Rivista Mat. Univ. Parma 4, 123-132 (1953)

BIANCA MANFREDI (*)

Sopra un problema non lineare di propagazione del calore per un mezzo dotato di simmetria sferica. (**)

I. – Introduzione.

In un recente lavoro [6] (¹) ho risolto un problema non lineare, unidimensionale, relativo allo scambio di calore fra un mezzo indefinito omogeneo e termicamente isotropo, occupante con simmetria assiale lo spazio esterno ad una superficie cilindrica di raggio a, avente per base l'asse di simmetria, e un fluido che circola entro la cavità ad una temperatura costante, così elevata da non potersi ritenere il coefficiente di conducibilità costante, ma funzione della temperatura superficiale del solido. Tale lavoro ebbe origine da una Nota dei Sigg. W. R. MANN e F. WOLF [7] dedicata all'analogo problema relativo ad un semispazio occupato da un mezzo omogeneo e termicamente isotropo in contatto, attraverso il piano origine, con un gas mantenuto a temperatura costante, sufficientemente elevata.

A completare lo studio di questi problemi non lineari unidimensionali restava da considerare, dopo i casi piano e cilindrico, il caso sferico. È scopo appunto di questa Nota la determinazione, istante per istante, della temperatura in ogni punto di un mezzo occupante con simmetria sferica lo spazio esterno ad una superficie sferica, di raggio a e centro nel centro di simmetria, contenente un gas a temperatura costante sufficientemente elevata. Anche qui con l'impiego della trasformata di LAPLACE, il problema viene ricondotto alla risoluzione di un'equazione integrale non lineare di VOLTERRA di seconda specie, nell'incognita temperatura superficiale.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma (Italia).

(**) Lavoro ricevuto il 12-XII-1952.

(¹) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia al termine del lavoro.

II. – Legge di distribuzione della temperatura nel solido in funzione della temperatura superficiale.

1. – Indichiamo con S lo spazio indefinito esterno alla superficie sferica di raggio $r = a$ e centro O; entro la cavità sferica circoli un gas a temperatura costante, che precisamente potremo supporre uguale ad *uno* senza perdere in generalità.

Sia S occupato, con simmetria sferica rispetto ad O, da un mezzo omogeneo termicamente isotropo, inizialmente a temperatura nulla, e la temperatura

$$U = U(a, r, t)\,,$$

in un punto di S, sia dipendente dal posto solo per tramite della distanza r dal punto considerato da O.

Con le notazioni del precedente lavoro, il problema di trovare la distribuzione della temperatura in ogni punto di S e in ogni istante t, porta a risolvere il sistema delle relazioni seguenti:

$$U_t = U_{rr} + \frac{2}{r} U_r\,, \qquad (r > a,\ t > 0), \tag{1}$$

$$[U]_{t=0} = 0\,, \qquad (r \geqslant a), \tag{2}$$

$$-[U]_{r=a} = G(U(a, a, t)), \qquad (t > 0), \tag{3}$$

$$0 < U < 1\,, \qquad (r \geqslant a,\ t > 0), \tag{4}$$

dove

$$U\,, \quad U_r\,, \quad U_{rr}\,, \quad U_t$$

sono funzioni continue, delle loro variabili, rispettivamente per

$$r \geqslant a,\ \ t \geqslant 0; \quad r \geqslant a,\ \ t > 0; \quad r > a,\ \ t > 0; \quad r > a,\ \ t > 0\,,$$

e dove la funzione

$$G(U(a, a, t)) = [(1 - U)f(U)]_{r=a} = (1 - U(a, a, t))f(U(a, a, t))\,,$$

caratteristica per questi problemi, sia, come nei casi precedentemente illustrati, funzione continua decrescente di $U(a, a, t)$ e nulla per $U(a, a, t) = 1$.

2. – Applichiamo la trasformata di LAPLACE al sistema delle relazioni (1), (2), (3), (4), sistema che indicherò brevemente con [(1) ... (4)]. Posto

$$u = u(a, r, p) = \mathfrak{L} U = \int_0^{+\infty} e^{-pt} U \, dt ,$$

$$g = g(a, a, p) = \mathfrak{L}\, G(U(a, a, t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} G(U(a, a, t)) \, dt ,$$

con p reale > 0, tale sistema si trasforma nel sistema delle relazioni seguenti:

$$u_{rr} + \frac{2}{r} u_r - pu = 0 , \tag{1'}$$

$$-(u_r)_{r=a} = g(p) , \tag{2'}$$

$$0 < u < \frac{1}{p} . \tag{4'}$$

L'integrale generale della (1′) è

$$u = \frac{1}{r}(Ae^{rs} + Be^{-rs}) , \qquad (s = \sqrt{p}) , \tag{5}$$

con A e B costanti rispetto ad r e funzioni del parametro p.

