzione $z(t) = C$ soddisfa alla equazione differenziale (1) ed alla condizione (2).

Dalle cose dette segue il teorema:

Se $f(z)$ è funzione continua di z e C una costante arbitraria, $0 < C < \infty$, *esiste almeno una soluzione $z(t)$ dell'equazione differenziale* (1), *definita per valori di t maggiori o uguali di un conveniente $\bar{t}$, che soddisfa alla condizione*

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = C\,.$$

3. – Per valori di C in cui $f(C) \neq 0$, l'unicità delle soluzioni dell'equazione (1) di cui al numero precedente si è provata l'esistenza è certamente garantita, seguendo un procedimento ormai classico, dalla condizione che *la funzione $f(z)$ sia lipschitziana in ogni intervallo finito.*

Cominciamo con l'osservare che, detto $z(t)$ un integrale che verifica la condizione $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = C$, $f(C) \neq 0$, integrando successivamente la (1) tra t ed α, $t < \alpha$, si ha

$$z(t) = z(\alpha) - (\alpha - t)z'(\alpha) - \int_t^{\alpha} (u - t)A(u)f[z(u)]\,du\,,$$

da cui, facendo tendere $\alpha \to \infty$ e tenendo conto che

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{z'(\alpha)}{\alpha^{-1}} = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{A(\alpha)f[z(\alpha)]}{\alpha^{-2}} = 0\,,$$

per la (2) si ottiene

$$z(t) = C - \int_t^{\infty} (u - t)A(u)f[z(u)]\,du\,. \tag{8}$$

Ciò posto, indichi $\bar{z}(t)$ un integrale che verifica la condizione $\lim\limits_{t\to\infty} \bar{z}(t) = \bar{C}$, $f(\bar{C}) \neq 0$, sia t' un valore della variabile tale che per $t \geqslant t'$ risultino contemporaneamente definite le funzioni $z(t)$ e $\bar{z}(t)$, e sia infine $\bar{t}$ il più grande dei valori t' e t_0 (6).

Per la (8), posto $t \geqslant \bar{t}$, si ha:

$$|z(t) - \bar{z}(t)| \leqslant |C - \bar{C}| + \int_t^\infty (u-t)A(u)\,|f(z) - f(\bar{z})|\,du \leqslant$$

$$\leqslant |C - \bar{C}| + L\int_t^\infty \frac{u-t}{u^{\lambda+2}}|f(z) - f(\bar{z})|\,du < |C - \bar{C}| + L\int_t^\infty \frac{|f(z) - f(\bar{z})|}{u^{\lambda+1}}\,du\,;$$

poichè $z(t)$ e $\bar{z}(t)$ sono limitate in (t, ∞), esisterà una costante K tale che $|f[z(t)] - f[\bar{z}(t)]| < K|z(t) - \bar{z}(t)|$, da cui

$$|z(t) - \bar{z}(t)| < |C - \bar{C}| + LK\int_t^\infty \frac{|z(u) - \bar{z}(u)|}{u^{\lambda+1}}\,du\,,$$

e per il lemma di GRONWALL generalizzato (7) si ha infine

$$|z(t) - \bar{z}(t)| < |C - \bar{C}| \exp\left[\frac{LK}{\lambda+1}\,\frac{1}{t^\lambda}\right]. \tag{9}$$

La (9) fornisce un limite superiore della differenza $|z(t) - \bar{z}(t)|$ in $(\bar{t}, \infty)$. In particolare, se $C = \bar{C}$, si deduce il criterio di unicità enunciato.

---

(6) Con t_0 abbiamo indicato, come al numero precedente, il valore della variabile tale che per $t \geqslant t_0$ si ha $0 < A(t) \leqslant \frac{L}{t^{\lambda+2}}$, essendo L, λ quantità reali positive.

(7) Si perviene alla (9) ponendo $|z(t) - \bar{z}(t)| = \exp\left[\frac{LK}{\lambda+1}\,\frac{1}{t^\lambda}\right] F(t)$ e provando col solito procedimento che in (t, ∞) si ha $\max F(t) < |C - \bar{C}|$. Cfr. G. SANSONE, loc. cit. in (4), p. 30.