Rivista Mat. Univ. Parma 4, 95-103 (1953)

MARCO CUGIANI (*)

Sugli intervalli fra i valori dell'argomento pei quali un polinomio risulta libero da potenze. (**)

I. - Sia $F(x) = a_0x^g + a_1x^{g-1} + ... + a_g$, $(a_0 > 0)$, un polinomio a valori interi e divisore fisso 1, di grado $g \geqslant 1$, e sia Δ il suo discriminante che supporremo sempre $\neq 0$.

Fissato l intero $\geqslant 1$ e posto $k = g + l$, siano (per $1 \leqslant q_1 < q_2 < ... < q_n < ...$)

$$F(q_1)\,, \quad F(q_2)\,, \;\ldots,\quad F(q_n)\,, \quad F(q_{n+1})\,, \;\ldots \tag{1}$$

tutti e soli i valori del polinomio che risultano liberi da potenze k-esime (¹).

Posto ora:

$$\delta_n = q_{n+1} - q_n\,,$$

e premesso che esistono in ogni caso numeri q_n di indice grande a piacere (come risulterà immediatamente già dalle prime considerazioni del § **II**), possiamo proporci il problema di studiare il comportamento della funzione δ_n per $n \to \infty$.

Recentemente HALBERSTAM e ROTH (²) hanno studiato tale questione nel caso particolare $F(x) = x$, giungendo a stabilire alcune limitazioni superiori per la funzione δ_n, valide in questo caso particolare. Semplici argomentazioni di carattere elementare condurrebbero i nostri autori alla formula:

$$\delta_n = O(n^{1/(k+1)})\,,$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica F. ENRIQUES, Università, Milano (Italia).
(**) Ricevuto il 7-II-1953.

(¹) Ricordiamo che un intero a si dice libero da potenze s-esime ($s \geqslant 2$) se non esiste alcun primo p per cui si abbia $p^s|a$.

(²) Vedi le due Note: K. F. ROTH, *On the gaps between squarefree numbers*, J. London Math. Soc. **26**, 263-268 (1951); H. HALBERSTAM and K. F. ROTH, *On the gaps between consecutive k-free integers*, J. London Math. Soc. **26**, 268-273 (1951).

mentre coll'aiuto di più elaborate argomentazioni essi ottengono la formula migliore ($\varepsilon > 0$, arbitrario):

$$\delta_n = O(n^{(1/2k)+\varepsilon}).$$

Essi annunciano inoltre la possibilità di migliorare lievemente anche quest'ultimo risultato facendo uso di un teorema di J. G. VAN DER CORPUT, di applicazione però, a loro giudizio, troppo laboriosa nel caso di un k qualunque. Nel sottocaso particolare $k = 2$ [sempre per $F(x) = x$] l'applicazione di tale teorema conduce ROTH al risultato:

$$\delta_n = O(n^{3/13}(\log n)^{4/3}) .$$

Lo scopo del presente lavoro è quello di prospettare la questione nella forma più generale esposta inizialmente e di dimostrare alcuni risultati, ottenibili con semplici argomentazioni elementari, che a tale questione forniscono una prima risposta.

Alla formulazione dei risultati anzidetti converrà premettere alcune definizioni.

Indicheremo con $\nu(m)$ il numero delle soluzioni (mod m) della congruenza $F(x) \equiv 0 \pmod{m}$.

Poniamo poi (per s intero $\geqslant 2$):

$$\Lambda_s = \prod_p \left(1 - \frac{\nu(p^s)}{p^s}\right),$$

dove il prodotto infinito (esteso a tutti i numeri primi p) è sempre convergente, poichè notoriamente si ha $\nu(p^s) \leqslant g\Delta^2$, e quindi Λ_s è finito, non nullo (sarà anzi $0 < \Lambda_s < 1$).

Sia ora D il minimo comune multiplo dei denominatori dei coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_g$ di $F(x)$; il polinomio $DF(x)$ risulta allora a coefficienti interi, primitivo, a divisore fisso D (si ha notoriamente $D \mid g!$) e sia:

$$\mathrm{D}F(x) = D_1F_1(x)\cdot D_2F_2(x) \ldots D_hF_h(x), \qquad (D = D_0D_1 \ldots D_n,\ D_0 \geqslant 1),$$

la decomposizione di $DF(x)$ nei suoi h fattori irriducibili, a coefficienti interi e primitivi: $D_1F_1(x)$, $D_2F_2(x)$, ..., $D_hF_h(x)$, certamente distinti per l'ipotesi $\Delta \neq 0$ e con divisori fissi $D_1, D_2, \ldots, D_h$ rispettivamente. I polinomi $F_1(x)$, ..., $F_h(x)$ sono a valori interi ed indicheremo con $\nu_i(m)$ il numero delle soluzioni (mod m) della congruenza $F_i(x) \equiv 0 \pmod{m}$.

