Rivista Mat. Univ. Parma 4, 299-311 (1953

VITTORIO E. BONONCINI (*)

Un teorema di continuità per integrali su superficie chiuse. (**)

1. – Denotiamo con $\mathcal{S}$ la classe di tutte le superficie continue orientate S di area finita secondo LEBESGUE: $L(S) < +\infty$ (cfr. n. 2). L'integrale di WEIERSTRASS

$$\mathcal{J}(S) = (S) \int F \, du \, dv = (S) \int F(x, y, z, t_1, t_2, t_3) \, du \, dv$$

sopra una superficie S è stato definito da L. CESARI [**I, 1**] (°) per qualsiasi superficie $S \in \mathcal{S}$, nelle usuali condizioni di continuità e omogeneità positiva per la funzione F, e tale integrale si riduce ad un ordinario integrale di LEBESGUE sopra la superficie S ogni qualvolta l'area $L(S)$ è data dall'integrale classico per l'area [L. CESARI, **I, 1**]. Relativamente all'integrale $\mathcal{J}(S)$ J. CECCONI [**1, 2, 3, 4**] ha dimostrato le formule di GAUSS-GREEN e di STOKES, L. CESARI [**I, 2, 3**] ha dimostrato condizioni sufficienti e condizioni necessarie di semicontinuità e, in un precedente mio lavoro [**1**], ho dimostrato teoremi di convergenza e confronto. Infine L. CESARI [**4**], A. G. SIGALOV [**1**] e J. M. DANSKIN [**1**] hanno usato l'integrale $\mathcal{J}(S)$ in teoremi di esistenza del minimo assoluto in problemi di calcolo delle variazioni. Tutte queste ricerche hanno mostrato una notevole analogia tra le proprietà dell'integrale sopra superficie di area finita secondo LEBESGUE e quelle dell'integrale sopra curve di lunghezza finita secondo JORDAN [L. CESARI, **I**].

Nel presente lavoro si considera il particolare integrale

$$\mathcal{F}(S) = (S) \int (f_1 t_1 + f_2 t_2 + f_3 t_3) \, du \, dv$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico S. PINCHERLE, Università, Bologna (Italia).
(**) Ricevuto il 15-X-1953.
(°) I numeri in neretto e parentesi quadra richiamano la Bibliografia alla fine del lavoro.

nella classe $\mathcal{S}_0$ di tutte le superficie S continue, orientate e chiuse di area finita secondo LEBESGUE (cfr. n. 2), ove f_1, f_2, f_3 sono funzioni continue di punto, e si dimostra che $\mathcal{F}(S)$ è un funzionale continuo in ogni sottoclasse di superficie $S \in \mathcal{S}_0$ aventi area $L(S)$ superiormente limitata.

Un particolare integrale $\mathcal{F}(S)$ è il seguente

$$V(S) = (S) \int x t_1 \, du \, dv = (S) \int y t_2 \, du \, dv = (S) \int z t_3 \, du \, dv$$

che può essere assunto come definizione del volume ($\gtreqless 0$) «racchiuso» dalla superficie orientata e chiusa $S \in \mathcal{S}_0$. Tale integrale soddisfa la proprietà isoperimetrica

$$V^2(S) \leqslant (36\pi)^{-1} L^3(S) ,$$

e, rispetto ad altre pur notevoli definizioni di volume recentemente proposte [T. RADÓ, 1; J. W. T. YOUNGS, 1] ha il vantaggio di essere un funzionale continuo in ogni sottoclasse di superficie $S \in \mathcal{S}_0$ di area superiormente limitata, e di essere espresso come un integrale (di WEIERSTRASS) sopra la superficie S.

Poichè le proprietà sopra richiamate corrispondono a note proprietà dell'integrale curvilineo, l'analogia sopra accennata tra le proprietà delle curve e quelle delle superficie risulta ulteriormente estesa.

2. - Alcune proprietà dell'integrale $\mathcal{J}(S)$.

Siano E_2 il piano euclideo dei punti $w = (u, v)$, E_3 lo spazio euclideo dei punti $p = (x, y, z)$, $|w - w'|$, $|p - p'|$ le distanze euclidee dei punti w, $w' \in E_2$ e p, $p' \in E_3$, A il quadrato unità, $A = (0 \leqslant u, v \leqslant 1)$, del piano E_2, infine K sia un qualsiasi insieme chiuso in E_3. Sia (T, A): $p = T(w)$, $w \in A$, una qualsiasi trasformazione continua di A in K. Pertanto (T, A) è una rappresentazione di una superficie continua S tutta costituita di punti di K. Per semplicità denoteremo ciò con $S = (T, A)$, ossia con altre notazioni:

$$S = (T, A): \quad x = x(u, v) , \quad y = y(u, v) , \quad z = z(u, v) , \quad (u, v) \in A .$$

Indichiamo con $[S] = T(A) \subset K$ l'insieme dei punti occupati da S in E_3. Diremo che $S = (T, A)$ è una superficie poliedrica se (T, A) è continua in A ed esiste una suddivisione D di A in triangoli t su ciascuno dei quali T è lineare, e indicheremo con $a(S) = a(T, A)$ l'area elementare di $S = (T, A)$.

Diremo $L(S) = L(A, T)$ l'area di LEBESGUE di qualsiasi superficie continua $S = (T, A)$, onde $L(S) = a(S)$ per qualsiasi superficie poliedrica. Diremo che $S = (T, A)$ è orientata se uno dei due versi per le rotazioni su E_2 è stato assunto come positivo e inoltre diremo che $S = (T, A)$ è chiusa se T è costante sulla periferia A^* di A. Date due trasformazioni continue $S=(T, A)$, $S'= (T', A)$, poniamo $d = d(T, T', A) = \max |T(w) - T'(w)|$ per tutti i punti $w \in A$. Pertanto data una successione $S_n = (T_n, A)$ di trasformazioni continue con $S_n \to S$ intenderemo semplicemente che $d_n = d(T_n, T, A) \to 0$ al tendere all'infinito di n. Infine denoteremo con $\mathcal{S}$, o $\mathcal{S}_0$, la classe delle superficie continue orientate S, o di quelle che sono anche chiuse, tutte costituite di punti di K e aventi area finita secondo LEBESGUE.

