Rivista Mat. Univ. Parma 4, 313-317 (1953)

LUIGI MERLI (*)

Sul problema della approssimazione delle funzioni continue di due variabili.

1. – Assegnato un sistema di punti $\{\xi_{\nu,n}\}$ dell'intervallo $(0, 1)$, con $\nu=0, 1, \ldots, n-1, n$; $n=1, 2, 3, \ldots$; $\xi_{\nu,n} > \xi_{\mu,n}$, se $\nu > \mu$, associamo ad esso una successione di funzioni $\{\psi_{\nu,n}(x)\}$, definite per $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Un tale sistema di punti e funzioni si dirà che risolve il problema della approssimazione se, per ogni funzione $f(x)$ continua, la funzione

$$A_n[f(x)] = \sum_{\nu=0}^{n} f(\xi_{\nu,n})\psi_{\nu,n}(x) , \tag{1}$$

tende ad $f(x)$, quando $n \to \infty$, uniformemente per $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Recentemente H. BOHMANN [1] ha studiato tale problema ed ha dato alcuni teoremi nei quali sono stabilite delle condizioni necessarie e sufficienti alle quali debbono soddisfare i punti $\{\xi_{\nu,n}\}$ e le funzioni $\{\psi_{\nu,n}(x)\}$, affinchè la (1) sia atta ad assicurare l'approssimazione per qualunque funzione $f(x)$ continua.

Scopo di questo lavoro è di far vedere come tali teoremi siano suscettibili di estensione al problema della approssimazione delle funzioni continue di due variabili.

Tale problema può essere posto nel seguente modo: Nel quadrato Q di lato 1, avente un vertice nell'origine degli assi cartesiani e due lati rispettivamente sugli assi x ed y, consideriamo il sistema di punti $(\xi_{\nu,n}, \eta_{\mu,n})$, le cui coordinate $\{\xi_{\nu,n}\}$, $\{\eta_{\mu,n}\}$, soddisfano alle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \xi_{\nu,n} > \xi_{\bar{\nu},n} , & \text{se} \quad \nu > \bar{\nu} , \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n, \\ \eta_{\nu,n} > \eta_{\bar{\mu},n} , & \text{se} \quad \mu > \bar{\mu} , \qquad \mu = 0, 1, \ldots, n, \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) ,$$

(*) Prof. nella Università di Firenze. Indirizzo: via G. Marconi 61, Firenze (Italia).

(1) H. BOHMANN, *On approximation of continuous and of analytic functions*, Ark. Mat. 2, 43-56 (1952).

e ad ogni punto $(\xi_{\nu,n}, \eta_{\mu,n})$ associamo una funzione reale $\psi_{\nu,\mu;n}(x, y)$, definita per $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, cioè nel quadrato Q.

Un sistema di questo tipo diremo che risolve il problema della approssimazione se, per ogni funzione continua $f(x, y)$, la funzione

$$A_n[f(x, y)] = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} f(\xi_{\nu,n}, \eta_{\mu,n})\psi_{\nu,\mu;n}(x, y) , \tag{2}$$

tende ad $f(x, y)$, quando $n \to \infty$, uniformemente per $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

2. - a) Daremo in primo luogo delle condizioni sufficienti alle quali deve soddisfare il sistema dei punti fondamentali $\{(\xi_{\nu,n}, \eta_{\mu,n})\}$ affinchè sia atto a risolvere il problema della approssimazione. Dimostreremo precisamente che, *se le condizioni*:

$$\begin{cases} \xi_{0,n} \to 0 , \\ \xi_{n,n} \to 1 , \end{cases} \qquad \max_{\nu} \{\xi_{\nu+1,n} - \xi_{\nu,n}\} \to 0 , \tag{3}$$

$$\begin{cases} \eta_{0,n} \to 0 , \\ \eta_{n,n} \to 1 , \end{cases} \qquad \max_{\mu} \{\eta_{\mu+1,n} - \eta_{\mu,n}\} \to 0 , \tag{4}$$