Possiamo adesso esprimere i risultati annunziati nella forma seguente:

a) *Vale la relazione*:

$$\underline{\lim}\ \delta_n \leqslant 1/\Lambda_k\,, \tag{2}$$

e quindi in particolare sarà, in ogni caso, $\underline{\lim}\ \delta_n$ *un numero finito*;

b) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *e per infiniti valori di* n *si ha*:

$$\delta_n > \frac{h-\varepsilon}{gk}\,\frac{\log n}{\log\log n}\,, \tag{3}$$

od, in altre parole, vale la relazione:

$$\overline{\lim}\ \delta_n \log\log n/\log n \geqslant h/(gk)\ ;$$

c) *vale la relazione*:

$$\delta_n = O(n^{(g/k)-\alpha}/(\log n)^{\beta}), \tag{4}$$

dove

$$\alpha = g/(k^2+k)\,,\qquad \beta = k/(k+1)\qquad \textit{per}\quad g \leqslant l\,,$$

$$\alpha = l/(k^2-k)\,,\qquad \beta = 1\qquad \textit{per}\quad g > l\,.$$

II. – Ricordiamo qui un teorema che ci sarà di aiuto per le considerazioni che andremo in seguito a svolgere.

Consideriamo gli interi x_i *per cui si ha*: $\zeta < x_i \leqslant \zeta + \xi$ (ξ, ζ *reali*, $\xi > 0$, $\zeta \geqslant 0$). *Detto* L_s *il numero degli interi* $F(x_i)$ *che sono liberi da potenze s-esime* ($s \geqslant 2$) *di numeri primi minori o uguali a* $\varphi(\xi)$ [*dove* $\varphi(\xi)$ *è una funzione reale non decrescente per* $\xi \geqslant \xi_0$ *e tendente a* $+\infty$ *per* $\xi \to +\infty$], *vale la relazione* (*per* $\xi \to +\infty$):

$$L_s = \xi\Lambda_s + O\left(\frac{\varphi(\xi)}{\log\varphi(\xi)}\,e^{k_0\psi(\xi)} + \frac{\xi}{(\psi(\xi)\cdot\log\psi(\xi))^{s-1}}\right), \tag{5}$$

dove k_0 *dipende solo dai coefficienti di* $F(x)$, *e* $\psi(\xi)$ *è una qualunque funzione reale, non decrescente, soddisfacente alle condizioni*

$$2 \leqslant \psi(\xi) \leqslant \varphi(\xi)/\{(1+\bar\eta)\log\varphi(\xi)\}$$

per qualche $\bar\eta > 0$ *ed ogni* $\xi \geqslant \xi_0$.

Questo teorema si trova dimostrato in un'altra nostra Nota [3], esso costituisce del resto una conseguenza abbastanza naturale della applicazione del metodo di VIGGO BRUN. Dalla (5) si deducono, come casi particolari, i due seguenti lemmi.

Lemma 1. *Se nel teorema precedente si sceglie* $\varphi(\xi)$ *tale che* $\varphi(\xi)/\log\varphi(\xi) = \chi(\xi) = o(\xi)$, *si ottiene* [4]:

$$L_s = \xi\Lambda_s + o(\xi)\,. \tag{6}$$

Definiamo la funzione $\psi_1(\xi)$ come l'estremo inferiore di $\log\{t/\chi(t)\}$ nell'intervallo $t \geqslant \xi$ e poniamo nella (5) la funzione $\psi(\xi)$ così definita:

$$\psi(\xi) = \{1/(2k_0)\}\cdot\mathrm{Min}\,\{\psi_1(\xi), \log\log\varphi(\xi)\}.$$

Segue così immediatamente l'asserto.