Sia $F(p, t) = F(x, y, z, t_1, t_2, t_3)$, una qualsiasi funzione soddisfacente le seguenti condizioni: (1) $F(p, t)$ è continua per ogni punto $p = (x, y, z)$ di K e per ogni terna $t = (t_1, t_2, t_3)$ di numeri reali non tutti nulli (cioè per ogni vettore t non nullo); (2) $F(p, kt) = kF(p, t)$ per ogni $k > 0$, per ogni $p \in K$ e per ogni vettore t non nullo. Pertanto se poniamo $F(x, y, z, 0, 0, 0)$ per ogni punto $p \in K$, allora F risulta continua anche in ogni punto $(x, y, z, 0, 0, 0)$.

In tali condizioni l'integrale di WEIERSTRASS $\mathcal{J}(S)$ (vedi definizione al n. 4) è definito per ogni superficie $S \in \mathcal{S}$ e valgono le seguenti proposizioni:

(2, 1). Se $S = (T, A) \in \mathcal{S}$, $S'= (T', A) \in \mathcal{S}$, sono trasformazioni continue (superficie continue) equivalenti nel senso di FRÉCHET, allora $\mathcal{J}(S) = \mathcal{J}(S')$, cioè $\mathcal{J}(S)$ è invariante rispetto alla equivalenza nel senso di FRÉCHET [L. CESARI, **1**].

(2,2). Se $S = (T, A) \in \mathcal{S}$, $S_n = (T_n, A) \in \mathcal{S}$, $(n = 1, 2, 3,\ldots)$, sono superficie continue e $S_n \to S$, $L(S_n) \to L(S)$, allora anche $\mathcal{J}(S_n) \to \mathcal{J}(S)$ al tendere all'infinito di n [L. CESARI, **1**].

(2, 3). Se $S = (T, A) \in \mathcal{S}$ e $J_r(w)$, $(r = 1, 2, 3)$, sono gli jacobiani (generalizzati, oppure ordinari) delle tre coppie (y, z), (z, x), (x, y) di funzioni di $w = (u, v)$ e

$$L(S) = (A) \int (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)^{\frac{1}{2}}\, du\, dv\,,$$

allora si ha anche

$$\mathcal{J}(S) = (A) \int F[x(w), y(w), z(w), J_1(w), J_2(w), J_3(w)]\, du\, dv\,,$$

ove gli integrali al secondo membro sono entrambi integrali di LEBESGUE [L. CESARI, **1**].

(2, 4). Se $S = (T, A) \in \mathcal{S}$, $S_n = (T_n, A) \in \mathcal{S}$, $(n = 1, 2, 3,\ldots)$, sono superficie continue e $S_n \to S$, se l'integrale $\mathcal{J}(S)$ è regolare in senso stretto (vedi definizione al n. 4), allora $\mathcal{J}(S_n) \to \mathcal{J}(S)$ se e soltanto se $L(S_n) \to L(S)$ [V. E. BONONCINI, 1].

Siano ora $f_r(p) = f_r(x, y, z)$, $(r = 1, 2, 3)$, funzioni continue in K. Allora la funzione $F(p, t) = f_1 t_1 + f_2 t_2 + f_3 t_3$ soddisfa entrambe le condizioni (1), (2), e pertanto l'integrale

$$\mathcal{F}(S) = (S) \int (f_1 t_1 + f_2 t_2 + f_3 t_3)\, du\, dv$$

è un caso particolare dell'integrale $\mathcal{J}(S)$.

Scopo del presente lavoro è di dimostrare il seguente

Teorema A. *Se $S = (T, A) \in \mathcal{S}_0$, $S_n = (T_n, A) \in \mathcal{S}_0$, $(n = 1, 2, 3, ...)$, sono superficie continue, orientate e chiuse, se $S_n \to S$ e $L(S_n) < M$ (M costante finita), allora $\mathcal{F}(S_n) \to \mathcal{F}(S)$ al tendere all'infinito di n* (vedi dimostrazione al n. 6).

3. - Notazioni.

Sia $S = (T, A) \in \mathcal{S}$ una trasformazione continua di A in K e siano (T_r, A), $(r = 1, 2, 3)$, le trasformazioni piane e continue proiezioni di (T, A) sui piani coordinati yz, zx, xy [piani che denoteremo con E_{2r}, $(r = 1, 2, 3)$]. Sia $q \subset A$ un qualsiasi poligono semplice e chiuso e q^* la periferia di q (orientata in senso positivo, diciamo antiorario); siano C: (T, q^*), C_r: (T_r, q^*) le curve continue chiuse orientate immagini di q rispetto a T e T_r, $(r = 1, 2, 3)$, rispettivamente e siano $[C] = T(q^*) \subset E_3$, $[C_r] = T_r(q^*) \subset E_{2r}$ gli insiemi occupati dalle curve C, C_r in E_3 e E_{2r}. Denoteremo con $O(p; C_r)$ l'indice topologico della curva C_r rispetto al punto $p \in E_{2r}[O(p; C_r) = 0$ se $p \in [C_r]]$. Pertanto $O(p; C_r)$ può essere considerata come una funzione di p in E_{2r} e tale funzione è misurabile secondo BOREL in E_{2r}. Essendo $L(S) < +\infty$, $O(p; C_r)$ è anche integrabile secondo LEBESGUE in E_{2r} [L. CESARI, I]. Segue che i numeri

$$u_1 = u(q, T_1) = (E_{21}) \int O(p; C_1)\, dy\, dz, \qquad u_2 = u(q, T_2) = (E_{22}) \int O(p; C_2)\, dz\, dx,$$
$$u_3 = u(q, T_3) = (E_{23}) \int O(p; C_3)\, dx\, dy, \qquad u(q, T) = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant 0,$$

esistono finiti, ed è $|u_r| \leqslant u(q, T)$, $(r = 1, 2, 3)$. Denoteremo con u il vettore (u_1, u_2, u_3).

