BIANCA MANFREDI (*)

Sopra un problema cilindrico non lineare di propagazione del calore. (**)

1. – Introduzione.

Notevole, anche dal punto di vista tecnico, è l'interesse che presenta lo studio dello scambio di calore fra un solido e un fluido.

In questo caso coesistono i processi di convezione e di irraggiamento insieme a quello di conduzione. Generalmente in tali problemi si assume l'ipotesi che la velocità di scambio di calore fra gas e solido sia proporzionale alla differenza fra la temperatura superficiale del solido e quella del gas; sulla superficie Σ del solido dovrà essere quindi soddisfatta la condizione

$$K\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{\Sigma} = -f \cdot (U_{\Sigma} - \overline{U}), \tag{1}$$

dove K ed U sono rispettivamente la conduttività termica e la temperatura del solido, $\overline{U}$ la temperatura del gas, f un fattore di proporzionalità, detto comunemente *coefficiente di conducibilità*, la derivazione essendo intesa secondo la normale esterna della superficie del corpo.

Per temperature ordinarie, quando il calore si propaga principalmente per conduzione e convezione, f può ritenersi praticamente costante, mentre per alte temperature, per le quali la propagazione del calore avviene quasi esclusivamente per irraggiamento, f, come l'esperienza insegna, è in ogni istante funzione anche della temperatura superficiale del solido. La differenza notevole fra i due casi consiste nel fatto che mentre la (1) nel primo caso è *lineare*, nel secondo caso viene a mancare manifestamente tale linearità. La *non linearità* della (1) complica notevolmente lo studio del problema dal punto di vista analitico. Chiameremo nel seguito i due diversi problemi con gli appellativi

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma (Italia).
(**) Ricevuto il 3-V-1952.

di *lineare* il primo e *non lineare* il secondo. Recentemente [**6**] ([1]) i Sigg. R. MANN e F. WOLF hanno studiato il problema *non lineare* relativo al semispazio in contatto, attraverso il piano origine, con un gas mantenuto a temperatura costante, nell'ipotesi che il coefficiente di conducibilità sia funzione della sola temperatura superficiale del solido. Assumendo come incognita tale temperatura, la cui conoscenza, in ogni istante, per il teorema di DUHAMEL ([**1**], pp. 19-20) determina la temperatura in ogni punto interno al solido, essi riescono a ricondurre, con l'impiego della trasformata di LAPLACE, il problema analitico, connesso al problema fisico, alla risoluzione di un'*unica equazione integrale non lineare del tipo di Volterra* nella incognita temperatura superficiale del solido.

Il lavoro dei Sigg. R. MANN e F. WOLF mi ha suggerito lo studio, fisse le altre ipotesi, del caso *non lineare* unidimensionale offerto da un mezzo occupante, con simmetria assiale, tutto lo spazio esterno ad una superficie cilindrica $r = a$, essendo la cavità occupata da un gas tenuto a temperatura costante. Anche in questo caso è possibile ridurre il problema della determinazione della temperatura superficiale del nostro mezzo alla risoluzione di un'*unica equazione integrale non lineare di Volterra*, alla quale sono giunta con l'uso sistematico della trasformata di LAPLACE, rendendo con ciò le dimostrazioni assai più semplici di quelle del lavoro citato. L'estensione al caso cilindrico del metodo dei Sigg. R. MANN e F. WOLF mi ha permesso infine di conseguire la dimostrazione dell'esistenza e dell'unicità della soluzione del problema.

2. – Impostazione del problema.

Indichiamo con S lo spazio indefinito esterno alla superficie cilindrica di raggio $r = a$; entro la cavità cilindrica circoli un gas mantenuto a temperatura costante. Non si perde in generalità, supponendo per semplicità, questa temperatura uguale ad uno. Con tale ipotesi il coefficiente di conducibilità f è funzione soltanto della temperatura superficiale di S. Supporremo S occupato, con simmetria rispetto all'asse del cilindro $r = a$, da un mezzo omogeneo, isotropo, inizialmente a temperatura nulla; penseremo la temperatura

$$U = U(a, r, t) ,$$

in un punto di S, dipendente dal posto solo per tramite della distanza r del punto considerato dall'asse di simmetria.

