Rivista Mat. Univ. Parma 4, 213-218 (1953)

EMILIA TORCOLI (*)

Su la determinazione delle soluzioni omogenee di equazioni alle derivate parziali. (**)

Sia data un'equazione alle derivate parziali, del second'ordine, in una sola funzione incognita $z = z(x, y)$, cioè un'equazione della forma

$$(1) \qquad F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0 .$$

Per una tale equazione si possono cercare le soluzioni assumenti prefissati valori su certe linee del piano (x, y), e, nell'ipotesi di possibilità, si otterranno soluzioni di tipo speciale. Inversamente, si possono cercare le soluzioni della (1) di certi tipi prefissati. Una ricerca di quest'ultima specie è appunto l'oggetto della presente Nota. Precisamente qui *mi propongo la ricerca delle eventuali soluzioni* $z = z(x, y)$ *omogenee di un'equazione della forma* (1). Le considerazioni fatte si estendono poi agevolmente ad equazioni di altro ordine, ed è facile anche stabilire le varianti da apportarsi nel caso in cui la funzione incognita dipenda da più di due variabili indipendenti.

1. – Incomincio con il porre le eventuali soluzioni omogenee di (1) sotto la forma

$$(2) \qquad z = x^{\nu} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) ,$$

dove ν (grado di omogeneità) e $\varphi(t)$ sono i nuovi enti incogniti.

Posto, per brevità,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \varphi'(t) , \qquad \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = \varphi''(t) ,$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma (Italia).

(**) Ricevuto il 10-X-1952.

dalla (2) segue

$$
(3)\qquad\begin{cases}
\dfrac{\partial z}{\partial x}=\nu x^{\nu-1}\,\varphi\!\left(\dfrac{y}{x}\right)-x^{\nu-2}y\varphi'\!\left(\dfrac{y}{x}\right),\\[2mm]
\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^{\nu-1}\varphi'\!\left(\dfrac{y}{x}\right),\\[2mm]
\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\nu(\nu-1)x^{\nu-2}\varphi\!\left(\dfrac{y}{x}\right)-2(\nu-1)x^{\nu-3}y\varphi'\!\left(\dfrac{y}{x}\right)+x^{\nu-4}y^2\varphi''\!\left(\dfrac{y}{x}\right),\\[2mm]
\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=(\nu-1)x^{\nu-2}\varphi'\!\left(\dfrac{y}{x}\right)-x^{\nu-3}y\varphi''\!\left(\dfrac{y}{x}\right),\\[2mm]
\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^{\nu-2}\varphi''\!\left(\dfrac{y}{x}\right).
\end{cases}
$$

Con la sostituzione (2) la (1) diventa allora

$$
(1')\qquad F\!\left(x,\,y,\,x^{\nu}\varphi\!\left(\frac{y}{x}\right),\,\nu x^{\nu-1}\varphi'\!\left(\frac{y}{x}\right)-x^{\nu-2}y\varphi'\!\left(\frac{y}{x}\right),\,\ldots,\,x^{\nu-2}\varphi''\!\left(\frac{y}{x}\right)\right)=0\,,
$$

equazione che, posto $y/x=t$, è in generale della forma

$$
(1'')\qquad \overline{F}(\nu,\,x,\,t,\,\varphi(t),\,\varphi'(t),\,\varphi''(t))=0\,,
$$

è cioè un'equazione differenziale ordinaria, del second'ordine, nella funzione incognita $\varphi(t)$, contenente in generale i due parametri ν e x. Pertanto l'integrale generale dell'equazione (1″) sarà del tipo

$$
(4)\qquad \varphi(t)=\Phi(t,\,x,\,\nu,\,c_1,\,c_2)\,,
$$

ossia conterrà, in generale, oltre a due costanti arbitrarie c_1 e c_2, i due parametri x e ν.

Se ora nella funzione (4) alla variabile t si ritorna a sostituire la sua espressione y/x, si ottiene la funzione

$$
(5)\qquad \Phi\!\left(\frac{y}{x},\,x,\,\nu,\,c_1,\,c_2\right),
$$

la quale, affinchè l'equazione (1) possegga soluzioni omogenee, dovrà risultare omogenea di grado zero come funzione delle variabili x e y. Possono precisamente verificarsi i seguenti casi:

1° Caso. Qualunque sia ν la funzione (5) risulta omogenea di grado zero. Ciò accade sicuramente se nella (1″) non compare il parametro x. Allora *l'equazione alle derivate parziali* (1) *ha soluzioni omogenee di un qualunque grado* ν *di omogeneità e per ciascun grado vi è una doppia infinità di tali soluzioni*; *ed esse sono date da*

$$z = x^\nu \Phi\left(\frac{y}{x}, x, \nu, c_1, c_2\right).$$

2° Caso. Solo per particolari valori $\nu_1, \nu_2, \ldots$ di ν la funzione (5) risulta omogenea di grado zero. Ciò avviene certamente se per i detti valori di ν la (1″) non contiene il parametro x. Allora *l'equazione alle derivate parziali* (1) *ha soluzioni omogenee solo dei gradi* $\nu_1, \nu_2, \ldots$, *ed esse sono date da*

$$z = x^{\nu_1}\Phi\left(\frac{y}{x}, x, \nu_1, c_1, c_2\right),$$

$$z = x^{\nu_2}\Phi\left(\frac{y}{x}, x, \nu_2, c_1, c_2\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

3° Caso. Per nessun valore di ν la funzione (5) risulta omogenea di grado zero. Allora *l'equazione alle derivate parziali* (1) *non ha soluzioni omogenee.*

2. – *Esempio del* 1° *caso.*

Si abbia l'equazione (parabolica)