Se D denota un qualsiasi sistema finito di poligoni semplici, chiusi e non sovrapposti $q \subset A$, poniamo

$$U(A, T_r) = \sup_D \sum_{q \in D} |u(q, T_r)|, \quad (r = 1, 2, 3), \qquad U(A, T) = \sup_D \sum_{q \in D} u(q, T).$$

(3, 1). *Per ogni superficie continua $S = (T, A) \in \mathcal{S}$ si ha $U(A, T) = L(A, T)$, $U(A, T_r) = L(A, T_r)$, $(r = 1, 2, 3)$* [L. CESARI, I].

Ricordiamo anche la seguente proposizione:

(3, 2). *Per ogni poligono semplice* $q \subset A$ *e ogni suddivisione finita* D_q *di* q *in poligoni semplici* π, *diciamo* C: (T_r, q^*), C'_r: (T_r, π^*) *le immagini di* q^* *e di* π^* *rispetto a* T_r. *Denotiamo con* $\sum$ *una qualunque somma estesa a tutti i poligoni* $\pi \in D_q$ *e sia* M_r *l'insieme compatto* $M_r = \sum T_r(\pi^*) = T(\sum \pi^*) \subset E_{2r}$. *Allora* $O(p; C_r) = \sum O(p; C'_r)$ *per ogni punto* $p \in E_{2r} - M_r$, $(r = 1, 2, 3)$ [L. CESARI, I].

In particolare per ogni superficie poliedrica $S = (T, A)$, gli insiemi M_r sono di misura nulla in E_{2r} e quindi, per integrazione in E_{2r}, abbiamo $u(q, T_r) = \sum u(\pi, T_r)$, $(r = 1, 2, 3)$ e in conseguenza $|u(q, T_r)| \leqslant \sum |u(\pi, T_r)|$.

4. - Richiamo di una delle definizioni di $\mathcal{J}(S)$.

Sia $S = (T, A) \in \mathcal{S}$ una data trasformazione continua di A in K. Per ogni sistema finito D di poligoni semplici chiusi non sovrapposti $q \subset A$, diciamo $\sum$ ogni somma estesa a tutti i $q \in D$ e diciamo d, m, $\mu \geqslant 0$, indici di D rispetto a (T, A), i numeri seguenti:

$d = \max \operatorname{diam} T(q)$ per ogni $q \in D$;

$m = \max |M_r|$, $(r = 1, 2, 3)$, ove $M_r = \sum T(q^*) = T(\sum q^*) \subset E_{2r}$;

$\mu = \max [U(A, T) - \sum u(q, T);\ U(A, T_r) - \sum |u(q, T_r)|]$, $(r = 1, 2, 3)$.

Pertanto $m_r = |M_r|$, $\mu_r = U(A, T_r) - \sum |u(q, T_r)|$ sono gli indici m, μ di D rispetto alla trasformazione piana T_r. In ogni caso $|M_r|$ denota la misura di LEBESGUE dell'insieme piano M_r in E_{2r}. Per ogni regione $q \in D$, sia $\overline{w}$ un punto di q e $\overline{p} = T(\overline{w})$ l'immagine di $\overline{w}$. Sia poi u il vettore (u_1, u_2, u_3), $u_r = u(q, T_r)$, $(r = 1, 2, 3)$. Ricordiamo che per ogni $S = (T, A) \in \mathcal{S}$ esistono sistemi D di indici d, m, μ piccoli quanto si vuole [L. CESARI, I].

Se $[D_n, (n = 1, 2, 3, ...)]$ è una successione di sistemi finiti D_n di indici d_n, m_n, $\mu_n \to 0$ al tendere all'infinito di n, allora l'integrale di WEIERSTRASS $\mathcal{J}(S)$ può essere definito dal limite

$$(1) \qquad \mathcal{J}(S) = (S) \int F \, du \, dv = \lim_{n \to \infty} \sum_{q \in D_n} F(\overline{p}, u).$$

L'esistenza di tale limite e la sua indipendenza dalla particolare successione $[D_n]$ seguono dal fatto che il limite seguente

$$(2) \qquad \mathcal{J}(S) = \lim_{\left.\begin{smallmatrix} d \\ m \\ \mu \end{smallmatrix}\right\} \to 0} \sum_{q \in D} F(\overline{p}, u)$$

esiste finito [L. CESARI, I, 1].

Ovviamente, se $F = (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant 0$ allora $\mathcal{J}(S) = L(S)$ come segue subito dal fatto che $\mu \to 0$ implica $\sum u(q, T) \to U(A, T)$ ove $U(A, T) = L(A, T)$.

Se $F = f_r t_r$, allora nei limiti (1) e (2) anzichè gli indici d, m, μ, si possono considerare gli indici d, m_r, μ_r. Ciò segue immediatamente da una ispezione della dimostrazione della esistenza del limite (2) [L. CESARI, **I**, **1**].

