Rivista Mat. Univ. Parma 4, 105-122 (1953)

GIUSEPPE PALAMÀ (*)

Relazioni integrali tra le funzioni d'Hermite e di Laguerre di prima e seconda specie, e su dei polinomi ad esse associati. (**)

Il presente lavoro è diviso in due paragrafi: nel primo di essi si dànno delle relazioni integrali tra le funzioni di HERMITE e di LAGUERRE, di 1ª e 2ª specie; nel secondo si studiano i polinomi $P_n^{(\alpha)}(x)$ associati (1) alle funzioni di LAGUERRE.

§ 1. - Relazioni integrali tra le funzioni di Laguerre e di Hermite di 1ª e 2ª specie.

1. - Abbiamo dato altrove (2) la seguente formula relativa alle funzioni di LAGUERRE di 2ª specie:

$$l_n^{(\alpha)}(x) = -\frac{\sqrt{2\pi}\, x^{-\alpha}}{2\Gamma(-\alpha-n)n!\,\mathrm{sen}\,\pi\alpha}\int_0^1 \frac{(1-u)^n e^{ux}}{u^{\alpha+n+1}}\,du\,, \quad -1<n<-\alpha\,,$$

che può scriversi

$$l_n^{(\alpha)} = \frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+n+1)}{\sqrt{2\pi}\,n!\,x^{\alpha}}\int_0^1 \frac{(1-u)^n e^{ux}}{u^{\alpha+n+1}}\,du, \quad -1<n<-\alpha. \tag{1$_1$}$$

(*) Indirizzo: Via Sepolcri Messapici 20, Lecce (Italia).

(**) Ricevuto il 4-V-1953.

(1) Cfr. G. PALAMÀ, *Sul Wronskiano delle funzioni di Laguerre di 1ª e 2ª specie e su dei polinomi ad esse associati*, d'imminente pubblicazione in Boll. Un. Mat. Ital..

(2) Cfr. G. PALAMÀ, *Funzioni di Laguerre di 2ª specie*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 5, 72-77 (1950). In questo lavoro e nell'altro cit. in (1) si dà un contributo allo studio di tali funzioni di LAGUERRE. Cfr. inoltre: F. G. TRICOMI, *La seconda soluzione dell'equazione di Laguerre*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 7, 1-4 (1952).

Ora se nella (I_1) poniamo $u = t/x$, abbiamo

$$l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha + n + 1)}{\sqrt{2\pi}\, n!} \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{t^{\alpha+n+1}}\, dt, \quad -1 < n < -\alpha .$$

Come subito si verifica si ha analogamente

$$l_n^{(\alpha)}(x^2) = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha + n + 1)}{\sqrt{2\pi}\, n!\, x^\alpha} \int_0^x \frac{(x-t)^n e^{xt}}{t^{\alpha+n+1}}\, dt, \quad -1 < n < -\alpha ,$$

dalla quale, se vi poniamo $\alpha = -1/2$ e quindi $n = 0$, si trae

$$l_n^{(-1/2)}(x^2) = \sqrt{\frac{x}{2}} \int_0^x \frac{e^{xt}}{\sqrt{t}}\, dt ,$$

e pertanto anche

$$h_0(x\sqrt{2}) = \sqrt{\frac{x}{2}} \int_0^x \frac{e^{xt}}{\sqrt{t}}\, dt ,$$

ove $h_0(x)$ è la funzione d'HERMITE di 2ª specie (³) $h_n(x)$ corrispondente ad $n = 0$. Notiamo che si ha

$$h_n'(x) = n h_{n-1}(x) , \qquad n > 0 .$$

Nell'ultima si è scritto $h_n'(x)$ invece di $\dfrac{d\, h_n(x)}{dx}$, analoghi simboli si useranno in seguito per le derivate prime e seconde di altre funzioni.

2. – Analoga alla formula di KOGBETLIANTZ (⁴)

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1) x^{-\alpha}}{\Gamma(\beta + n + 1)\Gamma(\alpha - \beta)} \int_0^x (x-u)^{\alpha-\beta-1} u^\beta L_n^{(\beta)}(u)\, du , \quad -1 < \beta < \alpha ,$$

(³) Cfr. P. APPELL e J. KAMPÉ DE FÉRIET, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite*, Paris 1926, cfr. pp. 357-362.

(⁴) Cfr. E. G. KOGBETLIANTZ, *Sur la sommabilité des séries d'Hermite*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **49**, 137-221 (1932).

ove $L_n^{(\alpha)}(x)$ è il polinomio di LAGUERRE, è la seguente

$$(1_2)\qquad L_n^{(\alpha)}(x^2) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)x^{-\alpha}}{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^x (x-u)^{\alpha-\beta-1}u^\beta L_n^{(\beta)}(xu)\,du, \quad -1<\beta<\alpha,$$

che, per $\alpha = -1/2$, $-1<\beta<-1/2$, dà, se $H_n(x)$ è il polinomio d'HERMITE soddisfacente alla

$$H_n'(x) = nH_{n-1}(x)\,,$$

$$(2_2)\qquad 2^n H_{2n}(x\sqrt{2}) = \frac{(-1)^n(2n)!\sqrt{\pi x}}{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\beta\right)}\int_0^x \frac{u^\beta L_n^{(\beta)}(xu)}{(x-u)^{\beta+3/2}}\,du\,, \quad -1<\beta<-\frac{1}{2}\,.$$

