CATALDO AGOSTINELLI (*)

Sul moto di rotolamento su un piano orizzontale di una sfera pesante a struttura giroscopica rispetto a un diametro. (**)

1. – Introduzione.

Sono ben note le leggi del movimento di una sfera omogenea pesante su un piano orizzontale scabro. Ma se la sfera, pur avendo il suo baricentro coincidente col centro geometrico, è a struttura dissimmetrica rispetto a questo punto, il problema dello strisciamento o del rotolamento diventa molto più difficile e in generale non risolubile per quadrature. Purtuttavia vi è un caso particolarmente interessante riducibile appunto alle quadrature, che non mi risulta segnalato da altri, ed è quello in cui la sfera è a struttura giroscopica rispetto a un diametro e rotola senza strisciare sul piano orizzontale.

Una tale possibilità è consentita dall'esistenza, in ogni moto di puro rotolamento della sfera, di un integrale vettoriale dei momenti della quantità di moto, oltre che dell'integrale dell'energia. Più precisamente, se il vettore costante dell'itegrale dei momenti ha direzione verticale, allora, qualunque sia la struttura della sfera rispetto al centro, il suo moto relativo a questo punto si riduce a un moto alla POINSOT.

Se invece la sfera ha struttura giroscopica rispetto a un diametro il suo moto di rotolamento è determinato da quadrature qualunque sia la direzione del vettore costante dell'integrale dei momenti.

2. – Equazioni del movimento e integrali primi.

Sia a il raggio della sfera, O il suo baricentro, che supporremo coincidente col centro di figura, M il punto di essa che istante per istante si porta in con-

(*) Professore o. della Università di Torino. Indirizzo: Corso Duca degli Abruzzi 34 bis, Torino (Italia).

(**) Ricevuto il 12-XII-1952.

tatto col piano orizzontale (ξ, η) su cui rotola, $\boldsymbol{\chi}$ il versore della verticale ascendente, $\boldsymbol{\omega}$ il vettore che rappresenta la velocità angolare di rotazione della sfera.

La condizione di puro rotolamento è espressa dall'annullarsi della velocità del punto M, cioè

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \wedge (M - O) = 0\,, \qquad (M - O = -a\boldsymbol{\chi}),$$

e da questa ricaviamo l'equazione

$$\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}t} = a\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\chi}\,, \tag{1}$$

che definisce la velocità del punto O.

Indicando ancora con m la massa della sfera, con $\boldsymbol{K}$ il vettore momento della quantità di moto rispetto ad O, con g l'accelerazione della gravità e con $\boldsymbol{\Phi}$ la reazione del piano di appoggio, applicata in M, le equazioni cardinali della Dinamica porgono nel nostro caso:

$$m\frac{\mathrm{d}^2O}{\mathrm{d}t^2} = -mg\boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\Phi}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t} = (M - O) \wedge \boldsymbol{\Phi}\,,$$

dalle quali, eliminando l'incognita reazione $\boldsymbol{\Phi}$ e ricordando che $M - O = -a\boldsymbol{\chi}$, si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t} + ma\boldsymbol{\chi} \wedge \frac{\mathrm{d}^2O}{\mathrm{d}t^2} = 0\,, \tag{2}$$

che per la (1) si può scrivere anche

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t} + ma^2\boldsymbol{\chi} \wedge \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \boldsymbol{\chi}\right) = 0\,. \tag{2'}$$

Il moto di rotolamento della sfera è dunque definito dalle equazioni vettoriali (1) e (2').

Essendo $\boldsymbol{\chi}$ un versore costante la (2') porge senz'altro il seguente integrale vettoriale del momento della quantità di moto

$$\boldsymbol{K} + ma^2\boldsymbol{\chi} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\chi}) = \boldsymbol{c}\,, \tag{3}$$

ove $\boldsymbol{c}$ è un vettore costante arbitrario.