Oltre alle condizioni (1) e (2) del n. **2** per la funzione $F(p, t)$ anche le seguenti ulteriori condizioni sono state prese in considerazione: (3) F possiede derivate parziali prime F_1, F_2, F_3 rispetto a t_1, t_2, t_3 continue per ogni punto $p = (x, y, z) \in K$ e per ogni vettore $t = (t_1, t_2, t_3)$ non nullo; (4) F possiede derivate parziali seconde E_{ij} rispetto a t_1, t_2, t_3 continue per ogni $p \in K$ e t non nullo. Sotto la condizione (3) si può definire la funzione di WEIERSTRASS $E(p, t, t') = F(p, t') - \sum_i t'_i F_i(p, t)$. Sotto la condizione (4) e l'ulteriore condizione (5) che per ogni $p \in K$ la matrice quadrata $\|F_{ij}\|$ abbia caratteristica < 2 al più in un insieme di punti $t = (t_1, t_2, t_3)$ non aventi punti interni, allora si dimostra che i nove rapporti $A_{ij}/(t_i t_j)$ sono uguali e definiscono una unica funzione $\varphi(p, t)$ per ogni $p \in K$ e t non nullo (ove A_{ij} è il complemento algebrico dell'elemento F_{ij}) [V. E. BONONCINI, **1**].

Sotto le sole ipotesi (1)-(2) si dice che $\mathcal{J}(S)$ è definito positivo [semidefinito] se $F > 0$ [$\geqslant 0$] per ogni $p \in K$ e t non nullo; sotto le ipotesi (1)-(3) si dice che $\mathcal{J}(S)$ è regolare positivo [semiregolare] se $E(p, t, t') > 0$ [$\geqslant 0$] per ogni $p \in K$ e t, t' non nulli e non proporzionali; infine sotto le ipotesi (1)-(5) si dice che $\mathcal{J}(S)$ è regolare positivo in senso stretto se $\varphi > 0$ per ogni $p \in K$ e t non nullo. Integrali $\mathcal{J}(S)$ semidefiniti positivi e semiregolari sono semicontinui inferiormente [L. CESARI, **2**, **3**]; la condizione di regolarità in senso stretto assicura la validità del teorema (2, 4) del n. **2** [V. E. BONONCINI, **1**].

5. – Richiamo di un risultato di L. Cesari.

L. CESARI ha dimostrato (cfr. [**5**], n. **9**) quanto segue:

Sia $S = (T, A) \in \mathcal{S}_0$ una superficie chiusa, e $S = (T_n, A) \in \mathcal{S}_0$ una successione di superficie poliedriche chiuse con $d_n = d(T_n, T, A) \to 0$, $a(S_n) < M$ (M costante finita), siano (T_r, A), (T_{nr}, A) le trasformazioni piane proiezioni di T, T_n su E_{2r}, ($r = 1, 2, 3$), e $\varepsilon > 0$ sia un numero arbitrario. Esiste allora una successione $[n]$ di interi n e, per ogni $n \in [n]$, una suddivisione $D = D_0 + D_1 + \ldots + D_n$ di A in poligoni semplici e chiusi q, tali che, se $\sum$, $\sum^{(j)}$ denotano somme estese a tutti i poligoni $q \in D$, oppure $q \in D_j$, ($j = 0, 1, 2, \ldots, N$), rispettivamente e $\sum_j$ denota una somma estesa ai valori $j = 1, 2, \ldots, N$, risulta: (1) diam $T(q) < \varepsilon$ per ogni $q \in D_0$, diam $T(\sum^{(j)} q) < \varepsilon$ per ogni $j = 1, 2, 3, \ldots, N$; (2) $|M_3| < \varepsilon$, ove $M_3 = T_3(\sum^{(0)} q^*) \subset E_{23}$; (3) $U(A, T_3) - \sum^{(0)} |u(q, T_3)| < \varepsilon$, $\sum_j \sum^{(j)} |u(q, T_3)| < \varepsilon$; (4) $\sum^{(0)} |u(q, T_{n3}) - u(q, T_3)| < \varepsilon$ per ogni $n \in [n]$; (5) $\sum_j |\sum^{(j)} u(q, T_{n3})| < \varepsilon$ per ogni $n \in [n]$; (6) i poligoni $q \in D_0$ e il numero N sono gli stessi per ogni $n \in [n]$ [L. CESARI, **5**].

Notiamo che T_3, T_{n3} possono essere sostituiti da T_2, T_{n2} oppure da T_1, T_{n1}.

6. – Dimostrazione del Teorema A.

(a) Sia $S = (T, A) \in \mathcal{S}_0$ la data superficie. Sia $Q \subset E_3$ un cubo chiuso contenente nel suo interno l'insieme $[S]$. Possiamo allora supporre che anche tutte le superficie S_n siano contenute nell'interno di Q, cioè $[S]$, $[S_n] \subset Q$. Da $[S]$, $[S_n] \subset Q$ segue anche $[S]$, $[S_n] \subset QK$, ove l'insieme QK è ora compatto. Trascureremo completamente i valori assunti dalle funzioni f_1, f_2, f_3 fuori di Q. Conviene invece estendere la definizione delle funzioni f_1, f_2, f_3 all'intero cubo Q (anzichè soltanto in QK), ciò che può farsi senza difficoltà mediante un teorema di E. J. McShane [1] [cfr., per il medesimo artificio, L. Cesari, 4]. Abbiamo ora il vantaggio di poter approssimare ciascuna superficie continua S_n mediante superficie poliedriche in modo che l'integrale $\mathcal{F}(S)$ è definito anche su tali superficie poliedriche.