Invece, per $\alpha = 1/2$ dalla (1_2) si ha

$$(3_2)\qquad 2^n\sqrt{2}H_{2n+1}(x\sqrt{2}) = \frac{(-1)^n(2n+1)!\sqrt{\pi x}}{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}\int_0^x \frac{u^\beta L_n^{(\beta)}(xu)\,du}{(x-u)^{\beta+1/2}}\,, \quad -1<\beta<\frac{1}{2}\,,$$

da cui, facendo $\beta = 0$, si trae

$$(4_2)\qquad 2^n\sqrt{2}H_{2n+1}(x\sqrt{2}) = \frac{(-1)^n}{n!}\,2x(2n+1)!\sqrt{x}\int_0^x \frac{L_n(xu)}{\sqrt{x-u}}\,du\,.$$

Nelle (1_2), (2_2), (3_2), (4_2) è utile il cambiamento di variabile definito dalla

$$(5_2)\qquad u = x\cos^2\varphi\,.$$

Così, ad esempio, dalla (4_2) segue

$$2^n\sqrt{2}H_{2n+1}(x\sqrt{2}) = \frac{(-1)^n}{n!}\,2x(2n+1)!\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\, L_n(x^2\cos^2\varphi)\,d\varphi\,.$$

3. – Facilmente si stabiliscono delle relazioni integrali tra una classe speciale di polinomi di LAGUERRE e quelli d'HERMITE.

Dimostriamo innanzi tutto che è

$$(1_3)\qquad 4x^2\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}2\varphi\cos^2\varphi\, L_{n-1}^{(1)}(x^2\operatorname{sen}^2 2\varphi)\,d\varphi = 1+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!!}H_{2n}(x\sqrt{2})\,.$$

Difatti

$$\int_0^x L_n\big(t(x-t)\big)\,dt = \sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m n!}{[m!]^2(n-m)!}\int_0^x t^m(x-t)^m\,dt\,,$$

cioè

$$\int_0^x L_n\big(t(x-t)\big)\,dt = \sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m n!\,x^{2m+1}}{(n-m)!\,(2m+1)!}\,,$$

e da questa, derivandola rispetto ad x, si ha

$$(2_3)\qquad \int_0^x tL_{n-1}^{(1)}\big(t(x-t)\big)\,dt = 1+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!!}H_{2n}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

La (2_3), ponendo $t = x\cos^2\varphi$ e mutando x in $2x$, dà luogo alla (1_3).

Ora si noti che, se nella (2_3) si pone $x - t = z$ e si cambia poi z in t, abbiamo

$$\int_0^x (x-t)L_{n-1}^{(1)}\big(t(x-t)\big)\,dt = 1+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!!}H_{2n}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

e questa, sommata con la (2_3), dà

$$x\int_0^x L_{n-1}^{(1)}\big(t(x-t)\big)\,dt = 2+\frac{(-1)^{n+1}2}{(2n-1)!!}H_{2n}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

che, con il solito cambiamento di variabile e mutando x in $2x$, diventa

$$2x^2\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}2\varphi L_{n-1}^{(1)}(x^2\operatorname{sen}^2 2\varphi)\,d\varphi = 1+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!!}H_{2n}(x\sqrt{2})\,.$$

In modo analogo si ha

$$\int_0^x L_n\big(t(x-t)\big)\,dt = \frac{(-1)^n\sqrt{2}}{(2n+1)!!}H_{2n+1}(x/\sqrt{2})\,,$$

che può anche scriversi

$$2x\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2\varphi L_n(x^2 \operatorname{sen}^2 2\varphi)\, d\varphi = \frac{(-1)^n\sqrt{2}}{(2n+1)!!} H_{2n+1}(x\sqrt{2}) .$$

4. – È facile infine dimostrare la seguente formula

$$(1_4)\qquad L_n^{(\alpha)}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\operatorname{sen}(\pi\alpha)x^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha-\beta)\operatorname{sen}(\pi\beta)}\int_0^x (x-u)^{\alpha-\beta-1}u^{-\alpha-1}L_n^{(\beta)}\left(\frac{1}{u}\right) du ,$$

$$\beta < \alpha < -n ,$$

[che è un'altra, crediamo nuova, relazione integrale tra i due polinomi di LAGUERRE $L_n^{(\alpha)}(x)$, $L_n^{(\beta)}(x)$], quando si tenga presente che lo sviluppo di $L_n^{(\alpha)}(x)$ può scriversi nella forma

$$\pi L_n^{(\alpha)}(x) = \operatorname{sen}(\pi(\alpha+1))\sum_{m=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(-\alpha+m-n)}{m!\,(n-m)!}x^{n-m} ,$$

perchè è

$$\Gamma(\alpha+n-m+1)\Gamma(-\alpha+m-n) = \frac{(-1)^{n-m+1}\pi}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)} ,$$

e quando inoltre ci si serva della funzione Beta euleriana di prima specie. Anche nella (1_4) può farsi la solita trasformazione a mezzo della (5_2).

5. – Relazioni integrali in cui entrino due o più polinomi di LAGUERRE, o d'HERMITE, o altri polinomi qualsiasi, od anche più polinomi di tipi diversi, si possono ottenere con un procedimento che, se non nuovo, consente però di ritrovare risultati già noti o generalizzare altri in maniera semplice e spedita.