([1]) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta al termine del lavoro.

Posto per brevità

$$\frac{\partial U}{\partial r} = U_r \,, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = U_{rr} \,, \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = U_t \,,$$

è noto che, quando si scelgano opportunamente le unità di tempo e di lunghezza in modo da poter considerare unitaria la conduttività K di S, il problema di trovare la distribuzione della temperatura in ogni punto di S e in ogni istante t, porta a risolvere il sistema delle seguenti relazioni:

$$U_t = U_{rr} + \frac{1}{r} U_r \,, \qquad (r > a,\ t > 0), \tag{2}$$

$$[U]_{t=0} = 0 \,, \qquad (r \geqslant a), \tag{3}$$

$$-[U_r]_{r=a} = [(1 - U)f(U)]_{r=a} \,, \qquad (t > 0), \tag{4}$$

$$0 < U < M < 1 \,, \qquad (r \geqslant a,\ t > 0), \tag{5}$$

dove si suppone che

$$U \,, \quad U_r \,, \quad U_{rr} \,, \quad U_t$$

siano funzioni continue delle loro variabili rispettivamente per

$$r \geqslant a, \quad t \geqslant 0; \quad r \geqslant a \,, \quad t > 0; \quad r > a, \quad t > 0; \quad r > a, \quad t > 0 \,.$$

Il sistema delle (2), (3), (4), (5) si indicherà brevemente nel seguito con [(2)...(5)].

La funzione

$$G\big(U(a, a, t)\big) = [(1 - U)f(U)]_{r=a} = \big(1 - U(a, a, t)\big)f\big(U(a, a, t)\big) \,,$$

proporzionale al flusso, è la funzione caratteristica del nostro problema, essa è a priori arbitraria, una volta soddisfatte alcune ipotesi che sorgono spontanee pensando al suo significato fisico. Infatti dall'esperienza è noto che il calore si propaga con continuità, che c'è flusso di calore solo se i mezzi sono a diversa temperatura e che infine la velocità di flusso è una funzione monotona crescente della differenza di temperatura fra i due mezzi; è naturale perciò supporre

a) $G\big(U(a, a, t)\big)$ funzione continua di $U(a, a, t)$,

b) $G\big(U(a, a, t)\big) = 0$ per $U(a, a, t) = 1$,

c) $G\big(U(a, a, t)\big)$ funzione monotona decrescente di $U(a, a, t)$.

3. – Legge di distribuzione della temperatura nel solido in funzione della temperatura superficiale.

Applichiamo la trasformata di LAPLACE al sistema [(2) ... (5)]. Posto

$$u = u(a, r, p) = \mathfrak{L}U = \int_0^{+\infty} e^{-pt} U \, dt,$$

$$g = g(a, a, p) = \mathfrak{L}G\big(U(a, a, t)\big) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} G\big(U(a, a, t)\big) \, dt \, ,$$

con p reale > 0, tale sistema si trasforma nel sistema

$$(2') \qquad u_{rr} + \frac{1}{r} u_r - pu = 0 \, ,$$

$$(4') \qquad -(u_r)_{r=a} = g \, ,$$

$$(5') \qquad 0 < u < \frac{M}{p} < \frac{1}{p} \, ,$$

avendo posto per brevità

$$\frac{\partial u}{\partial r} = u_r \, , \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = u_{rr} \, .$$

È noto che la soluzione generale dell'equazione (2′), ha l'espressione

$$(6) \qquad u = AI_0(sr) + BK_0(sr) \, , \qquad (s = \sqrt{p}) ,$$

con A e B costanti rispetto ad r e funzioni del parametro p, essendo I_n e K_n, le ben note funzioni di BESSEL di argomento immaginario, di ordine n, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

La (5′) richiede A identicamente nulla, mentre la (4′) assegna per B l'espressione

$$B = \frac{g}{sK_1(as)} \, .$$

Sostituendo nella (6), dopo aver posto

$$\varphi(a, r, s) = \frac{K_0(sr)}{K_1(as)} \, ,$$

si ottiene, per la soluzione del sistema [(2') ... (5')],

$$u = g \cdot \frac{1}{s} \varphi(a, r, s) . \tag{7}$$

È facile far vedere che la funzione $\varphi(a, r, s)$ è una funzione singolare nell'origine e nulla all'∞.