Moltiplicando ancora la (2') scalarmente per $\boldsymbol{\omega}$, essendo, come si sa,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{\omega})\,,$$

e osservando ancora che

$$\boldsymbol{\chi} \wedge \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \boldsymbol{\chi}\right) \times \boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \boldsymbol{\chi}\right) \times (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\chi}) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\chi})^2 ,$$

si deduce l'integrale dell'energia

(4) $$\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{\omega} + ma^2(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\chi})^2 = h , \qquad \text{(con } h \text{ costante).}$$

In virtù della (3) il primo membro di questa equazione è uguale ad $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}$; ne segue pertanto

(5) $$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c} = h$$

la quale esprime che durante il moto è costante la componente del vettore velocità angolare secondo la direzione fissa del vettore $\boldsymbol{c}$.

Con riferimento ad una terna fissa di assi cartesiani ortogonali $\Omega(\xi\eta\zeta)$ con l'origine in punto Ω del piano su cui rotola la sfera e con l'asse ζ verticale verso l'alto, indicheremo con ω_1, ω_2, ω_3 le componenti del vettore $\boldsymbol{\omega}$, con c_1, c_2, c_3 quelle del vettore costante $\boldsymbol{c}$, e con ξ, η le coordinate orizzontali del centro della sfera. Siano inoltre: $O(XYZ)$ una terna di assi di direzione invariabile con l'origine in O e paralleli agli assi fissi; $O(xyz)$ la terna di assi principali d'inerzia rispetto al punto O ed A, B, C i corrispondenti momenti principali d'inerzia della sfera; $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ i versori degli assi x, y, z; p, q, r le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ secondo questi stessi assi; θ, φ, ψ gli angoli di EULERO che in ogni istante individuano la posizione della terna solidale $O(xyz)$ rispetto alla terna di direzioni invariabili $O(XYZ)$.

Le equazioni vettoriali del moto (1) e (2′) danno allora luogo alle seguenti equazioni scalari:

(6) $$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = a\omega_2 , \qquad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = -a\omega_1 ,$$

(7) $$\begin{cases} A_1 \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - (B_1 - C_1)qr - ma^2 \dfrac{\mathrm{d}\omega_3}{\mathrm{d}t} \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta = 0 , \\[2ex] B_1 \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} - (C_1 - A_1)rp - ma^2 \dfrac{\mathrm{d}\omega_3}{\mathrm{d}t} \cos\varphi \operatorname{sen}\theta = 0 , \\[2ex] C_1 \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} - (A_1 - B_1)pq - ma^2 \dfrac{\mathrm{d}\omega_3}{\mathrm{d}t} \cos\theta = 0 , \end{cases}$$

ove si è posto

$$A_1 = A + ma^2, \qquad B_1 = B + ma^2, \qquad C_1 = C + ma^2,$$

ed è

$$(8)\quad \begin{cases} p = \dot\psi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \dot\theta\cos\varphi\,, \\ q = \dot\psi \operatorname{sen}\theta\cos\varphi - \dot\theta \operatorname{sen}\varphi\,, \\ r = \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi\,, \end{cases} \qquad (9)\quad \begin{cases} \omega_1 = \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi\,, \\ \omega_2 = \dot\theta \operatorname{sen}\psi - \dot\varphi \operatorname{sen}\theta\cos\psi\,, \\ \omega_3 = \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\,, \end{cases}$$

nelle quali il punto sovrapposto alle lettere θ, φ, ψ rappresenta derivazione rispetto al tempo.

Gli integrali (3) e (4), e la relazione (5) si possonò così scrivere rispettivamente:

$$(3')\qquad A_1 p\boldsymbol{i} + B_1 q\boldsymbol{j} + C_1 r\boldsymbol{k} - ma^2\omega_3\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{c}\,,$$

$$(4')\qquad A_1p^2 + B_1q^2 + C_1r^2 - ma^2\omega_3^2 = h\,,$$

$$(5')\qquad c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_3 = h\,.$$

3. – Caso in cui il vettore costante *c* del momento della quantità di moto è verticale.

Nel caso in cui il vettore costante $\boldsymbol{c}$ dell'integrale del momento della quantità di moto è verticale ($c_1 = c_2 = 0$, $c_3 \neq 0$), la (5′) porge

$$(10)\qquad \omega_3 = h/c_3\,, \qquad \text{(con } h/c_3 \text{ costante)},$$

e le equazioni (7) si riducono a quelle del moto alla POINSOT di un corpo rigido con un punto fisso, i cui momenti principali d'inerzia rispetto a questo punto sono A_1, B_1, C_1.