Osserviamo ora che basterà dimostrare il Teorema A per superficie poliedriche S_n. Per ogni n sia infatti $[\Sigma_{nh}, (h = 1, 2, 3, ...)]$ una successione di superficie poliedriche $\Sigma_{nh} \in \mathcal{S}_0$ con $\Sigma_{nh} \to S_n$, $a(\Sigma_{nh}) \to L(S_n)$ al tendere all'infinito di h. Pertanto se $\Sigma_{nh} = (T_{nh}, A)$, $S_n = (T_n, A)$, supporremo $d_{nh} = d(T_{nh}, T_n, A) \to 0$, $a(\Sigma_{nh}) \to L(S_n)$ quando $h \to \infty$, $a(\Sigma_{nh}) < L(S_n)+1$. In virtù di (2, 2) abbiamo $\mathcal{F}(\Sigma_{nh}) \to \mathcal{F}(S_n)$ al tendere all'infinito di h. In conseguenza, per ogni n, possiamo determinare un intero $h = h(n)$ tale che $d_{nh} < n^{-1}$, $|\mathcal{F}(\Sigma_{nh}) - \mathcal{F}(S_n)| < n^{-1}$. Pertanto $d(T_{nh}, T, A) \leqslant d(T_{nh}, T_n, A) + d(T_n, T, A) < n^{-1} + d_n$, $d(T_{nh}, T, A) \to 0$, $a(\Sigma_{nh}) < M+1$ e quindi $\mathcal{F}(\Sigma_{nh}) \to \mathcal{F}(S)$ e finalmente anche $\mathcal{F}(S_n) \to \mathcal{F}(S)$. Basta dunque che dimostriamo il Teorema A per superficie $S_n \in \mathcal{S}_0$ poliedriche; inoltre basterà che dimostriamo il Teorema A per il solo integrale $\mathcal{F}(S) = (S) \int f_3 t_3 \, du \, dv$, dato che un'analoga dimostrazione vale per gli integrali che si ottengono ruotando gli indici 1, 2, 3 e la proposizione definitiva segue allora per addizione.

(b) Poniamo $l' = \liminf \mathcal{F}(S_n)$, $l'' = \limsup \mathcal{F}(S_n)$ al tendere all'infinito di n. Sia $[n]'$ una successione di interi n tali che $\mathcal{F}(S_n) \to l'$ al tendere all'infinito di n con $n \in [n]'$.

Sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario. Essendo f_3 limitata e uniformemente continua in Q, esiste una costante $M > 0$ tale che $|f_3(p)| < M$ per ogni $p \in K$, e potremo assumere M abbastanza grande affinchè sia pure $\varepsilon < M$, $1 < M$, $a(S_n) < M$ per ogni n. Inoltre, posto $\varepsilon_1 = (6M)^{-1}\varepsilon$, esiste un $\delta > 0$ tale che $|f_3(p) - f_3(p')| < \varepsilon_1$ per ogni coppia di punti $p, p' \in Q$, $|p - p'| < 2\delta$. Supponiamo che $[n]'$ contenga soltanto valori di n abbastanza grandi affinchè $d_n = d(T_n, T, A) < \delta$.

In virtù della (2) e dell'osservazione della fine del n. 4, esiste un numero $\sigma > 0$ tale che per ogni sistema finito D' di poligoni semplici, chiusi e non sovrapposti $q \subset A$ con indici d, m_3, $\mu_3 < \sigma$ risulta

$$(3) \qquad \Big| \sum_{q \in D'} f_3(\overline{p}) u(q, T_3) - \mathcal{F}(S) \Big| < \varepsilon_1 ,$$

ove $\overline{p} = T(\overline{w})$ è l'immagine di un punto qualsiasi $\overline{w} \in q$ per ogni $q \in D'$. Possiamo anche supporre $\sigma \leqslant \delta$, $\sigma \leqslant \varepsilon_1$.

Applichiamo ora il risultato del n. **5** ove σ sostituisce ε. Esiste pertanto una successione $[n]_1 \subset [n]'$ di interi n e, per ogni $n \in [n]_1$, una suddivisione $D = D_0 + D_1 + \ldots + D_N$ di A in poligoni semplici q tali che:

(l_1) diam $T(q) < \sigma$ per ogni $q \in D_0$, diam $T(\sum^{(j)} q) < \sigma$ per ogni $j = 1, 2, 3, \ldots, N$;

(l_2) $|M_3| < \sigma$ ove $M_3 = T_3(\sum^{(0)} q^*) \subset E_{23}$;

(l_3) $U(A, T_3) - \sum^{(0)} |u(q, T_3)| < \sigma$, $\sum_j \sum^{(j)} |u(q, T_3)| < \sigma$;

(l_4) $\sum^{(0)} |u(q, T_{n3}) - u(q, T_3)| < \sigma$ per ogni $n \in [n]_1$;

(l_5) $\sum_j |\sum^{(j)} u(q, T_{n3})| < \sigma$ per ogni $n \in [n]_1$.

Da (l_1), (l_2), (l_3) segue che il sistema D_0 di poligoni semplici q ha indice d rispetto a (T, A) e indici m_3, μ_3 rispetto a (T_3, A), che sono tutti minori di σ cioè $d < \sigma$, $m_3 < \sigma$, $\mu_3 < \sigma$ e anche $d < \delta$. Da (3) abbiamo

$$(4) \qquad \Big| \sum_{q \in D_0} f_3(\overline{p}) u(q, T_3) - \mathcal{F}(S) \Big| < \varepsilon_1 .$$

Per ogni $n \in [n]_1$ esiste poi un numero σ_n tale che per ogni sistema D_n^* di poligoni semplici π il cui indice d_n rispetto a (T_n, A) e i cui indici m_{n3}, μ_{n3} rispetto a (T_{n3}, A) sono tutti $< \sigma_n$, risulta

$$(5) \qquad \Big| \sum_{\pi \in D_n^*} f_3(p^*) u(\pi, T_{n3}) - \mathcal{F}(S_n) \Big| < \varepsilon_1 ,$$

ove $p^* = T(w^*)$ è l'immagine di un punto $w^* \in \pi$ per ogni $\pi \in D^*$. Come si è osservato nel n. **3** abbiamo che gli indici m, m_r sono sempre zero per superficie poliedriche. Di più dall'osservazione alla fine dello stesso numero e sempre per superficie poliedriche, abbiamo che gli indici d, μ di un qualsiasi sistema D' decrescono (o almeno non crescono) per ulteriore suddivisione dei poligoni di D'. Pertanto da un qualunque sistema D_n^* possiamo sempre ottenerne un altro, che diciamo ancora D_n^*, tale che ogni poligono $q \in D$ è la somma di poligoni $\pi \in D_n^*$. Supporremo di aver fissato per ogni n un sistema D_n^* siffatto. Dal n. 3 abbiamo

$$u(q, T_{n3}) = \sum_{\pi \subset q} u(\pi, T_{n3}) \qquad \text{per ogni} \quad q \in D\,. \tag{6}$$