Infatti ricordando ([**2**], pp. 349-350) gli sviluppi in serie di K_0 e K_1, si ha

$$\lim_{s \to 0+} \varphi(a, r, s) = \lim_{s \to 0+} \frac{K_0(sr)}{K_1(as)} = \lim_{s \to 0+} \frac{-\left(\lg \frac{sr}{2} + \gamma\right)}{I_1(as)\left(\lg \frac{as}{2} + \gamma\right)},$$

dove

$$\gamma = 0{,}5772157\ldots$$

è la costante di EULERO e MASCHERONI; e quindi

$$\lim_{s \to 0+} \varphi(a, r, s) = \lim_{s \to 0+} - \frac{1}{I_1(as)}\left(1 + \frac{\lg \frac{r}{a}}{\lg \frac{as}{2} + \gamma}\right) = -\infty .$$

Ricordando ([**2**], pag. 350) le espressioni asintotiche di K_0 e K_1, si ha poi subito, essendo $r > a$,

$$\lim_{s \to +\infty} \varphi(a, r, s) = \lim_{s \to +\infty} \frac{K_0(rs)}{K_1(as)} = \lim_{s \to +\infty} e^{-(r-a)s} = 0,$$

Le osservazioni precedenti su φ ci assicurano ([**8**], pag. 226; [**4**], pag. 65) che essa è antitrasformabile e che la sua antitrasformata soddisfa alla limitazione

$$\mathfrak{L}^{-1}\varphi(a, r, s) < Ae^{\varepsilon t},$$

con ε costante positiva, fissata comunque piccola.

Allora è possibile scrivere ([**1**], pag. 243)

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\varphi(a, r, s)\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/(4t)} \left\{\mathfrak{L}^{-1}\varphi(a, r, s)\right\}_{t=u} du ;$$

quindi, ponendo per brevità

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\,\varphi\,(a, r, s)\right] = F(a, r, t)\,,$$

ed invertendo la (7) mediante il teorema di BOREL ([**8**], pag. 224; [**5**], pag. 33) si ottiene la soluzione del sistema [(2) ... (5)] sotto forma di prodotto integrale

$$U = G\big(U(a, a, t)\big) * F(a, r, t)\,, \tag{8}$$

o, ciò che è lo stesso, nella forma

$$U = \int_0^t \left[\frac{G\big(U(a, a, \tau)\big)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/\{4(t-\tau)\}}\big\{\mathcal{L}^{-1}\varphi(a, r, s)\big\}_{t=u} \mathrm{d}u\right] \mathrm{d}\tau\,. \tag{9}$$

Questa equazione dà la legge di distribuzione della temperatura nel solido in funzione della sua temperatura superficiale.

4. – Relazione fondamentale per la temperatura superficiale.

Calcoliamo il limite a cui tende la funzione U, data dalla (8), quando $r \to a$. Poichè, per ipotesi, la funzione U è continua per $r \geqslant a$ e$G\big(U(a, a, t)\big)$ è indipendente da r, passando al limite in ambo i membri di (8) si ottiene

$$U(a, a, t) = G(U(a, a, t)) * \lim_{r \to a} F(a, r, t)\,. \tag{10}$$

D'altra parte risultando la funzione $F(a, r, t)$ continua rispetto ad r, $(t \geqslant 0)$, si ha

$$\lim_{r \to a} F(a, r, t) = \lim_{r \to a} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\,\varphi(a, r, s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\,\varphi(a, a, s)\right].$$

Sostituendo nella (10), si ottiene

$$U(a, a, t) = G\big(U(a, a, t)\big) * F(a, a, t) \tag{11}$$

con

$$F(a, a, t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\varphi(a, a, s)\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/(4t)}\,\{\mathcal{L}^{-1}\varphi(a, a, s)\}_{t=u} du\,, \tag{12}$$

cioè

$$(13) \qquad U(a, a, t) = \int_0^t \frac{G(U(a, a, \tau))}{\pi^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} h(a, t-\tau)\, d\tau$$

con

$$(14) \qquad h(a, t) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2/(4t)} \{\mathcal{L}^{-1}\varphi(a, a, s)\}_{t=u} du\,.$$

Possiamo subito mostrare che la funzione $h(a, t)$ positiva e continua è, per ogni valore finito di t, minore di uno.