In questo caso le componenti p, q, r della velocità angolare si ottengono, come si sa, in funzione del tempo per mezzo di integrali ellittici.

Osserviamo ora che, essendo $\boldsymbol{c} = c_3\boldsymbol{\chi}$, tenendo conto della (10), le equazioni (3′), (4′) diventano

$$(11)\qquad \boldsymbol{K} + ma^2\boldsymbol{\omega} \equiv A_1p\boldsymbol{i} + B_1q\boldsymbol{j} + C_1r\boldsymbol{k} = K_0\boldsymbol{\chi}\,,$$

$$(12)\qquad A_1p^2 + B_1q^2 + C_1r^2 = (K_0/c_3)h\,,$$

ove per semplicità si è posto

$$K_0 = (ma^2h + c_3^2)/c_3 .$$

Elevando a quadrato ambo i membri della (11) si ha

$$(11') \qquad A_1^2p^2 + B_1^2q^2 + C_1^2r^2 = K_0^2$$

e questa, insieme alla (12), determinano p e q in funzione di r, la quale si ricaverà in funzione del tempo con quadratura ellittica dalla terza delle (7), ove si faccia $\omega_3 = \text{cost.}$.

Dalla (11), proiettando sugli assi mobili, si ha ancora

$$A_1p = K_0 \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta\,, \qquad B_1q = K_0 \cos\varphi \operatorname{sen}\theta\,, \qquad C_1r = K_0 \cos\theta$$

e da queste si deduce senz'altro

$$\cos\theta = (C_1/K_0)r\,, \qquad \tan\varphi = (A_1p)/(B_1q)$$

che danno $\cos\theta$ e $\tan\varphi$ in funzione di p, q, r e quindi di t.

In quanto all'angolo di precessione ψ osserviamo che dalle relazioni

$$\omega_3 \equiv \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta = h/c_3\,, \qquad r = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta$$

eliminando $\dot\varphi$ si ottiene

$$\dot\psi = \frac{(h/c_3) - r\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{K_0(hK_0 - c_3C_1r^2)}{c_3(K_0 - C_1^2r^2)}$$

e con una quadratura si ricava ψ in funzione del tempo.

Infine dalle (6), con altre due quadrature si otterranno in funzione di t le coordinate orizzontali ξ, η del centro della sfera.

4. – Caso in cui la sfera è a struttura giroscopica rispetto a un diametro.

Se supponiamo ora che la sfera rotolante sia a struttura giroscopica rispetto a un diametro, e sia esso quello scelto come asse z, avremo $A = B$, e quindi $A_1 = B_1$.

In questo caso il vettore $\boldsymbol{K}$ del momento della quantità di moto si può scrivere nella forma

$$\boldsymbol{K} = A(\boldsymbol{\omega} - r\boldsymbol{k}) + Cr\boldsymbol{k} = A\boldsymbol{\omega} + (C - A)r\boldsymbol{k} .$$

Pertanto l'integrale (3) diventa

$$A_1[\boldsymbol{\omega} + (A/A_1)\varepsilon r\boldsymbol{k}] - ma^2\omega_3\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{c} , \tag{13}$$

ove si è posto

$$\varepsilon = (C - A)/A = (C_1 - A_1)/A ,$$

e sarà ε positivo o negativo secondochè l'ellissoide d'inerzia è schiacciato oppure allungato secondo i poli.