quando $n \to \infty$, sono soddisfatte, è possibile costruire un sistema di funzioni $\{\psi_{\nu,\mu;n}(x, y)\}$ che risolve il problema della approssimazione. Esse saranno quindi sufficienti. Faremo vedere poi che *se le* (3) *e* (4) *non sono simultaneamente soddisfatte, si può trovare una funzione $f(x, y)$ continua, non identicamente nulla, tale che per qualunque sistema $\{\psi_{\nu,\mu;n}(x, y)\}$ di funzioni*

$$\lim_{n \to \infty} A_n[f(x, y)] = 0 ,$$

e pertanto esse non permettono di risolvere il problema della approssimazione.

b) Proviamo che le (3) e (4) sono sufficienti. Ammettiamo che esse siano soddisfatte e definiamo la funzione $\psi_{\nu,\mu;n}(x, y) \equiv 0$ fuori del rettangolo di vertici $(\xi_{\nu-1,n}, \eta_{\mu-1,n})$, $(\xi_{\nu+1,n}, \eta_{\mu-1,n})$, $(\xi_{\nu-1,n}, \eta_{\mu-1,n})$, $(\xi_{\nu+1,n}, \eta_{\mu+1,n})$; $\psi_{\nu,\mu;n}(x, y) = \dfrac{\eta_{\mu-1,n} - y}{\eta_{\mu-1,n} - \eta_{\mu,n}}$ nei punti (x, y) appartenenti al triangolo avente i suoi vertici nei punti $(\xi_{\nu,n}, \eta_{\mu,n})$, $(\xi_{\nu-1,n}, \eta_{\mu-1,n})$, $(\xi_{\nu+1,n}, \eta_{\mu-1,n})$; $\psi_{\nu,\mu;n}(x, y) = \dfrac{\eta_{\mu+1,n} - y}{\eta_{\mu+1,n} - \eta_{\mu,n}}$ nei punti (x, y) appartenenti al triangolo avente i suoi vertici nei punti $(\xi_{\nu,n}, \eta_{\mu,n})$, $(\xi_{\nu-1,n}, \eta_{\mu+1,n})$, $(\xi_{\nu+1,n}, \eta_{\mu+1,n})$; $\psi_{\nu,\mu;n}(x, y) = \dfrac{\xi_{\nu+1,n} - x}{\xi_{\nu+1,n} - \xi_{\nu,n}}$ nei punti (x, y) appartenenti al triangolo avente i suoi vertici nei punti $(\xi_{\nu,n}, \eta_{\mu,n})$, $(\xi_{\nu+1,n}, \eta_{\mu-1,n})$,

$(\xi_{\nu+1,n}, \eta_{\mu+1,n})$; $\psi_{\nu,\mu;n}(x, y) = \dfrac{\xi_{\nu-1,n} - x}{\xi_{\nu-1,n} - \xi_{\nu,n}}$ nei punti (x, y) appartenenti al triangolo avente i suoi vertici nei punti $(\xi_{\nu,n}, \eta_{\mu,n})$, $(\xi_{\nu-1,n}, \eta_{\mu-1,n})$, $(\xi_{\nu-1,n}, \eta_{\mu+1,n})$.