Lemma 2. *Se nel precedente teorema si sceglie* $\varphi(\xi)$ *in modo che risulti soddisfatta la condizione* $\varphi(\xi) \leqslant c_0\xi\log\xi$, *per una opportuna scelta della costante* c_0 *vale la relazione*:

$$L_s = \xi\Lambda_s + E\,, \tag{7}$$

dove $|E| < (1/2)\Lambda_s\xi$ *(per* $\xi \geqslant \xi_0$*)*.

Basta porre, nella (5), $\psi(\xi) = \psi_0 = 4K/\Lambda_s$, dove K è la costante implicata da O (e si può assumere quindi $K > 1$), e scegliere c_0 in modo che risulti $c_0 e^{k_0\psi_0} < \Lambda_s/(4K)$.

Oltre alle precedenti considerazioni ci servirà anche il seguente

Lemma 3. *Siano* $t_1, t_2, \dots, t_r, \dots$ *i numeri primi, disposti in ordine crescente, per cui si ha* $\nu(t_i) > 0$. *Vale allora la relazione (per* $\eta > 0$ *ed* r *abbastanza grande)*:

$$t_r < \{g(1+\eta)/h\}\, r\log r. \tag{8}$$

Osservazione. La (8) varrà anche se la successione $t_1, t_2, \dots, t_r, \dots$ è quella dei primi per cui si ha $\nu(t_i^s) > 0$ (per un certo s prefissato > 1), come

---

(3) Vedi: M. CUGIANI, *Sui valori di un polinomio che risultano liberi da potenze*, in corso di stampa su: Ann. Mat. Pura Appl.

(4) Si veda anche: G. RICCI, *Ricerche aritmetiche sui polinomi*, Rend. Circ. Mat. Palermo **57**, 433-475 (1933). Ivi la (6) si trova dimostrata indipendentemente dalla (5). In tale lavoro si possono però trovare anche esposti i principi generali su cui si fonda la dimostrazione della (5).

segue immediatamente dal fatto che $\nu(t_i) > 0$ implica $\nu(t_i^s) > 0$ per ogni t_i, eccettuatine al più un numero finito.

Dimostreremo la (8) servendoci della seguente formula, valida per un polinomio $F(x)$ irriducibile (5),

$$\sum_{p<x} \nu(p) = x/\log x + O(x/\log^2 x) .$$

Ora se un polinomio $F(x)$ è più in generale decomponibile in h fattori si avrà $\nu(p) = \nu_1(p) + \ldots + \nu_h(p)$ per ogni primo p, eccettuatine al più un numero finito, e quindi si potrà scrivere:

$$\sum_{p<x} \nu(p) = hx/\log x + O(x/\log^2 x) . \tag{9}$$

Dalla (9) si ha:

$$\sum_{i=1}^{r} \nu(t_i) = ht_r/\log t_r + O(t_r/\log^2 t_r) ,$$

$$gr \geqslant ht_r/\log t_r + o(t_r/\log t_r) ,$$

$$t_r \leqslant (g/h)r \log t_r + o(t_r) < (1+\eta)(g/h)r \log r ,$$

per ogni $\eta > 0$ ed r abbastanza grande. La (8) è così dimostrata.

III. – Consideriamo le proposizioni a) e b).

La a) segue immediatamente dalla (6) del Lemma 1. Da tale relazione si ha infatti che, posto

$$s = k , \quad \zeta = x , \quad \xi = x^{g/k}, \quad \varphi(\xi) = (1 + a_0)\xi$$

(con x variabile per valori interi), il numero L_k, che viene a rappresentare tutti i numeri $F(x_i)$ liberi da potenze k-esime (per $\xi \geqslant \xi_0$), soddisfa alla relazione

$$\lim_{\xi\to\infty} (L_k/\xi) = A_k .$$

Ora se fosse sempre, da un certo posto in poi, $\delta_n > 1/A_k$, dovendo essere sempre δ_n un numero intero risulterebbe evidentemente $\delta_n > (1/A_k) + \eta_1$,

---

(5) Vedasi G. Ricci, *Su un teorema di Tchebychef-Nagel*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 12, 295-303 (1933-34). La formula qui ricordata è a pag. 297.

($\eta_1 > 0$, fisso), e quindi:

$$\overline{\lim_{\xi\to\infty}}\,(L_k/\xi) < \Lambda_k \;;$$

da questo assurdo segue la a).

Per dimostrare la b) faremo ricorso al Lemma 3 e relativa Osservazione; precisamente ci riferiremo al caso $s = k$, al caso cioè che i numeri primi $t_1, \ldots, t_r, \ldots$ siano quelli per cui si ha $\nu(t_i^k) > 0$.