Infatti, essendo $\{\mathcal{L}^{-1}\varphi(a, a, s)\}_{t=u} > 0$, si ha evidentemente

$$h(a, t) < h(a, t+1)\,.$$

Ora, rispetto ad u, $e^{-u^2/4\{(t+1)\}}$ è una funzione monotona decrescente, mentre $\{\mathcal{L}^{-1}\varphi(a, a, s)\}_{t=u}$ essendo continua è integrabile; così per la prima formula di Bonnet ([3], pag. 293) si può scrivere

$$h(a, t+1) = \int_0^{\xi} \{\mathcal{L}^{-1}\varphi(a, a, s)\}_{t=u} du\,,$$

dove ξ è una costante qualunque positiva.

Ora è

$$\varphi(a, a, s) = \frac{K_0(as)}{K_1(as)} < 1$$

e quindi si ha

$$\{\mathcal{L}^{-1}\varphi(a, a, s)\}_{t=u} < \delta(u)\,,$$

essendo per definizione $\delta(u) = 0$ per ogni $u > \nu$, con $\nu > 0$ costante arbitraria, e $\delta(u) = 1/\nu$ per $u \leqslant \nu$.

Ne segue

$$h(a, t+1) < \int_0^{\xi} \delta(u)\, du = 1\,,$$

da cui

$$h(a, t) < 1\,.$$

La (13) risulta allora un'equazione integrale di Volterra di seconda specie, singolare, non lineare nella incognita temperatura superficiale ([**9**], pp. 89-91), e rappresenta la relazione fondamentale cui deve soddisfare la temperatura superficiale del corpo.

5. – Riduzione del problema ad un'equazione integrale non lineare.

Si può provare il seguente

Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $y(t)$ possa rappresentare la funzione temperatura superficiale per il nostro problema, è che $y(t)$ soddisfi all'equazione integrale non lineare di seconda specie, di Volterra,*

$$y(t) = \int_0^t G(y(\tau))F(a, a, t-\tau)\,d\tau\,, \tag{15}$$

dove

$$F(a, a, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/(4t)}\,\{\mathcal{L}^{-1}\varphi(a, a, s)\}_{t=u}\,du\,,$$

e che sia

$$0 < y(t) < 1\,. \tag{16}$$

La (15) può scriversi anche

$$y(t) = G\big(y(t)\big) * F(a, a, t)\,.$$

La detta condizione è *necessaria*, come discende immediatamente dai risultati del paragrafo precedente. Infatti la funzione U, data dalla (9), come soluzione del sistema [(2) ... (5)] deve essere tale da soddisfare all'uguaglianza

$$\lim_{r\to a} U = U(a, a, t)\,,$$

cioè deve essere necessariamente soddisfatta la (13), la quale coincide con la (15) quando in essa si legga $y(t)$ al posto di $U(a, a, t)$. Inoltre la (5) prova la necessarietà della (16).

Per provare che la detta condizione è *sufficiente*, ammettiamo per ipotesi che esista una funzione $y(t)$ che soddisfi alle (15) e (16) e dimostriamo che la funzione definita dalla (8), quando in essa si ponga $U(a, a, t) = y(t)$, cioè

$$U = G\big(y(t)\big) * F(a, r, t)\,, \tag{17}$$

con

$$F(a, r, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/(4t)} \{\mathcal{L}^{-1}\varphi(a, r, s)\}_{t=u} \, du ,$$

rappresenta la soluzione del sistema [(2) ... (5)].