La (4′) richiede A identicamente nulla, mentre la (2′) assegna per B l'espressione

$$B = \frac{a^2 e^{as}}{1 + as} g .$$

La soluzione del sistema [(1′) ... (4′)] è pertanto

$$u = g \frac{a}{r} \frac{e^{-(r-a)s}}{(1/a) + s} . \tag{6}$$

Ora la funzione

$$\frac{a}{r} \frac{e^{-(r-a)s}}{(1/a) + s}$$

è antitrasformabile ([1], App. V, n. 12; [2], pag. 354, n. 31; [5], App. I, n. 51) e precisamente si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{r}\frac{e^{-(r-a)s}}{(1/a)+s}\right\}=\frac{a}{r}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-(r-a)^2/(4t)}-\frac{1}{a}e^{[(r-a)/a]+t/a^2}\operatorname{erfc}\left(\frac{r-a}{2\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{a}\right)\right\}, \tag{7}$$

con

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{r-a}{2\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{a}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{r-a}{2\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{a}}^{+\infty}e^{-\xi^2}d\xi .$$

Posto per semplicità

$$F(a,r,t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{r}\frac{e^{-(r-a)s}}{(1/a)+s}\right\}, \tag{8}$$

risulta $F(a, r, t)$ limitata e precisamente minore di uno, essendo positiva ed essendo il primo termine del secondo membro di (7) minore di uno.

Invertendo allora la (6) mediante il teorema di BOREL ([5], pag. 33; [8], pag. 224) si ottiene la soluzione del sistema [(1) ... (4)] sotto forma di prodotto integrale:

$$U=G(U(a,a,t))*F(a,r,t). \tag{9}$$

Questa equazione dà la legge di distribuzione della temperatura in ogni punto del solido in funzione della sua temperatura superficiale $U(a, a, t)$.

III. – Riduzione del problema ad un'equazione integrale non lineare.

1. – La funzione U è per ipotesi continua per $r \geqslant a$ e la funzione $G(U(a, a, t))$ è indipendente da r; passando allora al limite per r che tende ad a in ambo i membri di (9), si ottiene

$$U(a,a,t)=G(U(a,a,t))*\lim_{r\to a}F(a,r,t).$$

Essendo $F(a, r, t)$ continua rispetto ad r, $(t>0)$, si ha pure

$$U(a,a,t)=G(U(a,a,t))*F(a,a,t), \tag{10}$$

con ([5], App. I, n. 58)

$$F(a,a,t)=\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(1/a)+s}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-\frac{1}{a}e^{t/a^2}\operatorname{erfc}\frac{\sqrt{t}}{a}, \tag{11}$$

dove è

$$\operatorname{erfc} \frac{\sqrt{t}}{a} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{t}/a}^{+\infty} e^{-\xi^2} \, d\xi \, .$$

Ora, la funzione $G((U(a, a, t))$ è per ipotesi una funzione positiva, decrescente; $F(a, a, t)$, come risulta dalla (11), è una funzione limitata per ogni valore finito di t non nullo; la (10) risulta allora un'equazione integrale di VOLTERRA di seconda specie, singolare, non lineare nell'incognita temperatura superficiale ([9], pag. 89-91) e rappresenta la relazione fondamentale cui deve soddisfare la temperatura superficiale del corpo.

2. – Si può allora provare anche in questo caso ([6], pag. 390) il seguente

Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $y(t)$ possa rappresentare la funzione temperatura superficiale per il nostro problema, è che $y(t)$ soddisfi all'equazione integrale non lineare di seconda specie di Volterra*

$$y(t) = G(y(t)) * F(a, a, t) \, , \tag{12}$$

con $F(a, a, t)$ data dalla (11), *e che sia*

$$0 < y(t) < 1 \, . \tag{13}$$

La *necessarietà* della detta condizione discende immediatamente osservando che se U, data dalla (9), è soluzione del problema [(1) ... (4)], devono necessariamente essere soddisfatte la (10) e la (4), le quali coincidono rispettivamente con la (12) e la (13) quando in esse si legga $y(t)$ al posto di $U(a, a, t)$.

Per provare che la detta condizione è *sufficiente*, ammettiamo per ipotesi che esista una funzione $y(t)$ che soddisfi alle (12) e (13) e dimostriamo che la funzione definita dalla (9), quando in essa si ponga $U(a, a, t) = y(t)$ cioè

$$U = G(y(t)) * F(a, r, t), \tag{14}$$

con $F(a, r, t)$ data dalla (8), rappresenta la soluzione del sistema [(1) ... (4)].