Proiettando ambo i membri della (13) sugli assi fissi si hanno i tre integrali scalari

$$\begin{cases} \omega_1 + (A/A_1)\varepsilon r \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta = c_1/A_1 , \\ \omega_2 - (A/A_1)\varepsilon r \cos \psi \operatorname{sen} \theta = c_2/A_1 , \\ \omega_3 + \varepsilon r \cos \theta = c_3/A . \end{cases} \tag{14}$$

Inoltre l'integrale dell'energia diventa

$$\omega^2 + \frac{\varepsilon A}{A_1} r^2 - \frac{ma^2}{A_1} \omega_3^2 = \frac{h}{A_1} . \tag{15}$$

Dalle equazioni (14), ponendo

$$c_1 = c_0 \cos \alpha , \qquad c_2 = c_0 \operatorname{sen} \alpha$$

con c_0 ed α costanti arbitrarie al pari di c_1 e c_2, si ricava facilmente

$$\omega_1 \cos \psi + \omega_2 \operatorname{sen} \psi = (c_0/A_1) \cos (\psi - \alpha) ,$$

$$\omega_1 \operatorname{sen} \psi - \omega_2 \cos \psi + (A/A_1)\varepsilon r \operatorname{sen} \theta = (c_0/A_1) \operatorname{sen} (\psi - \alpha) ,$$

$$c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_3 + (A/A_1)\varepsilon r \operatorname{sen} \theta \cdot c_0 \operatorname{sen} (\psi - \alpha) + \\ + c_3\varepsilon r \cos \theta = (c_0^2/A_1) + (c_3^2/A),$$

le quali, in virtù delle (9) e della (5′), diventano

$$(16)\qquad \begin{cases} \dot\theta = (c_0/A_1)\cos(\psi-\alpha)\,, \\ \dot\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta + (A/A_1)\varepsilon r\,\mathrm{sen}\,\theta = (c_0/A_1)\,\mathrm{sen}\,(\psi-\alpha)\,, \\ (A/A_1)\varepsilon r[c_0\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\mathrm{sen}\,(\psi-\alpha) + (A_1/A)c_3\cos\theta] = (c_0^2/A_1) + (c_3^2/A) - h\,, \end{cases}$$

ove è $r = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta$.

Le equazioni (16) costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali del prim'ordine in cui sono funzioni incognite del tempo i tre angoli di Eulero θ, φ, ψ. Per la determinazione effettiva di questi angoli procederemo nel modo seguente.

Quadrando le prime due delle (14), e sommando quindi membro e membro, si ottiene

$$\omega_1^2+\omega_2^2+(A^2/A_1^2)\varepsilon^2r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta+2(A/A_1)\varepsilon r\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot(\omega_1\,\mathrm{sen}\,\psi-\omega_2\cos\psi)=(c_1^2+c_2^2)/A_1^2,$$

cioè, per le prime due delle (9),

$$(17)\qquad \dot\theta^2 + [\dot\varphi + (A/A_1)\varepsilon r]^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta = c_0^2/A_1^2\,,\qquad \text{con}\quad c_0^2 = c_1^2 + c_2^2\,.$$

Analogamente dall'integrale (15) dell'energia si ha

$$\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + (A/A_1)\varepsilon r^2 + (A/A_1)\omega_3^2 = h/A_1$$

e sottraendo questa membro a membro dalla (17) si ottiene

$$(18)\qquad 2(A/A_1)\varepsilon r\dot\varphi\,\mathrm{sen}^2\,\theta - (A/A_1)\varepsilon r^2[1-(A/A_1)\varepsilon\,\mathrm{sen}^2\,\theta] - (A/A_1)\omega_3^2 = $$
$$= (c_0^2/A_1^2) - (h/A_1)\,.$$

Dalla terza delle (14), ricordando i valori di ω_3 e di r, si ha ora

$$(19)\qquad \dot\psi = \frac{c_3 - C\dot\varphi\cos\theta}{A(1+\varepsilon\cos^2\theta)}$$

e quindi, eliminato $\dot\psi$ dalle espressioni di r e di ω_3, si ricava

$$r = \frac{c_3\cos\theta + A\dot\varphi\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{A(1+\varepsilon\cos^2\theta)}\,,\qquad \omega_3 = \frac{c_3 - A\varepsilon\dot\varphi\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{A(1+\varepsilon\cos^2\theta)}\,.$$