Osserviamo subito che la funzione U, data dalla (17), soddisfa alle ipotesi per cui vale il teorema fondamentale della trasformata di LAPLACE ([**5**], pag. 26; [**4**], pag. 152):

$$\mathcal{L}U_t = p\mathcal{L}(U) - U_0 , \qquad \text{con} \qquad U_0 = \lim_{t\to 0} U . \tag{18}$$

Essa soddisfa inoltre alle ipotesi per cui vale il seguente teorema ([**2**], pag. 255):

$$\lim_{p\to+\infty} (pu) = \lim_{t\to 0} U , \tag{19}$$

potendosi facilmente verificare, come subito mostreremo, che è

$$\lim_{p\to+\infty} u = 0 .$$

Infatti, essendo $G(U(a, a, t))$, per ipotesi, positiva, monotona decrescente quindi limitata, indicando con L l'estremo superiore di G, si ha evidentemente

$$\lim_{p\to+\infty} g = \lim_{p\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-pt} G \, dt \leqslant \lim_{p\to+\infty} L \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = L \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p} = 0 .$$

Premesso ciò, essendo $p = s^2$, dalla (7) discende

$$\lim_{p\to+\infty} (pu) = 0$$

in modo che, per la (19), si ha

$$\lim_{t\to 0} U = U = 0 ,$$

come vuole la (3).

Dalla (18) si ha allora

$$U_t = \mathcal{L}^{-1}(pu) ,$$

od anche, ricordando l'espressione (7) di u,

$$U_t = \mathcal{L}^{-1}\left(g \cdot s \frac{K_0(rs)}{K_1(as)}\right) .$$

Se si osserva che la funzione $s\dfrac{K_0(rs)}{K_1(as)}$ regolare e nulla all'∞ ([5], pag. 37), è antitrasformabile, si ha

$$U_t = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\mathfrak{L}G\cdot\mathfrak{L}\mathfrak{L}^{-1}\left(s\frac{K_0(rs)}{K_1(as)}\right)\right\} = \mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{L}\left\{G * \mathfrak{L}^{-1}\left(s\frac{K_0(rs)}{K_1(as)}\right)\right\},$$

cioè

$$U_t = G * \mathfrak{L}^{-1}\left\{s\frac{K_0(rs)}{K_1(as)}\right\}. \tag{20}$$

Deriviamo due volte rispetto ad r ambo i membri della (17). Si ottiene

$$U_r = G * F_r\,, \qquad U_{rr} = G * F_{rr}\,, \tag{21}$$

dove ([4], pag. 290)

$$F_r = \mathfrak{L}^{-1}\frac{K_0'(sr)}{K_1(as)}\,, \qquad F_{rr} = \mathfrak{L}^{-1}\left(s\frac{K_0''(sr)}{K_1(as)}\right),$$

avendo indicato con gli apici le derivazioni rispetto all'argomento (sr).

Si ha quindi

$$U_{rr} + \frac{1}{r}U_r = G * \mathfrak{L}^{-1}\left(s\frac{K_0''(sr)}{K_1(as)} + \frac{1}{r}\frac{K_0'(sr)}{K_1(as)}\right),$$

od anche ([7], pag. 112)

$$U_{rr} + \frac{1}{r}U_r = G * \mathfrak{L}^{-1}\left(s\frac{K_0(sr)}{K_1(as)}\right),$$

dove il secondo membro coincide con il secondo membro della (20).

Rimane così verificata anche la (2).

Per verificare la (4), dalla prima delle (21) si ha

$$\lim_{r\to a} U_r = \lim_{r\to a}\{G * F_r\}\,,$$

ossia, essendo G costante rispetto ad r,

$$\lim_{r\to a} U_r = -\,G * \delta(t)\,.$$

Avendosi, per la definizione di $\delta(t)$,

$$\lim_{r\to a} U_r = -\lim_{\nu\to 0}\left[\frac{1}{\nu}\int_0^{\nu} G(\tau)\,d\tau\right] = -\lim_{\nu\to 0} G(t-\theta\nu)\,, \qquad (0<\theta<1),$$

per la continuità della funzione G si ottiene

$$\lim_{r\to a} U_r = -G(t) ,$$

con che la (4) è verificata.