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - az = 0, \tag{6}$$

dove a è una data costante. Mediante la (2) e le (3), la (6) diventa

$$x^\nu\{\varphi''(t) - (a-\nu)\varphi(t)\} = 0,$$

ossia

$$\varphi''(t) - (a-\nu)\varphi(t) = 0.$$

Questa equazione per $\nu \neq a$ ha la soluzione generale

$$\varphi(t) = c_1\, e^{\sqrt{a-\nu}\, t} + c_2\, e^{-\sqrt{a-\nu}\, t}, \qquad (c_1, c_2 \text{ costanti arbitrarie});$$

per $\nu = a$ la soluzione generale è invece

$$\varphi(t) = c_1 + c_2 t, \qquad (c_1, c_2 \text{ costanti arbitrarie}).$$

Se in queste soluzioni si muta t in y/x, si ottengono funzioni omogenee di grado zero. Si conclude quindi che la data equazione alle derivate parziali (6) ha soluzioni omogenee di un qualunque grado ν di omogeneità, ed esse sono date da

$$z = c_1 x^\nu e^{\sqrt{a-\nu}\, y/x} + c_2 x^\nu e^{-\sqrt{a-\nu}\, y/x}, \qquad \text{se è} \quad \nu \neq a,$$

$$z = c_1 x^\nu + c_2 x^{\nu-1} y, \qquad \text{se è} \quad \nu = a.$$

3. - *Esempi del 2° caso.*

1°) Si abbia l'equazione

$$y^2 z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y \frac{\partial z}{\partial y}\left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right) + x^3 z \left(3x \frac{\partial z}{\partial x} + 3y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z\right) = 0. \tag{7}$$

Quest'equazione mediante la (2) e le (3) diventa

$$\varphi(t)\left\{ t^2\varphi''(t) + \nu t\varphi'(t) + (3\nu - 2)x^3\varphi(t)\right\} = 0,$$

ossia

$$t^2\varphi''(t) + \nu t\varphi'(t) + (3\nu - 2)x^3\varphi(t) = 0,$$

il cui integrale generale, posto per brevità

$$\mu(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(1-\nu)^2 - 4(3\nu - 2)x^3},$$

è dato da

$$\varphi(t) = t^{(1-\nu)/2}(c_1 t^{\mu(x)} + c_2 t^{-\mu(x)}), \qquad (c_1, c_2 \text{ costanti arbitrarie}),$$

Sostituendo qui alla t il rapporto y/x si hanno delle funzioni, di x e y, che risultano omogenee di grado zero per i valori ν che rendono $\mu(x)$ indipendente da x, e si vede subito che vi è solo $\nu = 2/3$. Si conclude perciò che la (7) ha soluzioni omogenee solo di grado di omogeneità $\nu = 2/3$, ed esse sono date tutte da

$$z = c_1 \sqrt[3]{xy} + c_2 \sqrt[3]{x^2}.$$

2°) Si abbia l'equazione (di 1° ordine)

$$4yz^2 \frac{\partial z}{\partial y} + z^3 + y^2\left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \tag{8}$$

Mediante la (2) e le (3) l'equazione (8) diventa

$$x^{\nu+2}\,\varphi(t)\left\{4x^{2(\nu-1)}t\varphi(t)\varphi'(t) + x^{2(\nu-1)}\varphi^2(t) + \nu t^2\right\} = 0\,,$$

alla quale si soddisfa sia ponendo $\varphi(t) \equiv 0$, sia ponendo

$$4x^{2(\nu-1)}t\varphi(t)\varphi'(t) + x^{2(\nu-1)}\varphi^2(t) + \nu t^2 = 0\,.$$

Quest'ultima equazione, del prim'ordine e lineare nell'incognita $\varphi^2(t)$, ha l'integrale generale

$$\varphi^2(t) = -\frac{1}{5}\,\nu x^{-2(\nu-1)}\,t^2 + ct^{-1/2}\,, \quad (c \text{ costante arbitraria}).$$

Se qui alla t si ritorna a sostituire il rapporto y/x si ottiene una funzione che è omogenea, rispetto ad x e y, di grado zero solo se è $\nu = 0$ oppure $\nu = +1$, e si ha precisamente:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = c\left(\frac{y}{x}\right)^{-1/4} \qquad \text{per } \nu = 0\,,$$

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \left\{\frac{-1}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + c\left(\frac{y}{x}\right)^{-1/2}\right\}^{1/2} \qquad \text{per } \nu = +1\,.$$

Si noti che dal primo tipo di queste funzioni, per $c = 0$, si ottiene proprio $\varphi(t) \equiv 0$. Si conclude quindi che le soluzioni omogenee della considerata equazione (8) sono tutte e sole le seguenti:

$$z(x, y) = c\left(\frac{y}{x}\right)^{-1/4}, \qquad z(x, y) = x\left\{\frac{-1}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + c\left(\frac{y}{x}\right)^{-1/2}\right\}^{1/2},$$

dove c è una costante arbitraria.

4. – *Esempio del 3° caso.*

Si abbia l'equazione

$$\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} + x^2 - 1 = 0\,. \tag{9}$$

Mediante la (2) e le (3) l'equazione (9) diventa

$$(t - x)x^{\nu-1}\varphi'(t) - \nu x^{\nu-1}\varphi(t) + 1 - x^2 = 0\,,$$

il cui integrale generale è

$$\varphi(t) = \frac{1 - x^2}{\nu x^{\nu-1}} + c(t - x)^\nu .$$

Sostituendo qui a t il rapporto y/x si ha

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1 - x^2}{\nu x^{\nu-1}} + c\left(\frac{y}{x} - x\right)^\nu,$$

che rispetto ad x e y non è omogenea per alcun valore di ν. L'equazione (9) non ha quindi soluzioni omogenee.