Per ogni poligono $q \in D_0$ abbiamo ora

$$\Delta(q) \equiv \sum_{\pi \subset q} f_3(p^*)u(\pi, T_{n3}) - f_3(\bar{p})u(q, T_3) = \sum_{\pi \subset q} [f_3(p^*) - f_3(\bar{p})]u(\pi, T_{n3}) +$$
$$+ f_3(\bar{p})[\sum_{\pi \subset q} u(\pi, T_{n3}) - u(q, T_{n3})] + f_3(\bar{p})[u(q, T_{n3}) - u(q, T_3)],$$

$$|\Delta(q)| \leqslant \sum_{\pi \subset q} |f_3(p^*) - f_3(\bar{p})|\,|u(\pi, T_{n3})| + |f_3(\bar{p})|\,|\sum_{\pi \subset q} u(\pi, T_{n3}) - u(q, T_{n3})| +$$
$$+ |f_3(\bar{p})|\,|u(q, T_{n3}) - u(q, T_3)|\,.$$

Poichè

$$p^* = T_n(w^*) \in QK\,, \qquad \bar{p} = T(\bar{w}) \in QK\,, \qquad w^*\,,\ \bar{w} \in q\,,$$
$$\text{diam}\ T(q) < d < \delta\,, \qquad d_n < \delta\,,$$

risulta

$$|p^* - \bar{p}| \leqslant |T_n(w^*) - T(w^*)| + |T(w^*) - T(\bar{w})| < d_n + \delta < 2\delta\,,$$

e pertanto $|f_3(p^*) - f_3(\bar{p})| < \varepsilon_1$. D'altra parte $|f_3(\bar{p})| < M$ e in virtù della (6) abbiamo

$$|\Delta(q)| \leqslant \varepsilon_1 \sum_{\pi \subset q} |u(\pi, T_{n3})| + 0 + M\,|u(q, T_{n3}) - u(q, T_3)|\,, \tag{7}$$

per ogni $q \in D_0$.

Per ogni $j = 1, 2, 3, \ldots, N$, abbiamo ora, indicando con $p_0 \in Q$ un qualsiasi punto dell'insieme $T(\sum^{(j)} q) = \sum^{(j)} T(q)$,

$$\Delta_j \equiv \sum_{q \in D_j} [\sum_{\pi \subset q} f_3(p^*)u(\pi, T_{n3}) - f_3(\bar{p})u(q, T_3)] = \sum_{q \in D_j} \sum_{\pi \subset q} [f_3(p^*) - f_3(p_0)]u(\pi, T_{n3}) +$$
$$+ f_3(p_0) \sum_{q \in D_j} [\sum_{\pi \subset q} u(\pi, T_{n3}) - u(q, T_{n3})] + \sum_{q \in D_j} [f_3(p_0) - f_3(\bar{p})]u(q, T_3) +$$
$$+ f_3(p_0) \sum_{q \in D_j} u(q, T_{n3}) - f_3(p_0) \sum_{q \in D_j} u(q, T_3)\,,$$

e quindi

$$|\Delta_j| \leq \sum_{q\in D_j} \sum_{\pi\subset q} |f_3(p^*) - f_3(p_0)|\, |u(\pi, T_{n3})| + |f_3(p_0)| \sum_{q\in D_j} \Big| \sum_{\pi\subset q} u(\pi, T_{n3}) - u(q, T_{n3})\Big| +$$
$$+ \sum_{q\in D_j} |f_3(p_0) - f_3(\overline{p})|\, |u(q, T_3)| + |f_3(p_0)|\, \Big|\sum_{q\in D_j} u(q, T_{n3})\Big| + |f_3(p_0)| \sum_{q\in D_j} |u(q, T_3)|.$$

Come sopra abbiamo

$$p^* = T_n(w^*), \quad \overline{p} = T(\overline{w}), \quad w^*, \overline{w} \in \textstyle\sum^{(j)} q, \quad \overline{p}, p_0 \in T(\sum^{(j)} q),$$
$$\operatorname{diam} T(\textstyle\sum^{(j)} q) < \sigma \leq \delta, \quad d_n < \delta$$

e quindi

$$|p^* - p_0| \leq |T_n(w^*) - T(w^*)| + |T(w^*) - p_0| \leq d_n + \delta < 2\delta, \quad |\overline{p} - p_0| \leq \delta,$$

e pertanto $|f_3(p^*) - f_3(p_0)| < \varepsilon_1$, $|f_3(\overline{p}) - f_3(p_0)| < \varepsilon_1$. D'altra parte $|f_3(p_0)| < M$ e, in virtù anche della (6), abbiamo

$$(8) \qquad |\Delta_j| \leq \varepsilon_1 \sum_{q\in D_j} \sum_{\pi\subset q} |u(\pi, T_{n3})| + 0 + \varepsilon_1 \sum_{q\in D_j} |u(q, T_3)| +$$
$$+ M \Big| \sum_{q\in D_j} u(q, T_{n3}) \Big| + M \sum_{q\in D_j} |u(q, T_3)|, \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, N).$$