Pertanto richiamiamo i seguenti notissimi integrali:

$$(1_5)\qquad \int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)dx = 0 , \qquad m \neq n,\ \alpha > -1 ,$$

$$(2_5)\qquad \int_0^\infty e^{-x}x^\alpha [L_n^{(\alpha)}(x)]^2 dx = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} , \qquad \alpha > -1 ,$$

$$(3_5)\qquad \int_0^\infty e^{-\lambda x}x^\alpha L_n^{(\alpha)}(\nu x)dx = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\lambda^{\alpha+1}}\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)^n, \qquad \alpha > -1 ,$$

l'ultimo dei quali è nullo se $\lambda = \nu$.

6. – Innanzi tutto, ponendo (5)

$$L_{n_1}^{(\alpha_1)}(x)L_{n_2}^{(\alpha_2)}(x)\dots L_{n_r}^{(\alpha_r)}(x)=b_0+b_1L_1^{(\alpha)}(x)+\dots+b_sL_s^{(\alpha)}(x)\,,$$

$s=n_1+\dots+n_r$, b_i costanti opportune, se si indica con I_m l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_{n_1}^{(\alpha_1)}(x)L_{n_2}^{(\alpha_2)}(x)\dots L_{n_r}^{(\alpha_r)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)\,\mathrm{d}x,\qquad \alpha>-1\,,$$

si ha:

a) Se $m\leqslant s$ è

$$I_m=b_m\frac{\Gamma(\alpha+m+1)}{m!}\,,\tag{1_6}$$

essendo b_m calcolabile a mezzo della seguente formula ricorrente

$$\sum_{i_1+\dots+i_r=m}\frac{m!\,\Gamma(\alpha+m+1)\Gamma(\alpha_1+n_1+1)\dots\Gamma(\alpha_r+n_r+1)}{i_1!\dots i_r!\,(n_1-i_1)!\dots(n_r-i_r)!\,\Gamma(\alpha_1+i_1+1)\dots\Gamma(\alpha_r+i_r+1)}=$$
$$=b_s\frac{\Gamma(\alpha+s+1)}{(s-m)!}+b_{s-1}\frac{\Gamma(\alpha+s)}{(s-m-1)!}+\dots+b_m\Gamma(\alpha+m+1),$$

che in particolare dà

$$b_s=\frac{s!}{n_1!\dots n_r!}\,,$$

e si ha pertanto

$$I_s=\frac{\Gamma(\alpha+s+1)}{n_1!\dots n_r!}\,,\tag{2_6}$$
$$s=n_1+n_2+\dots+n_r\,,\qquad \alpha>-1.$$

b) Se $m>s$ è

$$I_m=0\,.\tag{3_6}$$

(5) Cfr. L. TOSCANO, *Trasformata di Laplace di prodotti di funzioni di Bessel e polinomi di Laguerre. Relazione integrale su funzioni ipergeometriche più generali della* F_A *di Lauricella,* Pont. Acad. Sci. Comment. 5, 471-500 (1941), (con Nota bibliografica). In questa Nota di L. TOSCANO, notevole per i risultati assai generali che contiene, vi sono alcuni risultati di questo nostro lavoro ove però, quelli almeno che ci siamo limitati a riportare, si ottengono in maniera rapida ed elementare.

Dalla (2_6) se

$$n_i = n\,, \qquad \alpha_i = \beta\,, \qquad\qquad (i = 1, \ldots, r),$$

e quindi $s = rn$, si trae

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha \left[L_n^{(\beta)}(x)\right]^r L_{rn}^{(\alpha)}(x)\, \mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\alpha + rn + 1)}{(n\,!)^r}\,, \qquad \alpha > -1\,.$$

Analoghi risultati si ricavano dalle (1_6), (3_6).

7. – Dalla posizione invece

$$L_{n_1}^{(\alpha_1)}(\nu_1 x) L_{n_2}^{(\alpha_2)}(\nu_2 x) \ldots L_{n_r}^{(\alpha_r)}(\nu_r x) = c_0 + c_1 L_1^{(\alpha)}(\nu x) + \ldots + c_s L_s^{(\alpha)}(\nu x)\,,$$

$$\alpha > -1\,, \qquad s = \Sigma\, n_i\,, \qquad c_i \text{ costanti opportune},$$

o dall'altra più generale

$$L_{n_1}^{(\alpha_1)}(\nu_1 x^{m_1}) L_{n_2}^{(\alpha_2)}(\nu_2 x^{m_2}) \ldots L_{n_r}^{(\alpha_r)}(\nu_r x^{m_r}) = \gamma_0 + \gamma_1 L_1^{(\alpha)}(\nu x) + \ldots + \gamma_\sigma L_\sigma^{(\alpha)}(\nu x),$$

$\alpha > -1$, m_i interi positivi qualsiasi, ν_i reali arbitrari, $\nu > 0$, γ_i costanti opportune e

$$\sigma = \sum_1^r n_i m_i\,,$$

con lo stesso procedimento a mezzo della (1_5), o della (2_5), può aversi analogo risultato, quando si sia scritto, come è agevole, la corrispondente formula ricorrente.