Sostituendo nelle equazioni (17) e (18), queste, con facili calcoli, porgono

$$\dot\theta^2 + \left[\frac{\varepsilon c_3 \cos\theta + (C_1 + \varepsilon m a^2 \cos^2\theta)\dot\varphi}{A_1(1+\varepsilon\cos^2\theta)}\right]^2 \operatorname{sen}^2\theta = \frac{c_0^2}{A_1^2}, \tag{20}$$

$$\frac{\varepsilon A}{A_1}\,\frac{C_1 + m a^2 \varepsilon \cos^2\theta}{(1+\varepsilon\cos^2\theta)^2}\left(\dot\varphi^2 \operatorname{sen}^4\theta + 2\,\frac{c_3}{A}\cos\theta\cdot\dot\varphi\operatorname{sen}^2\theta\right) - \tag{21}$$

$$- \frac{c_3^2}{A(1+\varepsilon\cos^2\theta)^2}\left(1+\varepsilon\cos^2\theta - \frac{A}{A_1}\,\varepsilon\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\right) = \frac{c_0^2}{A_1} - h\,.$$

L'equazione (21), che si può scrivere anche nella forma

$$\frac{\varepsilon A}{A_1}\,(C_1 + m a^2\varepsilon\cos^2\theta)\left(\dot\varphi\operatorname{sen}^2\theta + \frac{c_3}{A}\cos\theta\right)^2 = \tag{21'}$$

$$= \frac{c_3^2}{A}\left[1 + \varepsilon\,\frac{C_1 + m a^2}{A_1}\cos^2\theta + \frac{\varepsilon}{A_1}(A + m a^2\varepsilon)\cos^4\theta\right] + \left(\frac{c_0^2}{A_1} - h\right)(1+\varepsilon\cos^2\theta)^2\,,$$

fornisce $\dot\varphi$ in funzione di θ. Eliminando allora $\dot\varphi$ dalla (20), si ha l'equazione risolvente che con una quadratura, ed una inversione, dà θ in funzione del tempo. Dopo ciò si ha anche $\dot\varphi$ in funzione del tempo e quindi φ, in funzione di t, con un'altra qnadratura. La (19) poi, con una ulteriore quadratura, darà ψ in funzione di t.

Poichè in tal modo ω_1 ed ω_2 risulteranno funzioni note del tempo, dalle (6) infine, con due ultime quadrature, si otterranno le coordinate ξ, η del centro della sfera.

È opportuno osservare che se si suppone $\varepsilon > 0$ (ellissoide d'inerzia schiacciato) la (21′) fornisce due valori reali di $\dot\varphi$ se

$$\frac{c_3^2}{A}\left[1 + \varepsilon\,\frac{C_1 + m a^2}{A_1}\cos^2\theta + \frac{\varepsilon}{A_1}(A + m a^2\varepsilon)\cos^4\theta\right] + \left(\frac{c_0^2}{A_1} - h\right)(1+\varepsilon\cos^2\theta)^2 > 0\,,$$

la quale condizione è certamente soddisfatta per ogni valore di θ se

$$h \leqslant c_0^2/A_1\,,$$

o più in generale se fra le costanti di struttura e le costanti arbitrarie c_0, c_3, h sono verificate le relazioni

$$\frac{c_0^2}{A_1} - h > - \frac{c_3^2(A + ma^2\varepsilon)}{AA_1\varepsilon},$$

$$(\varepsilon - 1)\left(\frac{c_0^2}{A_1} - h\right) < \frac{c_3^2}{4A_1AC}\,[4A_1(A + ma^2\varepsilon) - \varepsilon(C_1 + ma^2)^2]\,.$$

5. – Alcuni casi particolari.

a) Un caso particolare degno di rilievo si ha quando $c_3 = 0$, cioè il vettore costante dell'integrale dei momenti è orizzontale. In tal caso la (21′) porge

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{A_1}{\varepsilon A}\left(\frac{c_0^2}{A_1} - h\right)\frac{(1 + \varepsilon\cos^2\theta)^2}{(C_1 + ma^2\varepsilon\cos^2\theta)\,\mathrm{sen}^4\theta}, \tag{22}$$

e si hanno due valori reali di $\dot{\varphi}$ (uguali in valore assoluto e di segni opposti), se

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{c_0^2}{A_1} - h\right) > 0\,. \tag{23}$$