Fissato r, consideriamo il sistema di congruenze:

$$F(x+i) \equiv 0 \pmod{t_i^k}\,, \qquad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

Sia X la minima soluzione positiva del detto sistema. Sarà allora $X \leqslant (t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \ldots t_r)^k$. Se q_n è il massimo dei q_i, che non supera X, sarà allora:

$$\delta_n = q_{n+1} - q_n > r\,.$$

Avremo poi:

$$\text{(10)} \qquad \log X \leqslant k \sum_{i=1}^{r} \log t_i \leqslant k \sum_{p \leqslant t_r} \log p < (1+\eta_1) k t_r$$

(p è un generico numero primo), per $\eta_1 > 0$ ed r abbastanza grande.

Ora per il Lemma 3 e per la (10) risulta

$$\log X < (gk/h)(1+\eta_2) r \log r,$$

per $\eta_2 > 0$ ed r abbastanza grande, e quindi:

$$\delta_n > r > \frac{h}{gk(1+\eta_2)} \frac{\log X}{\log r}\,.$$

Sarà allora (sia per $r > \log X$, sia per $r \leqslant \log X$):

$$\delta_n > r > \frac{h-\varepsilon}{gk} \frac{\log X}{\log\log X} \geqslant \frac{h-\varepsilon}{gk} \frac{\log q_n}{\log\log q_n} \geqslant \frac{h-\varepsilon}{gk} \frac{\log n}{\log\log n}\,,$$

per $\varepsilon > 0$ ed r abbastanza grande.

Poichè r si può scegliere grande a piacere, la b) è dimostrata.

IV. – Per dimostrare la proposizione c) ci serviamo del Lemma 2, in cui poniamo:

$$\zeta = x\,, \qquad \xi = H x^{(g/k)-\alpha} (\log x)^{-\beta}\,,$$

(x varia per valori interi, H è una costante da determinarsi opportunamente).

Consideriamo al solito gli interi x_i, con $\zeta < x_i \leqslant \zeta + \xi$.

Indichiamo con y quelli fra gli x_i per cui risulta $F(y)$ libero da potenze k-esime di numeri primi minori o uguali a $c_0\xi \log \xi$. Possiamo supporre x abbastanza grande perchè tutti gli $F(x_i)$ siano positivi e diversi fra loro.

Il numero dei valori y, definiti sopra, è dato da L_k e vale la limitazione:

$$L_k > c_1 H x^{(g/k)-\alpha}/(\log x)^\beta, \qquad (c_1 = \Lambda_k/2).$$

Evidentemente i numeri $F(y)$ sono anche liberi da potenze k-esime di numeri primi maggiori di

$$(1 + a_0)x^{g/k} = c_2 x^{g/k},$$

per x abbastanza grande. Ci rimane dunque da valutare il numero di quelli fra gli $F(y)$ che sono divisibili per la k-esima potenza di un primo u tale che:

$$c_2 x^{g/k} > u > c_0 \xi \log \xi > c_3 H x^{(g/k)-\alpha}(\log x)^{1-\beta},$$

dove c_3 è una costante opportuna, indipendente da H, il quale ultimo si può pensare senz'altro > 1.

Osserviamo adesso che per ogni numero y varrà una relazione del tipo $F(y) = mu^k$.

Per il seguito della dimostrazione ci serviremo di due lemmi relativi al comportamento dei numeri m ed u.

Lemma 4. *I numeri m soddisfano alla limitazione*:

(11) $$m < \left(\frac{c_2}{c_3 H}\right)^k \cdot \left(\frac{x^\alpha}{(\log x)^{1-\beta}}\right)^k,$$

per x abbastanza grande.

Si ha infatti: $mu^k < c_2^k x^g$, e quindi:

$$m < \frac{c_2^k x^g}{u^k} < \frac{c_2^k x^g}{c_3^k H^k x^{g-\alpha k} (\log x)^{k(1-\beta)}},$$

onde segue l'asserto.