Si ha così, ad esempio,

$$\int_0^\infty e^{-\nu x} x^\alpha L_{n_1}^{(\alpha_1)}(\nu_1 x^{m_1}) \ldots L_{n_r}^{(\alpha_r)}(\nu_r x^{m_r}) L_p^{(\alpha)}(\nu x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } p > \sigma\,, \\ \dfrac{(-1)^{\sigma - s} \nu_1^{n_1} \ldots \nu_r^{n_r}}{\nu^{p+\alpha+1} n_1! \ldots n_r!}\, \Gamma(\alpha + p + 1), & \text{se } p = \sigma\,, \end{cases}$$

m_i interi positivi qualsiasi, ν_i reali arbitrari, $\alpha > -1$, $\nu > 0$, $\sigma = \Sigma\, n_i m_i$, $s = \Sigma\, n_i$.

Se assumiamo

$$n_i = n\,, \qquad \nu_i = \lambda\,, \qquad m_i = m\,, \qquad \alpha_i = \beta\,,$$

abbiamo

$$\int_0^\infty e^{-\nu x} x^\alpha \left[L_n^{(\beta)}(\lambda x^m)\right]^r L_p^{(\alpha)}(\nu x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,, & \text{se} \quad p > rnm\,, \\ \dfrac{(-1)^{p-rn}\lambda^{rn}\Gamma(\alpha+p+1)}{\nu^{p+\alpha+1}(n\,!)^r}\,, & \text{se} \quad p = rnm\,. \end{cases}$$

8. – Con gli integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_n(x) H_p(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad p \neq n\,, \\ n\,!\sqrt{2\pi} & \text{per} \quad p = n\,, \end{cases}$$

a mezzo del procedimento indicato si trovano analoghi risultati quale, ad es., il seguente

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu^2 x^2/2} H_{n_1}(\nu_1 x^{m_1}) \ldots H_{n_r}(\nu_r x^{m_r}) H_p(\nu x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad p > \Sigma\, n_i\, m_i\,, \\ \dfrac{\nu_1^{n_1} \ldots \nu_r^{n_r} p\,!\sqrt{2\pi}}{\nu^{p+1}}\,, & \text{se} \quad p = \Sigma\, n_i m_i\,, \end{cases}$$

m_i interi positivi arbitrari, $\nu > 0$.

Se poniamo

$$\nu_i = \lambda\,, \qquad m_i = m\,, \qquad n_i = n\,,$$

dalla precedente si ha (6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu^2 x^2/2} \left[H_n(\lambda x^m)\right]^r H_p(\nu x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,, & \text{per} \quad p > rnm\,, \\ \dfrac{\lambda^{rn} p\,!\sqrt{2\pi}}{\nu^{p+1}} & \text{per} \quad p = rnm\,. \end{cases}$$

(6) Cfr. G. PALAMÀ, *Su delle relazioni integrali relative ai polinomi di Laguerre e d'Hermite*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **10**, 46-54 (1939). In questo lavoro si dà un risultato che si ottiene da quello del testo per $\lambda = m = 1$. Si badi al significato leggermente diverso degli $H_n(x)$.

§ 2. – Polinomi associati alle funzioni di Laguerre.

In una Nota precedente [7] abbiamo dato la seguente formula relativa alla funzione $l_n^{(\alpha)}(x)$ di LAGUERRE di 2ª specie:

$$l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi}}\left[L_n^{(\alpha)}(x) I_\alpha(x) + P_n^{(\alpha)}(x)\frac{e^x}{x^\alpha}\right], \tag{1}$$

$n \geqslant 0$, $\alpha + 1 < 0$, x finito qualsiasi,

$$I_\alpha(x) = \int_0^x e^x x^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}x\,,$$

e $P_n^{(\alpha)}(x)$ polinomio in x, di grado $n-1$, associato alle funzioni di LAGUERRE di 1ª e 2ª specie.

Iniziamo qui lo studio di tali polinomi.

1. – Abbiamo dimostrato le formule [7]

$$(n+1)P_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n+\alpha+1-x)P_n^{(\alpha)}(x) - (\alpha+n)P_{n-1}^{(\alpha)}(x)\,, \tag{1_1}$$

$$L_n^{(\alpha)}(x)P_{n+1}^{(\alpha)}(x) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x)P_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{(n+1)!\,\Gamma(\alpha+1)}\,, \tag{2_1}$$

ciascuna delle quali, insieme con le

$$P_0^{(\alpha)}(x) = 0\,, \qquad P_1^{(\alpha)}(x) = 1\,,$$

può servire di definizione dei $P_n^{(\alpha)}(x)$, per i quali se $n = 2, 3$, si ha rispettivamente inoltre

$$P_2^{(\alpha)}(x) = (1/2)(\alpha+3-x)\,, \qquad P_3^{(\alpha)}(x) = (1/6)\left[x^2 - 2(\alpha+4)x + \alpha^2 + 6\alpha + 11\right].$$

La (1_1) è del tutto analoga alla seguente

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x) - (\alpha+n)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)\,, \tag{3_1}$$

---

(7) Cfr. loc. cit. in (1).

dei polinomi di LAGUERRE, i cui valori iniziali sono invece

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1\,, \qquad L_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha + 1\,.$$

Pertanto se poniamo

$$(4_1) \qquad S_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) - P_n^{(\alpha)}(x)\,,$$

ove $S_n^{(\alpha)}(x)$ è un altro polinomio di grado n, sottraendo membro a membro le (3_1) e (1_1) abbiamo

$$(n+1)S_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n+\alpha+1-x)S_n^{(\alpha)}(x) - (\alpha+n)S_{n-1}^{(\alpha)}(x)\,,$$

cioè la formula ricorrente rispetto ad n dei $S_n^{(\alpha)}(x)$ è la stessa di quella dei $L_n^{(\alpha)}(x)$, $P_n^{(\alpha)}(x)$. Inoltre, se eliminiamo $P_n^{(\alpha)}(x)$, $P_{n+1}^{(\alpha)}(x)$ tra la (4_1), la formula che si trae da quest'ultima cambiandovi n in $n+1$ e la (2_1), si ha

$$L_n^{(\alpha)}(x)S_{n+1}^{(\alpha)}(x) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x)S_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{(n+1)!\,\Gamma(\alpha+1)}\,,$$

che è analoga alla (2_1).