Si ha ora

$$\mathcal{F}(S_n) - \mathcal{F}(S) = [\mathcal{F}(S_n) - \sum_{\pi\in D_n^*} f_3(p^*) u(\pi, T_{n3})] + [-\mathcal{F}(S) + \textstyle\sum^{(0)} f_3(\overline{p}) u(q, T_3)] +$$
$$+ \textstyle\sum^{(0)} \Big[\sum_{\pi\subset q} f_3(p^*) u(\pi, T_{n3}) - f_3(\overline{p}) u(q, T_3)\Big] +$$
$$+ \textstyle\sum_j \sum^{(j)} \Big[\sum_{\pi\subset q} f_3(p^*) u(\pi, T_{n3}) - f_3(\overline{p}) u(q, T_3)\Big],$$

ove $\sum^{(0)}$, $\sum^{(j)}$ denotano somme estese a tutti i $q \in D_0$, $q \in D_j$, $(j = 1, 2, 3, \ldots, N)$, rispettivamente. In virtù delle (4) e (5) e delle definizioni di $\Delta(q)$ e Δ_j abbiamo anche

$$|\mathcal{F}(S_n) - \mathcal{F}(S)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \textstyle\sum^{(0)} |\Delta(q)| + \sum_j |\Delta_j|.$$

Dalle (7) e (8) si ha

$$|\mathcal{F}(S_n) - \mathcal{F}(S)| \leq 2\varepsilon_1 + \varepsilon_1 (\textstyle\sum^{(0)} + \sum_j \sum^{(j)}) \sum_{\pi\subset q} |u(\pi, T_{n3})| +$$
$$+ M \textstyle\sum^{(0)} |u(q, T_{n3}) - u(q, T_3)| +$$
$$+ (M + \varepsilon_1) \textstyle\sum_j \sum^{(j)} |u(q, T_3)| + M \sum_j |\sum^{(j)} u(q, T_{n3})| =$$
$$= 2\varepsilon_1 + s_1 + s_2 + s_3 + s_4,$$

e inoltre

$$s_1 = \varepsilon_1 \sum_{\pi \subset D_n^*} |u(\pi, T_{n3})| \leqslant \varepsilon_1 U(A, T_{n3}) \leqslant \varepsilon_1 U(A, T_n) = \varepsilon_1 L(A, T_n) =$$

$$= \varepsilon_1 L(S_n) = \varepsilon_1 a(S_n) < \varepsilon_1 M .$$

In virtù di (l_4) si ha poi $s_2 < M\sigma \leqslant M\varepsilon_1$; in virtù di (l_3) si ha $s_3 \leqslant (M+\varepsilon_1)\sigma \leqslant (M+\varepsilon_1)\varepsilon_1$, e finalmente, in virtù di (l_5), $s_4 < M\sigma \leqslant M\varepsilon_1$. Pertanto

$$|\mathcal{F}(S_n) - \mathcal{F}(S)| \leqslant 2\varepsilon_1 + M\varepsilon_1 + (M+\varepsilon_1)\varepsilon_1 + M\varepsilon_1 < 6M\varepsilon_1 = \varepsilon$$

per tutti gli $n \in [n]_1$. Poichè $\mathcal{F}(S_n) \to l'$ al tendere all'infinito di n con $n \in [n]_1$, abbiamo $|l' - \mathcal{F}(S)| < \varepsilon$ e quindi $l' = \mathcal{F}(S)$ essendo ε arbitrario. Nello stesso modo si prova che $l'' = \mathcal{F}(S)$ e quindi da $l' = l'' = \mathcal{F}(S)$ segue $\lim \mathcal{F}(S_n) = \mathcal{F}(S)$ al tendere all'infinito di n con $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Il Teorema A è così dimostrato.

7. – Volume $V(S)$ racchiuso da una superficie orientata e chiusa.

Sia K l'intero spazio E_3 e sia $f_1 = x$, $f_2 = y$, $f_3 = z$. Allora $\mathcal{S}_0$ è la classe di tutte le superficie continue, orientate e chiuse in E_3 di area finita secondo Lebesgue e gli integrali $(S)\int x t_1\, du\, dv$, $(S)\int y t_2\, du\, dv$, $(S)\int z t_3\, du\, dv$ sono definiti per ogni superficie $S \in \mathcal{S}_0$. Dimostriamo la seguente proposizione:

(7, 1). *Per ogni superficie* $S \in \mathcal{S}_0$ *si ha*

$$V(S) = (S)\int x t_1\, du\, dv = (S)\int y t_2\, du\, dv = (S)\int z t_3\, du\, dv .$$

Sia infatti $[S_n]$ una successione di superficie poliedriche chiuse S_n tali che $S_n \to S$, $a(S_n) \to L(S)$. Poichè la relazione scritta sopra è ben nota per le superficie poliedriche chiuse S_n, la stessa relazione vale anche per S come segue immediatamente da (2, 2) al tendere all'infinito di n.

Per ogni superficie $S \in \mathcal{S}_0$ denoteremo con $V(S)$ il comune valore $(\gtreqless 0)$ dei tre integrali scritti sopra (volume racchiuso dalla superficie orientata e chiusa S). In forza di (2, 3), ogni qualvolta l'area $L(S)$ della superficie $S = (T, A) \in \mathcal{S}_0$ è data dall'integrale classico

$$L(S) = (A)\int (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)^{\frac{1}{2}}\, du\, dv ,$$

allora $V(S)$ è dato dagli integrali di LEBESGUE

$$V(S) = (A) \int xJ_1 du\, dv = (A) \int yJ_2 du\, dv = (A) \int zJ_3 du\, dv\ .$$

(7, 2). *Per ogni superficie* $S \in \mathcal{S}_0$ *e per ogni successione* $[S_n]$ *di superficie* $S_n \in \mathcal{S}_0$ *con* $S_n \to S$, $L(S_n) < M$, *(M costante finita), risulta* $V(S_n) \to V(S)$.