L'equazione (20), eliminando $\dot{\varphi}$, con facili trasformazioni si riduce alla seguente

$$\left(\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{hC_1 - c_0^2}{\varepsilon AA_1}\left[1 - \frac{ma^2\varepsilon(c_0^2 - hA_1)}{A_1(hC_1 - c_0^2)}\cos^2\theta\right]. \tag{24}$$

Per $\varepsilon > 0$, $(C > A)$, tenendo conto della (23), si riconosce subito che per la realtà del moto deve essere ancora $hC_1 - c_0^2 > 0$, e quindi

$$c_0^2/C_1 < h < c_0^2/A_1\,.$$

Sarà inoltre

$$\frac{ma^2\varepsilon(c_0^2 - hA_1)}{A_1(hC_1 - c_0^2)} > 1\,.$$

Ponendo allora

$$\frac{A_1}{ma^2\varepsilon}\,\frac{hC_1 - c_0^2}{c_0^2 - hA_1} = \cos^2\theta_0\,, \qquad \frac{hC_1 - c_0^2}{\varepsilon AA_1} = \alpha^2\cos^2\theta_0\,,$$

si ottiene

$$\cos\theta = \cos\theta_0\cdot\cos\alpha(t - t_0)\,,$$

e l'angolo θ varierà periodicamente fra θ_0 e $\pi - \theta_0$ con periodo uguale a $2\pi/\alpha$. Gli altri elementi del moto si otterranno con quadrature.

In questo caso, essendo $c_3 = 0$, la (5′) diventa

$$c_1\omega_1 + c_2\omega_2 = h$$

e allora dalle equazioni (6) del moto del centro della sfera si ha

$$c_2 \frac{d\xi}{dt} - c_1 \frac{d\eta}{dt} = ah$$

e sussiste l'integrale primo

$$c_2\xi - c_1\eta = aht + \text{cost.}\,.$$

b) Nel caso in cui il vettore $\boldsymbol{c}$ ha direzione verticale ($c_1 = c_2 = 0$), si è già visto nel n. 3 che il moto della sfera si determina con quadrature qualunque sia la sua struttura. Se più in particolare supponiamo ora che essa sia a struttura giroscopica ($A = B$), poichè facendo $c_1 = c_2 = 0$ risulta $c_0 = 0$, le equazioni (16) porgono

$$\dot\theta = 0\,, \qquad \dot\varphi + (A/A_1)\varepsilon r = 0\,, \qquad c_3\varepsilon r \cos\theta = (c_3^2/A) - h\,,$$

da cui si ricava

$$\theta = \theta_0 \ \ (\text{costante})\,, \qquad r = r_0 = \frac{c_3^2 - Ah}{Ac_3\varepsilon\cos\theta_0}\,,$$

$$\dot\varphi = \dot\varphi_0 = -\frac{A\varepsilon}{A_1} r_0\,, \qquad \dot\psi = \dot\psi_0 = \frac{C_1}{A_1}\frac{r_0}{\cos\theta_0}\,.$$

Gli angoli φ, ψ varieranno dunque linearmente col tempo e il moto della sfera rispetto al centro sarà un moto di precessione regolare intorno alla verticale passante per esso. Questo segue anche immediatamente dalle equazioni (7), che per $A_1 = B_1$, $\omega_3 =$ cost. si riducono a quelle del moto alla POINSOT di un corpo giroscopico.

Le prime due delle (14) porgono ora

$$\omega_1 = -(A/A_1)\varepsilon r_0 \operatorname{sen}\theta_0\cdot\operatorname{sen}\psi\,, \qquad \omega_2 = (A/A_1)\varepsilon r_0 \operatorname{sen}\theta_0\cdot\cos\psi\,,$$

e le equazioni (6) diventano

$$\frac{d\xi}{dt} = a\frac{A\varepsilon}{A_1} r_0 \operatorname{sen}\theta_0\cdot\cos\psi\,, \qquad \frac{d\eta}{dt} = a\frac{\varepsilon A}{A_1} r_0 \operatorname{sen}\theta_0\cdot\operatorname{sen}\psi\,,$$