Si noti infine che

$$S_0^{(\alpha)}(x) = 1\,, \quad S_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha, \quad S_2^{(\alpha)}(x) = (1/2)\left[x^2 - (2\alpha+3)x + \alpha^2 + 2\alpha - 1\right].$$

2. – Se, derivata la (1) $\left[\text{poichè } l_n^{(\alpha)\prime}(x) = -l_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)\right]$, poniamo al posto di $l_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$ il valore che si trae dalla stessa (1), e si tien presente che

$$(1_2) \qquad (\alpha+1)I_{\alpha+1} = I_\alpha - e^x x^{-\alpha-1}\,,$$

abbiamo

$$(2_2) \qquad xP_n^{(\alpha)\prime}(x) = -(\alpha+1)P_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) + (\alpha-x)P_n^{(\alpha)}(x) + L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x)\,.$$

Derivando invece la (1_1), servendosi della (2_2), della stessa (1_1) e della (3_1), e ponendo

$$\Delta_n^{(\alpha)}(x) = P_n^{(\alpha+1)}(x) - P_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)\,,$$

si ottiene

$$(\alpha+1)\Delta_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) + xP_n^{(\alpha)}(x)\,,$$

che, essendo

$$L_n^{(\alpha+1)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) , \tag{3_2}$$

dà

$$(\alpha + 1)\Delta_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) + xP_n^{(\alpha)}(x) . \tag{4_2}$$

Da questa si ricava poi subito

$$P_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \left[L_k^{(\alpha-1)}(x) + xP_k^{(\alpha-1)}(x)\right] .$$

3. – Facilmente, da una formula del tipo

$$F\left(l_{n_1}^{(\alpha_1)}(x), \ldots, l_{n_r}^{(\alpha_r)}(x)\right) = 0, \tag{1_3}$$

in cui F è una funzione lineare delle $l_n^{(\alpha)}(x)$, quando sia anche

$$F\left(L_{n_1}^{(\alpha_1)}(x), \ldots, L_{n_r}^{(\alpha_r)}(x)\right) = 0 , \tag{2_3}$$

si passa ad un'altra relativa ai polinomi $P_n^{(\alpha)}(x)$.

Consideriamo i seguenti casi:

a) $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = \alpha$,

cioè sussistano le formule

$$F\left(l_{n_1}^{(\alpha)}(x), \ldots, l_{n_r}^{(\alpha)}(x)\right) = 0 , \tag{3_3}$$

$$F\left(L_{n_1}^{(\alpha)}(x), \ldots, L_{n_r}^{(\alpha)}(x)\right) = 0 . \tag{4_3}$$

Posto nella (3_3) al posto di $l_{n_i}^{(\alpha)}(x)$ il valore dato dalla (1), si ha subito per la (4_3)

$$F\left(P_{n_1}^{(\alpha)}(x), \ldots, P_{n_r}^{(\alpha)}(x)\right) = 0 ;$$

sussiste pertanto per i $P_n^{(\alpha)}(x)$ una formula del tutto analoga alla (3_3).

b) $\alpha_1 = \alpha + 1, \ \ \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = \alpha,$

ossia si abbia

$$F\left(l_{n_1}^{(\alpha+1)}(x), l_{n_2}^{(\alpha)}(x), \ldots, l_{n_r}^{(\alpha)}(x)\right) = 0 , \tag{5_3}$$

e l'analoga nei $L_n^{(\alpha)}(x)$.

Con il procedimento indicato, si ha

$$(6_3) \qquad F(-L_{n_1}^{(\alpha+1)}(x) + (\alpha+1)P_{n_1}^{(\alpha+1)}(x),\ xP_{n_2}^{(\alpha)}(x), \dots, xP_{n_r}^{(\alpha)}(x)) = 0 ,$$

e si vede così che si passa dalla (5_3), quando valga la sua analoga nei $L_n^{(\alpha)}(x)$, alla (6_3), ponendo, nella (5_3), $xP_{n_i}^{(\alpha)}(x)$ al posto di $l_{n_i}^{(\alpha)}(x)$, $(i = 2, \dots, r)$, e invece di $l_{n_1}^{(\alpha+1)}(x)$ l'espressione

$$-L_{n_1}^{(\alpha+1)}(x) + (\alpha+1)P_{n_1}^{(\alpha+1)}(x).$$

c) $\alpha_1 = \alpha - 1, \ \alpha_2 = \dots = \alpha_r = \alpha$.

Dalle (1_3), (2_3) corrispondenti a questo caso segue ora

$$F(L_{n_1}^{(\alpha-1)}(x) + xP_{n_1}^{(\alpha-1)}(x),\ \alpha P_{n_2}^{(\alpha)}(x), \dots, \alpha P_{n_r}^{(\alpha)}(x)) = 0 .$$

d) $\alpha_1 = \alpha + 2, \ \alpha_2 = \dots = \alpha_r = \alpha$.