Consideriamo la funzione

$$A_n[f(x, y)] = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} f(\xi_{\nu,n}, \eta_{\mu,n}) \psi_{\nu,\mu;n}(x, y) .$$

Essa è lineare in ciascun rettangolo in cui è stato diviso il quadrato Q ed inoltre, nel punto $(\xi_{m,n}, \eta_{l,n})$, è:

$$A_n[f(\xi_{m,n}, \eta_{l,n})] = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} f(\xi_{\nu,n}, \eta_{\mu,n}) \psi_{\nu,\mu;n}(x, y) = f(\xi_{m,n}, \eta_{l,n}) .$$

Tenuto conto della continuità della $f(x, y)$, segue subito, per il modo come sono state definite le funzioni $\{\psi_{\nu,\mu;n}(x, y)\}$ e per le condizioni (3) e (4), che

$$\lim_{n \to \infty} A_n[f(x, y)] = f(x, y) ,$$

uniformemente per $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Abbiamo così costruito una successione di funzioni che risolve il problema della approssimazione e pertanto le (3) e (4) sono sufficienti a tale scopo.

c) Supponiamo ora che le (3) e (4) non siano simultaneamente soddisfatte. Se indichiamo con

$$h_n = \max_{\nu} (\xi_{0,n};\ 1 - \xi_{n,n};\ \xi_{\nu+1,n} - \xi_{\nu,n}) , \tag{3_1}$$

$$k_n = \max_{\mu} (\eta_{0,n};\ 1 - \eta_{n,n};\ \eta_{\mu+1,n} - \eta_{\mu,n}) , \tag{3_2}$$

la supposizione fatta equivale ad ammettere l'esistenza di due costanti h e k positive tali che

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, h_n = h > 0 , \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}}\, k_n = k > 0 .$$

Esistono allora due successioni h_{n_p}, k_{n_q} e due costanti p_0 e q_0, tali che

$$h_{n_p} > \frac{h}{2} , \quad \text{per } p > p_0 ; \qquad k_{n_q} > \frac{k}{2} , \quad \text{per } q > q_0 .$$

Si può allora asserire che esiterà una successione $\{I_{p,q}\}$ di rettangoli del quadrato Q, con lati paralleli agli assi, ciascuno con area maggiore di $hk/4$, tale che $\{I_{p,q}\}$ non contiene punti dell'insieme $\sum_\nu \sum_\mu (\xi_{n_p,\nu}, \eta_{n_q,\mu})$. Scegliamo ora un intero N tale che $\frac{1}{N} < \frac{h}{4} \leqslant \frac{1}{N-1}$ ed un intero M tale che $\frac{1}{M} < \frac{k}{4} \leqslant \frac{1}{M-1}$ e dividiamo l'intervallo $(0, 1)$ dell'asse x in N sottointervalli $i_1, i_2, ..., i_N$ e l'intervallo $(0, 1)$ dell'asse y in M sottointervalli $j_1, j_2, ..., j_M$. Si otterranno così MN rettangoli dei quali uno, almeno, è coperto da infiniti rettangoli appartenenti alla successione $\{I_{p,q}\}$. Esisteranno allora una successione $\{n_\lambda\}$ ed un rettangolo R, di Q, che non contiene punti dell'insieme $\sum_\lambda \sum_\nu \sum_\mu (\xi_{n_\lambda,\nu}, \eta_{n_\lambda,\mu})$.

Consideriamo ora una funzione $f(x, y)$ che è $\neq 0$ in R e nulla altrove. Sia $\{\psi_{\nu,\mu;n}(x, y)\}$ un qualunque sistema di funzioni approssimanti. Avremo allora

$$A_n[f(x, y)] = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} f(\xi_{\nu,n}, \eta_{\mu,n})\psi_{\nu,\mu;n}(x, y),$$

e in particolare

$$A_{n_\lambda}[f(x, y)] \equiv 0,$$

per qualunque λ, e quindi sarà:

$$\lim_{n\to\infty} A_n[f(x, y)] = 0,$$

mentre la $f(x, y)$ non è identicamente nulla in tutto il quadrato Q.