È una conseguenza del Teorema A.

Dimostriamo infine la seguente proprietà isoperimetrica del volume $V(S)$.

(7, 3). *Per ogni superficie* $S \in \mathcal{S}_0$ *si ha*

$$V^2(S) \leqslant (36\pi)^{-1}L^3(S)\ .$$

Infatti se $[S_n]$ è una successione di superficie poliedriche chiuse S_n con $S_n \to S$, $a(S_n) \to L(S)$, allora la relazione $V^2(S_n) \leqslant (36\pi)^{-1}a^3(S_n)$ è ben nota. D'altra parte, da $L(S) < +\infty$, segue $L(S_n) < M$ per qualche M finito, e quindi, da (7, 2), si ha $V(S_n) \to V(S)$, mentre per ipotesi si ha $a(S_n) \to L(S)$. Pertanto al tendere di n all'infinito si trova la relazione cercata per S.

Osservazione 1. Le conclusioni del Teorema A e di (7, 2) possono cadere in difetto se la condizione $L(S_n) < M$ è soppressa, come mostra il seguente esempio. Sia S la superficie $S \in \mathcal{S}_0$ ridotta al punto $(0, 0, 0) = O$, sia $S_n \in \mathcal{S}_0$ la superficie sferica di centro O e raggio n^{-1} contata n^3 volte in senso positivo. Allora $S_n \to S$, $V(S) = 0$, $V(S_n) = 4\pi/3$, mentre $L(S_n) = 4\pi n$, $(n = 1, 2, 3, ...)$. Se S_n è la stessa superficie sferica contata n^3 volte in senso negativo allora $V(S_n) = -4\pi/3$, $(n = 1, 2, 3, ...)$. Tutto ciò mostra che $V(S)$ non è neppure semicontinuo nella classe di tutte le superficie $S \in \mathcal{S}_0$. [Cfr. per un analogo esempio E. J. MCSHANE, **1**].

Osservazione 2. Il volume, diciamo $V_R(S)$, definito da T. RADÓ [**1**] per superficie $S \in \mathcal{S}_0$, e il volume $V_Y(S)$ definito da J. W. T. YOUNGS [**1**] hanno proprietà alquanto diverse dalle proprietà del volume $V(S)$ definito sopra. Anzitutto si ha $V_R(S) \geqslant 0$, $V_Y(S) \geqslant 0$ per ogni superficie S, e $V_R(S)$, $V_Y(S)$ non dipendono dall'orientamento di S (la proprietà isoperimetrica (7.3) vale per entrambi i volumi $V_R(S)$, $V_Y(S)$) [T. RADÓ, **1**; J. W. T. YOUNGS, **1**]. Inoltre se S, $S_n \in \mathcal{S}_0$, $(n = 1, 2, 3, ...)$, allora: (1) $S_n \to S$ implica che $V_R(S) \leqslant \underline{\lim}\, V_R(S_n)$ [T. RADÓ, **1**]; (2) $S_n \to S$, $L(S_n) \to L(S)$, $|[S]| = 0$ implicano $V_R(S) = \lim V_R(S_n)$ [R. G. HELSEL, **1**]; (3) la conclusione in (2) può cadere in difetto se la condizione $|[S]| = 0$ è soppressa [R. G. HELSEL, **2**].

Bibliografia.

V. E. BONONCINI: 1. *Sugli integrali regolari del calcolo delle variazioni per superficie in forma parametrica*, Rivista Mat. Univ. Parma 3, 131-151 (1952).

J. CECCONI: 1. *Sul teorema di Gauss-Green*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **20**, 194-218 (1951).

2. *Sul teorema di Stokes*, Rivista Mat. Univ. Parma **3**, 233-264 (1952).

3. *Un complemento al teorema di Stokes*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **22**, 23-37 (1953).

4. *Sul teorema di Gauss-Green per una particolare classe di superficie*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **22**, 81-112 (1953).

L. CESARI: I. *Surface area*, Princeton Univ. Press (in corso di stampa).

1. *La nozione di integrale sopra una superficie in forma parametrica*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **13**, 77-117 (1944).

2. *Condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali sopra una superficie in forma parametrica*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **14**, 47-79 (1945).

3. *Condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali sopra una superficie in forma parametrica*, Ann. Mat. pura Appl. (4) **29**, 199-224 (1949).

4. *An existence theorem of calculus of variations for integrals on parametric surfaces*, Amer. J. Math. **74**, 265-295 (1952).

5. *Teoremi di approssimazione per superficie*, Rivista Mat. Univ. Parma **4**, 255-287 (1953).

J. M. DANSKIN: 1. *On the existence of minimizing surfaces in parametric double integral problems of the calculus of variations*, Rivista Mat. Univ. Parma **3**, 43-63 (1952).

R. G. HELSEL: 1. *Convergence in area and convergence in volume*, Duke Math. J. **16**, 111-118 (1949).

2. *Remark on the isoperimetric inequality*, Duke Math. J. **18**, 385-390.

E. J. MCSHANE: 1. *On the semicontinuity of integrals in the calculus of variations*, Ann. of Math. **33**, 460-484 (1932).

2. *Extension of range of functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 837-842 (1934).

T. RADÓ: 1. *The isoperimetric inequality and the Lebesgue definition of surface area*, Trans. Amer. Math. Soc. **61**, 530-555 (1947).

A. G. SIGALOV: 1. *Two-dimensional problems of the calculus of variations*, Uspehi Matem. Nauk (N.S.) **6**, no. 2 (42) 16-101 (1951). (In russo, cfr. Trans. no. 83 of the Amer. Math. Soc.).

J. W. T. YOUNGS: 1. *The isoperimetric inequality for closed surfaces*, Rivista Mat. Univ. Parma **1**, 189-195 (1950).