Le (1_3), (2_3), se si nota che

$$I_{\alpha+2} = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\left[I_\alpha - \frac{e^x}{x^{\alpha+2}}(x+\alpha+1)\right],$$

ci dànno ora

$$F(-(x+\alpha+1)L_{n_1}^{(\alpha+2)}(x) + (\alpha+1)(\alpha+2)P_{n_1}^{(\alpha+2)}(x),\ x^2P_{n_2}^{(\alpha)}(x), \dots, x^2P_{n_r}^{(\alpha)}(x)) = 0 .$$

È ovvio il risultato che segue da una data formula nelle $l_n^{(\alpha)}(x)$, valida al solito quando tali funzioni si sostituiscano con $L_n^{(\alpha)}(x)$, contenente più di una delle $l_n^{(\alpha)}(x)$ precedentemente considerate. Così, ad esempio, l'applicazione dei risultati *b*) e *c*) ci fa passare rapidamente dalla

$$F(l_{n_1}^{(\alpha+1)}(x),\ l_{n_2}^{(\alpha-1)}(x),\ l_{n_3}^{(\alpha)}(x), \dots, l_{n_r}^{(\alpha)}(x)) = 0 ,$$

ammesso che sussista l'analoga nei $L_n^{(\alpha)}(x)$, alla formula seguente

$$F(-\alpha L_{n_1}^{(\alpha+1)}(x) + \alpha(\alpha+1)P_{n_1}^{(\alpha+1)}(x),\ xL_{n_2}^{(\alpha-1)}(x) + \\ + x^2P_{n_2}^{(\alpha-1)}(x),\ \alpha xP_{n_3}^{(\alpha)}(x), \dots, \alpha xP_{n_r}^{(\alpha)}(x)) = 0 .$$

Il risultato sarebbe stato analogo se nella formula di partenza [valevole anche pei $L_n^{(\alpha)}(x)$] ci fosse stata più di una delle $l_{n_i}^{(\alpha+1)}(x)$, $l_{n_i}^{(\alpha-1)}(x)$.

4. – *Esempi.*

Dalle formule seguenti [valevoli altresì quando invece di $l_n^{(\alpha)}(x)$ si pone $L_n^{(\alpha)}(x)$]:

$$
\begin{aligned}
&x l_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = -n l_n^{(\alpha)}(x) + (\alpha + n) l_{n-1}^{(\alpha)}(x)\,, \\
(1_4) \qquad &x l_n^{(\alpha+1)}(x) - (\alpha + x) l_n^{(\alpha)}(x) + (\alpha + n) l_n^{(\alpha-1)}(x) = 0\,, \\
&x l_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) - (\alpha - x) l_n^{(\alpha)}(x) + (n+1) l_{n+1}^{(\alpha-1)}(x) = 0\,,
\end{aligned}
$$

applicando i risultati del numero precedente, si ha subito rispettivamente

$$
\begin{aligned}
&(\alpha + 1) P_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) + n P_n^{(\alpha)}(x) - (\alpha + n) P_{n-1}^{(\alpha)}(x) = L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)\,, \\
(2_4) \qquad &\alpha(\alpha + 1) P_n^{(\alpha+1)}(x) - \alpha(\alpha + x) P_n^{(\alpha)}(x) + (\alpha + n) x P_n^{(\alpha-1)}(x) = (\alpha + x) L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)\,, \\
&\alpha(\alpha + 1) P_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) - \alpha(\alpha - x) P_n^{(\alpha)}(x) + (n+1) x P_{n+1}^{(\alpha-1)}(x) = \\
&\qquad\qquad = (\alpha + x) L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) - (\alpha - x) L_n^{(\alpha)}(x)\,.
\end{aligned}
$$

Quest'ultima si può anche scrivere

$$
\begin{aligned}
&\alpha(\alpha + 1) P_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) - \alpha(\alpha - x) P_n^{(\alpha)}(x) + (n+1) x P_{n+1}^{(\alpha-1)}(x) = \\
&\qquad\qquad = \alpha L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) - (n+1) L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)\,,
\end{aligned}
$$

per l'analoga alla (1_4) relativa ai $L_n^{(\alpha)}(x)$.

5. – Le formule trovate con opportune eliminazioni danno ad esempio le seguenti

$$
\begin{aligned}
(1_5) \qquad & x P_n^{(\alpha)\prime}(x) = (\alpha + n - x) P_n^{(\alpha)}(x) - (\alpha + n) P_{n-1}^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x)\,, \\
(2_5) \qquad & x P_n^{(\alpha)\prime}(x) = (n+1) \Delta_{n+1}^{(\alpha-1)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x)\,, \\
& \alpha x P_n^{(\alpha)\prime}(x) = (n+1) L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x) + (n+1) x P_{n+1}^{(\alpha-1)}(x) - \alpha L_n^{(\alpha)}(x)\,, \\
(3_5) \qquad & x P_n^{(\alpha)\prime}(x) = -(\alpha + 1) P_n^{(\alpha+1)}(x) + \alpha P_n^{(\alpha)}(x) + L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)\,.
\end{aligned}
$$

6. – Tra queste formule va segnalata la seguente [che si ottiene eliminando $L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$ tra la (2_4) e la (3_5)]:

$$
(\alpha + x) P_n^{(\alpha)\prime}(x) = (\alpha + n) P_n^{(\alpha-1)}(x) - (\alpha + 1) P_n^{(\alpha+1)}(x)\,,
$$

ove la derivata di $P_n^{(\alpha)}(x)$ è espressa mediante due soltanto di tali polinomi.