da cui integrando si ricava

$$\xi - \xi_0 = a\frac{\varepsilon A}{A_1}\frac{r_0}{\dot\psi_0}\operatorname{sen}\theta_0\cdot\operatorname{sen}\psi\,, \qquad \eta - \eta_0 = -\,a\frac{\varepsilon A}{A_1}\frac{r_0}{\dot\psi_0}\operatorname{sen}\theta_0\cdot\cos\psi\,,$$

con ξ_0, η_0 costanti arbitrarie. Il centro della sfera descrive dunque nel piano orizzontale passante per esso un cerchio di centro (ξ_0, η_0, a) e di raggio

$$R = a\frac{\varepsilon A}{A_1}\frac{r_0}{\dot\psi_0}\operatorname{sen}\theta_0 = a\frac{C-A}{C_1}\operatorname{sen}\theta_0\cdot\cos\theta_0$$

che è minore del raggio a della sfera.

c) Altri moti particolari della sfera si possono ottenere ponendo

$$(c_0^2/A_1) + (c_3^2/A) - h = 0\,.$$

Allora la terza delle equazioni (16) diventa

$$r[c_0\operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}(\psi-\alpha) + (A_1/A)c_3\cos\theta] = 0\,,$$

la quale è soddisfatta per

(25) $\quad r = 0\,,\quad$ oppure per $\quad c_0\operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}(\psi-\alpha) + (A_1/A)c_3\cos\theta = 0\,.$

Nel caso in cui $r = 0$ il sistema (16) si riduce al seguente

$$\dot\theta = (c_0/A_1)\cos(\psi-\alpha)\,,\qquad \dot\varphi\operatorname{sen}\theta = (c_0/A_1)\operatorname{sen}(\psi-\alpha)\,,\qquad \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta = 0\,,$$

dalle quali, ponendo $\Psi = \psi - \alpha$, si ricava

$$\dot\varphi = \frac{c_0}{A_1}\frac{\operatorname{sen}\Psi}{\operatorname{sen}\theta}\,,\qquad \dot\Psi = -\frac{c_0}{A_1}\frac{\operatorname{sen}\Psi}{\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta}$$

e quindi, eliminando il tempo, si ha

$$\frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta} + \frac{\cos\Psi}{\operatorname{sen}\Psi}\,d\Psi = 0\,.$$

Integrando si ottiene

$$\tan\theta = \gamma/\operatorname{sen}\Psi$$

con γ costante arbitraria. Si ha inoltre

$$\frac{d\varphi}{d\Psi} = -\cos\theta = \frac{-\operatorname{sen}\Psi}{\pm\sqrt{\gamma^2 + 1 - \cos^2\Psi}}$$

e con un'altra quadratura si deduce

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = (\cos\Psi)/\sqrt{\gamma^2 + 1}$$

con φ_0 altra costante arbitraria.

Per ottenere il tempo osserviamo che si può scrivere ora

$$\dot{\Psi} = -\frac{c_0}{A_1}\frac{\operatorname{sen}\Psi\cdot(1 + \tan^2\theta)}{\tan\theta} = -\frac{c_0}{\gamma A_1}(\gamma^2 + \operatorname{sen}^2\Psi)$$

e da questa si ricava

$$\operatorname{ctg}\Psi = \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\gamma}\tan\left[\frac{c_0}{A_1}\sqrt{1+\gamma^2}\,(t - t_0)\right].$$

Ne segue

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\cos\left[\frac{c_0}{A_1}\sqrt{1+\gamma^2}\,(t - t_0)\right],$$

e se si pone

$$\cos\theta_0 = 1/\sqrt{1+\gamma^2},$$

si ha che nel moto considerato l'angolo θ varierà fra θ_0 e $\pi - \theta_0$ e così pure si avrà $\theta_0 \leqslant \varphi - \varphi_0 \leqslant \pi - \theta_0$.

In questo caso dalle prime due delle (14) si ha ancora

$$\omega_1 = c_1/A_1, \qquad \omega_2 = c_2/A_1$$

e le (6) mostrano che il centro della sfera si muove di moto rettilineo uniforme in una direzione orizzontale inclinata all'asse ξ di un angolo la cui tangente vale $-c_1/c_2$.

Risultati equivalenti si hanno se si suppone verificata la seconda delle (25).