Infatti per la (6) si ha

$$\lim_{p \to +\infty} \mathfrak{L}\, U = \lim_{p \to +\infty} u = 0 \, .$$

La U data dalla (14) soddisfa allora alla nota relazione ([2], pag. 255)

$$\lim_{t \to 0} U = \lim_{p \to +\infty} (pu). \tag{15}$$

Ma è

$$\lim_{p\to+\infty} (pu) = \lim_{p\to+\infty} \left\{ g \frac{a}{r} \frac{e^{-(r-a)s}p}{(1/a)+s} \right\}, \qquad (s=\sqrt{p})\ ;$$

essendo poi ([6], pag. 391) $\lim_{p\to+\infty} g = 0$, si conclude

$$\lim_{p\to+\infty} (pu) = 0\ ,$$

e quindi, per la (15),

$$\lim_{t\to 0} U = 0\ , \tag{16}$$

come vuole la (2).

Osserviamo che la funzione U data dalla (14) soddisfa alle ipotesi per cui vale il teorema fondamentale della trasformata di LAPLACE ([4], pag. 152; [5], pag. 26) che, per la (16), si traduce nel modo seguente

$$\mathfrak{L}U_t = pu\ .$$

Segue

$$U_t = \mathfrak{L}^{-1}(pu) = \mathfrak{L}^{-1}\left(g \frac{a}{r} \frac{e^{-(r-a)s}p}{(1/a)+s} \right); \tag{17}$$

ora, essendo la funzione

$$\frac{a}{r} \frac{e^{-(r-a)s}p}{(1/a)+s}\,,$$

antitrasformabile ([5], App. I, n. 55), si ottiene ([5], pag. 33; [8], pag. 224)

$$U_t = G * \mathfrak{L}^{-1}\left\{ \frac{r}{a} \frac{e^{-(r-a)s}p}{(1/a)+s} \right\}. \tag{18}$$

D'altra parte, derivando ambo i membri della (14) rispetto ad r, si ha

$$U_r = G * F_r\,, \qquad U_{rr} = G * F_{rr}\,, \tag{19}$$

dove

$$F_r = \mathfrak{L}^{-1}\left\{ -\frac{a}{r} \frac{e^{-(r-a)s}}{(1/a)+s} \left(s + \frac{1}{r} \right) \right\},$$

$$F_{rr} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{ \frac{a}{r} \frac{e^{-(r-a)s}}{(1/a)+s} \left(p + \frac{2}{r^2} + \frac{2s}{r} \right) \right\}.$$

Si ha quindi

$$U_{rr} + \frac{2}{r} U_r = G * \left(F_{rr} + \frac{2}{r} F_r\right) = G * \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{a}{r} \frac{e^{-(r-a)sp}}{(1/a) + s} \right\},$$

dove l'ultimo membro coincide col secondo membro della (18), rimanendo così verificata anche la (1).

Dalla prima delle (19) discende

$$\lim_{r \to a} U_r = G * \lim_{r \to a} F_r = -G * \mathfrak{L}^{-1} 1 ,$$

e quindi ([6], pag. 392)

$$\lim_{r \to a} U_r = -G,$$

come vuole la (3).

Infine essendo G per ipotesi limitata ed essendo, per ogni $r \geqslant a$ e per ogni $t > 0$,

$$F(a, r, t) \leqslant F(a, a, t) , \tag{20}$$

come si constata immediatamente confrontando le loro espressioni, si ha

$$U(a, r, t) = G * F(a, r, t) \leqslant G * F(a, a, t) ,$$

e, per la (13),

$$0 < U(a, r, t) < 1 .$$

Rimane così verificata anche la (4).

3. – Seguendo la via usata dai Sigg. W. R. MANN e F. WOLF per l'analogo problema relativo al semispazio, è facile anche per il nostro caso mostrare che l'equazione (12) con la condizione (13) ammette in ogni intervallo chiuso $(0, T)$, con T grande a piacere, almeno una soluzione che risulta *unica* se la funzione caratteristica $G(y)$ è lipschitziana d'ordine uno nell'intervallo chiuso $(0, 1)$. La ricercata soluzione, che può ottenersi mediante il classico metodo delle approssimazioni successive, è in particolare analitica crescente se la funzione $G(y)$ è analitica in $(0, 1)$ ([7], pag. 179).

Per brevità ci limiteremo a mostrare che vale, per esempio, anche qui il risultato seguente, fondamentale per la dimostrazione del teorema di esistenza.