Sottraendo invece da quest'ultima la (3_5), abbiamo

$$\alpha P_n^{(\alpha)'}(x) = (\alpha + n) P_n^{(\alpha-1)}(x) - \alpha P_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) .$$

7. - Per ottenere lo sviluppo di $P_n(x)$ poniamo

$$(1_7) \qquad P_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n,i}^{(\alpha)} x^i , \qquad L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{n,i}^{(\alpha)} x^i ,$$

in cui $a_{n,i}^{(\alpha)}$ si deve determinare e $b_{n,i}^{(\alpha)}$ è dato da

$$(2_7) \qquad b_{n,i}^{(\alpha)} = \frac{(-1)^i \Gamma(\alpha + n + 1)}{(n-1)!\, i!\, \Gamma(\alpha + i + 1)} .$$

La sostituzione degli sviluppi (1_7) di $P_n^{(\alpha)}(x)$, $L_n^{(\alpha)}(x)$ nella (2_5) dà, se si egualiano i coefficienti di x^i, la seguente formula ricorrente

$$(n + i + 1) a_{n,i}^{(\alpha)} - (n + 1) a_{n+1,i}^{(\alpha)} = - b_{n,i}^{(\alpha)} ,$$

che moltiplicata per $\dfrac{n!}{(n + i + 1)!}$ diventa

$$\frac{n!}{(n+i)!} a_{n,i}^{(\alpha)} - \frac{(n+1)!}{(n+i+1)!} a_{n+1,i}^{(\alpha)} = \frac{-n!}{(n+i+1)!} b_{n,i}^{(\alpha)} .$$

Ora quest'ultima, cambiando n in $n-1$, $n-2$, ..., i e sommando, dà

$$\frac{(n+1)!}{(n+i+1)!} a_{n+1,i}^{(\alpha)} = \sum_{k=i}^{n} \frac{k!\, b_{k,i}^{(\alpha)}}{(k+i+1)!} ,$$

a mezzo della quale e della (2_7) dalla prima delle (1_7) si ricava la formula seguente

$$P_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} (-1)^i \binom{k}{i} \frac{(n+i)!\, \Gamma(\alpha + k + 1)}{(k+i+1)!\, \Gamma(\alpha + i + 1)} x^i,$$

che può anche scriversi

$$n!\, P_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} (-1)^i \binom{k+i}{i} \frac{(n+i)!\, \Gamma(\alpha + k + i + 1)}{(k + 2i + 1)!\, \Gamma(\alpha + i + 1)} x^i.$$

8. – Stabiliamo ora l'equazione differenziale cui soddisfano i $P_n^{(\alpha)}(x)$. Deriviamo perciò la (2_5) ed eliminiamo $P_{n+1}^{(\alpha)'}(x)$ tra la formula che si ottiene e la (1_5), dopo aver cambiato in quest'ultima n in $n+1$; si ha così

$$x^2 P_n^{(\alpha)''}(x) + (n+2)xP_n^{(\alpha)'}(x) =$$

$$= (n+1)\left[(\alpha+n+1-x)P_{n+1}^{(\alpha)}(x) - (\alpha+n+1)P_n^{(\alpha)}(x) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x)\right] + xL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x),$$

che, a mezzo della stessa (2_5), della (3_2) e dell'analoga alla (1_1) relativa ai $L_n^{(\alpha)}(x)$, dà la seguente equazione differenziale lineare del secondo ordine, ma non omogenea, cui soddisfa $P_n^{(\alpha)}(x)$:

$$(1_8) \qquad xP_n^{(\alpha)''}(x) + (x-\alpha+1)P_n^{(\alpha)'}(x) + (n+1)P_n^{(\alpha)}(x) = 2L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x),$$

che può scriversi sotto la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\alpha+1}e^x P_n^{(\alpha)'}(x)\right] + (n+1)x^{-\alpha}e^x P_n^{(\alpha)}(x) = 2x^{-\alpha}e^x L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)\,.$$

Inoltre, con opportune eliminazioni dalla (1_8), si traggono le seguenti:

$$xP_n^{(\alpha)''}(x) - (x+\alpha-1)P_n^{(\alpha)'}(x) + (2\alpha+n+1)P_n^{(\alpha)}(x) = 2(\alpha+1)P_n^{(\alpha+1)}(x)\,,$$

$$xP_n^{(\alpha)''}(x) + (x+\alpha+1)P_n^{(\alpha)'}(x) + (2\alpha+n+1)P_n^{(\alpha)}(x) = 2(\alpha+n)P_n^{(\alpha-1)}(x)\,,$$

in ciascuna delle quali anche nel secondo membro vi è un polinomio $P_n^{(\alpha)}(x)$.