Mostriamo infine che è

$$0 < U < M < 1 .$$

Essendo

$$F(a, a, t) \neq 0 ,$$

la (17) può scriversi

$$U = G * \left\{F(a, a, t) \frac{F(a, r, t)}{F(a, a, t)}\right\}$$

od anche, rimanendo costante il segno delle funzioni $F(a, a, t)$ e $G\big(U(a, a, t)\big)$,

$$U = \frac{F(a, r, t-\tau_1)}{F(a, a, t-\tau_1)} \{G * F(a, a, t)\} , \qquad (0 < \tau_1 < \tau),$$

con che per la (15)

(22) $$U = \frac{F(a, r, t-\tau_1)}{F(a, a, t-\tau_1)} y(t) .$$

Giova osservare che risulta

(23) $$0 < \frac{F(a, r, t-\tau_1)}{F(a, a, t-\tau_1)} < 1 .$$

Infatti essendo

$$0 < \frac{K_0(rs)}{K_1(as)} < \frac{K_0(as)}{K_1(as)} ,$$

è anche

$$0 < \mathfrak{L}^{-1} \frac{K_0(rs)}{K_1(as)} < \mathfrak{L}^{-1} \frac{K_0(as)}{K_1(as)} ,$$

e perciò risulta pure, dalle espressioni di $F(a, r, t)$ e di $F(a, a, t)$,

$$0 < F(a, r, t) < F(a, a, t)$$

e quindi la (23).

Sostituendo la (23) nella (22), quando si tenga conto della (16), si ha subito, come volevamo,

$$0 < U < M < 1 .$$

Possiamo perciò concludere che ogni soluzione dell'equazione integrale non lineare (15), la quale sia minore di uno, determina attraverso la (17) una soluzione del nostro problema cilindrico con condizioni al contorno non lineari.

6. – Esistenza ed unicità della soluzione del problema.

La dimostrazione dell'esistenza ed unicità della soluzione della (15) con la (16) può ottenersi con il metodo seguito dai Sigg. R. MANN e F. WOLF, estendendosi facilmente al nostro caso gli analoghi teoremi del citato lavoro.

Ci limitiamo, per brevità, a riportare, per il caso cilindrico, la dimostrazione del seguente risultato fondamentale.

Sia

$$J(y(t)) = \int_0^t \frac{G^*(y(\tau))}{\pi^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} h(t-\tau)\, d\tau \quad , \tag{24}$$

con

$$G^*(y(t)) \equiv \begin{cases} G(y(t)) & \text{per} \quad y(t) \leqslant 1 , \\ 0 & \text{per} \quad y(t) \geqslant 1 \end{cases}$$

ed $h(t)$ data dalla (14), una trasformazione definita per ogni t che varia in un intervallo chiuso $(0, T)$: tale trasformazione muta in se stesso uno spazio Y di funzioni $y(t)$ non negative, limitate, equicontinue, soddisfacenti cioè la disuguaglianza

$$|y(t_2) - y(t_1)| < \frac{4G_0}{\pi^{1/2}} (t_2 - t_1)^{1/2} , \quad (0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T) ,$$

dove è $G_0 = G(y_0) = G(0)$.

Indichiamo infatti con $\bar{y}(t)$ la funzione trasformata secondo la (24) della generica funzione $y(t)$ di Y; ricordando che $G(y(t))$ e quindi $G^*(y(t))$ è una funzione monotona decrescente di y, si ha subito che se è

$$0 = y_0(t) < y(t)$$

è pure

$$J(0) = J(y_0) > J(y) = \bar{y} ,$$

cioè la funzione trasformata è ancora non negativa e limitata superiormente da $J(0)$; inoltre, per $t_2 > t_1$, si ha

$$|\overline{y}(t_2) - \overline{y}(t_1)| = \left| \int_0^{t_2} \frac{G^*(y(\tau))}{\pi^{1/2}(t_2-\tau)^{1/2}} h(t_2-\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^{t_1} \frac{G^*(y(\tau))}{\pi^{1/2}(t_1-\tau)^{1/2}} h(t_1-\tau)\,\mathrm{d}\tau \right|$$

od anche

$$|\overline{y}(t_2) - \overline{y}(t_1)| < \frac{G}{\pi^{1/2}} \left| \int_0^{t_2} (t_2-\tau)^{-1/2} h(t_2-\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^{t_1} (t_1-\tau)^{-1/2} h(t_1-\tau)\,\mathrm{d}\tau \right| .$$