Per ogni t variabile in un intervallo chiuso $(0, T)$, *sia definita la trasformazione*

$$J(y(t)) = \bar{G}(y(t)) * F(a, a, t) , \tag{21}$$

con

$$\bar{G}(y(t)) \equiv \begin{cases} G(y(t)) & per \quad y(t) \leqslant 1 , \\ 0 & per \quad y(t) > 1 , \end{cases}$$

ed $F(a, a, t)$ *data dalla* (11), *che può scriversi*

$$F(a, a, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} h(a, t) , \tag{22}$$

dove

$$h(a, t) = 1 - \frac{\sqrt{\pi t}}{a} e^{t/a^2} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{t}}{a} . \tag{23}$$

Tale trasformazione muta in se stesso uno spazio Y *di funzioni non negative limitate, equicontinue, soddisfacenti cioè la disuguaglianza*

$$|y(t_2) - y(t_1)| < \frac{4G_0}{\pi^{1/2}} (t_2 - t_1)^{1/2} , \qquad (0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T) , \tag{24}$$

dove è

$$G_0 = G(y_0) = G(0) .$$

Infatti per la funzione trasformata $\bar{y}$, quando sia

$$0 = y_0(t) < y(t) ,$$

si ha

$$J(0) = J(y_0) > J(y) = \bar{y} ,$$

essendo la $G(y)$ e quindi la $\bar{G}(y)$ una funzione decrescente di y; ne consegue che la funzione trasformata $\bar{y}$ è non negativa e limitata superiormente da $J(0)$.

Inoltre, per $t_2 > t_1$ si ha, tenuto conto di (23),

$$|\bar{y}(t_2) - \bar{y}(t_1)| = |\{\bar{G}((y(t)) * F(a, a, t)\}_{t=t_2} - \{\bar{G}(y(t)) * F(a, a, t)\}_{t=t_1}| <$$

$$< \frac{G_0}{\pi^{1/2}} |\{1 * (t^{-1/2} h(a, t))\}_{t=t_2} - \{1 * (t^{-1/2} h(a, t))\}_{t=t_1}| ,$$

od anche ([3], pag. 294)

$$(25) \qquad |\bar{y}(t_2) - \bar{y}(t_1)| < \frac{G_0}{\pi^{1/2}} \left| h(a, t_2 - \tau_2)\{1 * t^{-1/2}\}_{t=t_2} - h(a, t_1 - \tau_1)\{1 * t^{-1/2}\}_{t=t_1} \right|$$

con

$$0 < \tau_2 < t_2, \qquad 0 < \tau_1 < t_1.$$

Prima di procedere, mostriamo che la funzione $h(a, t)$, positiva e minore di uno, è decrescente. Dalla (23), infatti, essendo anche ([1], App. II)

$$h(a, t) = \frac{\sqrt{t}}{a} e^{t/a^2} \int_{\sqrt{t}/a}^{+\infty} e^{-\xi^2} \frac{1}{\xi^2} \, d\xi,$$

si ha, applicando il teorema della media per intervalli infiniti ([3], pag. 293),

$$(26) \qquad h(a, t) = \frac{\sqrt{t}}{a} e^{t/a^2} e^{-t/a^2} \int_{\sqrt{t}/a}^{c} \frac{1}{\xi^2} \, d\xi = 1 - \frac{\sqrt{t}}{ac}$$

con

$$\frac{\sqrt{t}}{a} < c < +\infty.$$

La (26) mostra in modo evidente la decrescenza di $h(a, t)$.

Da quanto precede, essendo

$$t_1 - \tau_1 < t_2 - \tau_2,$$

si ha

$$h(a, t_2 - \tau_2) < h(a, t_1 - \tau_1),$$

e quindi, avendosi, per ogni $t > 0$,

$$h(a, t) < 1,$$

si ottiene evidentemente

$$\left| h(a, t_2 - \tau_2)\{1 * t^{-1/2}\}_{t=t_2} - h(a, t_1 - \tau_1)\{1 * t^{-1/2}\}_{t=t_1} \right| <$$
$$< \left| \{1 * t^{-1/2}\}_{t=t_2} - \{1 * t^{-1/2}\}_{t=t_1} \right|.$$

Sostituendo nella (25) si trova, con convenienti trasformazioni ([6], pag. 395),

$$|\overline{y}(t_2) - \overline{y}(t_1)| < \frac{4\,G_0}{\pi^{1/2}}(t_2 - t_1)^{1/2},$$

che, coincidendo con la (24), prova quanto si voleva dimostrare.

Bibliografia.

[1] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids,* Clarendon Press, Oxford 1948.

[2] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Operational methods in applied mathematics,* University Press, Oxford 1949.

[3] U. Dini, *Lezioni di Analisi infinitesimale,* Vol. II, Parte I, Nistri, Pisa 1909.

[4] G. Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation,* Dover Publication, New York 1943.

[5] A. Ghizzetti, *Calcolo simbolico,* N. Zanichelli, Bologna 1943.

[6] B. Manfredi, *Sopra un problema cilindrico non lineare di propagazione del calore,* Rivista Mat. Univ. Parma 3, 383-396 (1952).

[7] W. R. Mann and F. Wolf, *Heat transfer between solids and gasses under nonlinear boundary conditions,* Quart. Appl. Math. 9, 163-184 (1951).

[8] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale,* Parte II, N. Zanichelli, Bologna 1941.

[9] V. Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles,* Gauthier-Villars, Paris 1913.