3. – a) Daremo ora delle condizioni sufficienti relative al sistema $\{\psi_{\nu,\mu;n}(x, y)\}$ di funzioni, nell'ipotesi che esse siano tutte *non negative* nel quadrato Q, affinchè esse siano atte a risolvere il problema della approssimazione.

b) Sia $\varepsilon > 0$ e indichiamo brevemente con $\sum_n'$ le somme $\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} \psi_{\nu,\mu;n}(x,y)$, relative ai punti per i quali risulti $\sqrt{(x-\xi_{\nu,n})^2 + (y-\eta_{\mu,\nu})^2} \geqslant \varepsilon$, e con $\sum_n''$ le somme $\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} \psi_{\nu,\mu;n}(x, y)$, relative ai punti per i quali sia $\sqrt{(x-\xi_{\nu,n})^2 + (y-\eta_{\mu,n})^2} < \varepsilon$.

Proveremo che *se*

$$\lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_n' = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_n'' = 1, \tag{5}$$

uniformemente per $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, *si ha:*

$$\lim_{n\to\infty} A_n[f(x, y)] = f(x, y), \tag{6}$$

uniformemente nel quadrato Q.

Proveremo poi che *le condizioni* (5) *sono equivalenti alle condizioni*:

$$(7)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} A_n(1) = 1\,, \\ \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x+y) = x+y\,, \\ \lim\limits_{n\to\infty} A_n[(x+y)^2] = (x+y)^2\,. \end{cases}$$

c) Proviamo la (6) nelle ipotesi (5).

Essendo $f(x, y)$ continua in Q, sarà $|f(x, y)| \leqslant A$ e scelto un $\sigma > 0$, esisterà corrispondentemente un ε tale che per $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \varepsilon$, sarà

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \sigma\,.$$

Avremo allora:

$$\begin{aligned} |f(x, y) - A_n[f(x, y)]| &= |f(x, y) - {\textstyle\sum_n''} f(x, y) + f(x, y) {\textstyle\sum_n''} - A_n[f(x, y)]| \leqslant \\ &\leqslant |1 - {\textstyle\sum_n''}| A + A {\textstyle\sum_n'} + |{\textstyle\sum_n''}[f(x, y) - f(\xi_{\nu,n}, \eta_{\mu,n})]| < \\ &< |1 - {\textstyle\sum_n''}| A + A {\textstyle\sum_n'} + \sigma {\textstyle\sum_n''}\,, \end{aligned}$$

e per le (5), segue la (6), tenuto conto anche delle (3) e (4).

d) In particolare, per $f(x, y) = 1$, $f(x, y) = x+y$, $f(x, y) = (x+y)^2$, le (7) sono conseguenza immediata delle (5).

Viceversa supponiamo che le (7) siano soddisfatte e dimostriamo che valgono le (5).

Sarà infatti, in tal caso,

$$\lim_{n\to\infty} \{(x+y)^2 A_n(1) - 2(x+y)A_n(x+y) + A_n[(x+y)^2]\} = 0\,.$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned} &(x+y)^2 A_n(1) - 2(x+y)A_n(x+y) + A_n[(x+y)^2] = \\ &\quad = (x+y)^2 \sum_\nu \sum_\mu \psi_{\nu,\mu;\,n}(x.\, y) - 2(x+y) \sum_\nu \sum_\mu (\xi_{\nu,n} + \eta_{\mu,n})\psi_{\nu,\mu;\,n}(x, y) + \\ &\quad + \sum_\nu \sum_\mu (\xi_{\nu,n} + \eta_{\mu,n})^2 \psi_{\nu,\mu;\,n}(x, y) = \\ &\quad = \sum_\nu \sum_\mu [(x+y) - (\xi_{\nu,n} + \eta_{\mu,n})]^2 \psi_{\nu,\mu;\,n}(x, y) \geqslant \varepsilon^2 {\textstyle\sum_n'}\,. \end{aligned}$$

Ne segue $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_n' = 0$, cioè la prima delle (5).

Ma è $A_n(1) = \sum_n' + \sum_n''$ ed è $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(1) = 1$ e quindi $\lim\limits_{n\to\infty} \sum'' = 1$, cioè la seconda delle (5).