Applichiamo ora il teorema generalizzato della media ([3], pag. 287) ai due integrali a secondo membro:

$$|\overline{y}(t_2) - \overline{y}(t_1)| < \frac{G_0}{\pi^{1/2}} \left| h(t_2-\tau_2) \int_0^{t_2} (t_2-\tau)^{-1/2}\,\mathrm{d}\tau - h(t_1-\tau_1) \int_0^{t_1} (t_1-\tau)^{-1/2}\,\mathrm{d}\tau \right| ,$$

con

$$0 < \tau_2 < t_2 , \qquad 0 < \tau_1 < t_1 .$$

Posto

$$t_1 - \tau_1 > t_2 - \tau_2 ,$$

risulta, come abbiamo osservato nel n. 4,

$$h(t_2-\tau_2) < h(t_1-\tau_1) < 1 ;$$

si ottiene allora

$$|\overline{y}(t_2) - \overline{y}(t_1)| < \frac{G_0}{\pi^{1/2}} \left| \int_0^{t_2} (t_2-\tau)^{-1/2}\,\mathrm{d}\tau - \int_0^{t_1} (t_1-\tau)^{-1/2}\,\mathrm{d}\tau \right|$$

od anche

$$|\overline{y}(t_2) - \overline{y}(t_1)| < \frac{G_0}{\pi^{1/2}} \left\{ \left| \int_0^{t_1} \left((t_2-\tau)^{-1/2} - (t_1-\tau)^{-1/2} \right) \mathrm{d}\tau \right| + \left| \int_{t_1}^{t_2} (t_2-\tau)^{-1/2}\,\mathrm{d}\tau \right| \right\},$$

cioè

$$|\overline{y}(t_2) - \overline{y}(t_1)| < \frac{2G_0}{\pi^{1/2}} \left\{ \left| t_2^{1/2} - t_1^{1/2} - (t_2-t_1)^{1/2} \right| + (t_2-t_1)^{1/2} \right\}.$$

Infine si verifica facilmente che è

$$|t_2^{1/2} - t_1^{1/2} - (t_2 - t_1)^{1/2}| < (t_2 - t_1)^{1/2},$$

per cui risulta proprio

$$|\overline{y}(t_2) - \overline{y}(t_1)| < \frac{4G_0}{\pi^{1/2}} (t_2 - t_1)^{1/2},$$

cioè la funzione $\overline{y}$ appartiene ancora all'insieme Y.

Così in perfetta analogia coi Sigg. R. MANN e F. WOLF possiamo senz'altro affermare:

1°) Se la funzione caratteristica $G(y)$ soddisfa alle ipotesi a), b), c) del n. 2, ed è del resto arbitraria, l'equazione (15) ammette sempre almeno una soluzione minore di uno in ogni intervallo chiuso $(0, T)$, preso grande a piacere.

2°) Se la funzione $G(y)$ è inoltre lipschitziana d'ordine uno nell'intervallo chiuso $(0, 1)$, tale soluzione è unica ed è rappresentata dal limite cui converge la successione delle funzioni approssimanti, definite da

$$y_{n+1} = J(y_n)$$

con $y_0 = 0$.

3°) Se la funzione $G(y)$ è per di più analitica in $(0, 1)$, allora tale soluzione risulta analitica e monotona crescente.

Bibliografia.

[1] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER: *Conduction of heat in solids*, Oxford 1948.

[2] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER: *Operational methods in applied Mathematics*, Oxford 1949.

[3] U. DINI: *Lezioni di Analisi infinitesimale*, Vol. II, Parte I, Nistri, Pisa 1909.

[4] G. DOETSCH: *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Dover Publication, New-York 1943.

[5] A. GHIZZETTI: *Calcolo simbolico*, N. Zanichelli, Bologna 1943.

[6] W. R. MANN and F. WOLF: *Heat transfer between solids and gasses under nonlinear boundary conditions*, Q. Appl. Math. 9, 163-184 (1951).

[7] F. E. RELTON: *Applied Bessel functions*, London 1946.

[8] G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte II, N. Zanichelli, Bologna 1941.

[9] V. VOLTERRA: *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, Gauthier-Villars, Paris 1913.