9. – Scriviamo $P_n^{(\alpha)}(x)$ sotto forma di determinante. Cambiamo perciò nella (2_1) n in $n-1$, $n-2$, ..., 1, 0 ed abbiamo [se inoltre teniamo presente che è $L_0^{(\alpha)}(x)P_1^{(\alpha)}(x) = 1$] un sistema di n equazioni lineari nelle incognite $P_n^{(\alpha)}(x)$, $P_{n-1}^{(\alpha)}(x)$, ..., $P_1^{(\alpha)}(x)$. Il determinante di tale sistema è uguale a

$$(1_9) \qquad L_{n-1}^{(\alpha)}(x)L_{n-2}^{(\alpha)}(x)\ \ldots\ L_1^{(\alpha)}(x)L_0^{(\alpha)}(x)\,,$$

mentre il determinante del numeratore della frazione che dà il valore di $P_n^{(\alpha)}(x)$ [se dall'ultima sua riga moltiplicata per (1/2) $(\alpha+1)$ sottraiamo la penultima, dalla penultima moltiplicata per (1/3) $(\alpha+2)$ sottraiamo la terzultima e così via, e se si tien presente la (3_1)] contiene a fattore (1_9) e ci dà:

$$(-1)^{n-1} n!\, P_n^{(\alpha)}(x) = \begin{vmatrix} x-2n-\alpha+1 & \alpha+n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & x-2n-\alpha+3 & \alpha+n-2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x-2n-\alpha+5 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 4 & x-\alpha-7 & \alpha+3 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 3 & x-\alpha-5 & \alpha+2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & x-\alpha-3 \end{vmatrix}.$$

Si noti la grande analogia che vi è tra questo determinante e il seguente che dà lo sviluppo di $L_n^{(\alpha)}(x)$ [8]:

$$n!\, L_n^{(\alpha)}(x) = \begin{vmatrix} -x+2n+\alpha-1 & \alpha+n-1 & 0 & 0 \dots & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ n-1 & -x+2n+\alpha-3 & \alpha+n-2 & 0 \dots & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & n-2 & -x+2n+\alpha-5 & \cdot \dots & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & \cdot \dots & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \dots & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \dots & 3 & -x+\alpha+5 & \alpha+2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \dots & 0 & 2 & -x+\alpha+3 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \dots & 0 & 0 & 1 & -x+\alpha+1 \end{vmatrix}.$$

10. – La seguente formula

$$\frac{1}{n!}\Gamma(\alpha+n)(y-x)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!\, P_k^{(\alpha)}(x)P_k^{(\alpha)}(y)}{\Gamma(\alpha+k+1)} = P_n^{(\alpha)}(x)P_{n-1}^{(\alpha)}(y) - P_{n-1}^{(\alpha)}(x)P_n^{(\alpha)}(y)$$

si stabilisce nello stesso modo con il quale si perviene alla analoga dei $L_n^{(\alpha)}(x)$.

11. – Alcune relazioni integrali relative ai $P_n^{(\alpha)}(x)$ si stabiliscono agevolmente con il procedimento seguito nel paragrafo 1.

La posizione infatti, ad esempio,

$$(1_{11}) \qquad xP_n^{(\alpha)}(x) = d_0 + d_1 L_1^{(\alpha)}(x) + \dots + d_n L_n^{(\alpha)}(x)\,,$$

---

[8] Cfr. G. PALAMÀ, *Sui polinomi di Laguerre*, Rend. Ist. Lombardo Sci. Lett. **71**, **441-468** (**1938**).

quando si indichi inoltre con J_m l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha+1}P_n^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

ci dà subito, se $\alpha > -1$,

a) per $m > n$,

$$J_m = 0\;;$$

b) per $m = n$,

$$J_n = -\frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!}\;;$$

c) per $m < n$,

$$J_m = d_m\frac{\Gamma(\alpha + m + 1)}{m!}\,,$$

in cui d_m si calcola con la formula ricorrente

$$(m+n)!\sum_{k=m}^{n-1}\binom{k}{m}\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{(k+m+1)!} =$$

$$= -\frac{n!}{(m+1)!\,(\alpha+m+1)}\sum_{k=0}^{n-m-1}d_{n-k}\frac{\Gamma(\alpha+n+1-k)}{(n-m-k-1)!}\,,$$

così, ad esempio, se $m = n - 1$, si ha

$$J_{n-1} = \frac{\alpha+1}{n!}\,\Gamma(\alpha+n)\,,\qquad \alpha > -1\,.$$

Se invece partiamo dalla

$$(2_{11})\qquad P_{n_1}^{(\alpha_1)}(\nu_1 x)P_{n_2}^{(\alpha_2)}(\nu_2 x)\ldots P_{n_r}^{(\alpha_r)}(\nu_r x) = g_0 + g_1L_1^{(\alpha)}(\nu x) + \ldots + g_qL_q^{(\alpha)}(\nu x)\,,$$

$$q = -r + \Sigma\, n_i\,,$$

si ricava subito

$$\int_0^\infty e^{-\nu x} x^\alpha P_{n_1}^{(\alpha_1)}(\nu_1 x) \dots P_{n_r}^{(\alpha_r)}(\nu_r x)\, \mathrm{d}x = g_0 \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\nu^{\alpha+1}},$$

ove g_0 si determina a mezzo della formula ricorrente corrispondente alla (2_{11}) che non è difficile scrivere.

Inoltre è facile trovare, a mezzo della (2_{11}), delle formule integrali, analoghe a quelle dedotte dalla (1_{11}), relative all'integrale

$$\int_0^\infty e^{-\nu x} x^\alpha P_{n_1}^{(\alpha_1)}(\nu_1 x) \dots P_{n_r}^{(\alpha_r)}(\nu_r x) L_m^{(\alpha)}(\nu x)\, \mathrm{d}x, \qquad \alpha > -1.$$