Lemma 5. *Se per due diversi valori di y, diciamo y_1 ed y_2, si hanno due diversi u associati ad uno stesso m, se cioè $F(y_1) = mu_1^k$, $F(y_2) = mu_2^k$, allora, supposto $u_1 - u_2 = Y > 0$, vale la limitazione*:

(12) $$Y < c_6 H x^{[(g-1)/k]-\alpha} m^{-1/k} (\log x)^{-\beta},$$

per x abbastanza grande [c_6 *dipende solo dai coefficienti di* $F(x)$ *e dalle costanti* g *ed* l].

Per dimostrarlo osserviamo che è:

$$0 < d = F(y_1) - F(y_2) = (y_1 - y_2)F'(X_0) < (y_1 - y_2)g(1 + a_0)x^{g-1} ,$$

e quindi [essendo $c_4 = g(1 + a_0)$]:

$$d < \xi \cdot c_4 x^{g-1} = c_4 H x^{g-\alpha-l/k} (\log x)^{-\beta} . \tag{13}$$

D'altra parte per ogni coppia m, u si ha:

$$mu^k > (1/2)\, a_0 x^g , \qquad mu^{k-1} > (1/2)\, a_0 x^g u^{-1} ;$$

ma essendo $mu^k < c_2^k x^g$, e quindi $u < c_2 x^{g/k} m^{-1/k}$, si ha in definitiva:

$$mu^{k-1} > (1/2)\, a_0 x^g m^{1/k} \cdot c_2^{-1} x^{-g/k} = c_5 x^{g-g/k} m^{1/k}. \tag{14}$$

Osserviamo infine che, per la (14), è

$$mu_1^k - mu_2^k = m(u_2 + Y)^k - mu_2^k > mku_2^{k-1} Y > c_5 k x^{g-g/k} m^{1/k} Y . \tag{15}$$

Per le (13) e (15) si ha allora:

$$c_4 H x^{g-\alpha-l/k} (\log x)^{-\beta} > c_5 k x^{g-g/k} m^{1/k} Y ,$$

e di qui, posto $c_6 = c_4/(c_5 k)$, segue senz'altro l'asserto.

Distinguiamo adesso due casi.

1) Sia dapprima $g \leqslant l$. Poniamo allora:

$$\alpha = g/(k^2 + k) , \qquad \beta = k/(k + 1) ;$$

l'esponente di x nella (12) diviene:

$$\frac{g - l}{g + l} - \alpha = \frac{g - l}{g + l} - \frac{g}{(g + l)(g + l + 1)} = \frac{g^2 - l^2 - l}{k(k + 1)} < 0 ,$$

e quindi sarà $Y < 2$ per x abbastanza grande.

Perciò ad ogni m corrisponderà un solo u e quindi il numero degli $F(y)$ divisibili per qualche u^k non supera, per la (11), il valore:

$$\left(\frac{c_2}{c_3 H}\right)^k x^{g/(k+1)} (\log x)^{-k/(k+1)} ,$$

ed è quindi minore di L_k per H abbastanza grande (si osservi che il valore da attribuire ad H dipende solo dai coefficienti del polinomio e dalle costanti g, l e c_0). Detto allora q_n il massimo dei q_i che non supera x, si ha $\delta_n < \xi$ e, ricordando che per il Lemma 1 esiste determinato e finito il $\lim_{x \to \infty} x/n$, la (4) è così provata nel caso $g \leqslant l$.

2) Sia ora $g > l$. Poniamo adesso:

$$\alpha = l/(k^2 - k)\,, \qquad \beta = 1\;;$$

ne risulta, per la (12),

$$Y < c_6 H x^{(g^2 - l^2 - g)/(k^2 - k)} \{m^{1/k} \log x\}^{-1}\,.$$

Ad ogni numero m si potranno quindi associare in generale diversi numeri u, in quantità però certo minore del corrispondente $Y = Y(m)$, quindi il numero delle possibili coppie m, u è maggiorato dall'integrale $[A = c_2^k \cdot (c_3 H)^{-k}]$:

$$\int_0^{Ax^{\alpha k}} Y\,\mathrm{d}m < c_6 H x^{(g^2 - l^2 - g)/(k^2 - k)} (\log x)^{-1} \{k/(k-1)\} \left[m^{1-1/k}\right]_0^{Ax^{\alpha k}} =$$

$$= c_7 H \cdot A^{(k-1)/k}\, x^{(g-1)/(k-1)} / \log x\,,$$

e quindi è minore di L_k per H abbastanza grande.

La (4) è così completamente dimostrata. Valgono infatti anche in questo caso le osservazioni finali fatte a proposito del caso 1).