ANTONIO SIGNORINI (*)

Sopra un particolare tipo di moti rigidi sferici. (**)

Preparando la seconda edizione del primo volume del mio libro di Meccanica razionale mi è capitato di completare i capitoli di Geometria e di Cinematica delle masse per quanto s'attiene (1) a una certa estensione dell'ellisse di CULMANN, che già si era mostrata atta a coordinare efficacemente la trattazione di svariati problemi di Dinamica dei solidi.

Studi in corso, su cui conto di riferire al prossimo Congresso internazionale di Meccanica a Istanbul, mi vanno sempre più convincendo dell'utilità di questa estensione: utilità della quale mi propongo oggi di dare una prova, sia pure modesta, mostrando come il solo fatto che una certa corrispondenza tra rette e punti non è biunivoca porti a ravvicinare espressivamente alla Cinematica delle masse le ben note ricerche di HESS e di JOUKOWSKI circa un problema classico della Dinamica dei solidi: il problema del moto di un solido pesante fissato senza attrito per un punto diverso dal baricentro.

Una questione analoga già da qualche anno è stata trattata dal Dr. T. MANACORDA (2), ma qui la forma degli sviluppi vorrà essere proprio quella che meglio si adatta agli studi su cui conto di riferire a Istanbul.

Naturalmente comincerò col riassumere quanto riguarda l'estensione dell'ellisse di CULMANN, senza far parola di ciò che non trova immediata applicazione rispetto alle ricerche di HESS e di JOUKOWSKI.

1. – Sia S un solido qualunque, m la sua massa, G il suo baricentro, ε un piano qualunque, G_ε la proiezione ortogonale di G su ε, s_ε l'ellisse intersezione di ε con l'ellissoide d'inerzia relativo a G_ε, σ_ε l'area di s_ε e infine e_ε l'ellisse che

---

(*) Professore o. della Università di Roma. Indirizzo: Via delle Tre Madonne 16, Roma (Italia).

(**) Conferenza tenuta il 17 maggio 1952 all'Università di Padova.

(1) *Meccanica razionale con elementi di Statica grafica*, vol. I, 2a ediz., Perrella, Roma 1952; cfr. pp. 287-291, 312-321, 343-354.

(2) T. MANACORDA, *Sul moto di un solido asimmetrico attorno a un punto fisso*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **6**, 711-714 (1949).

corrisponde a s_ε nell'omotetia avente per centro G_ε e rapporto

$$\frac{\pi}{\sigma_\varepsilon\sqrt{m}}\,.$$

Proprio e_ε è l'ellisse per cui ho proposto il nome di *ellisse centrale* del piano qualunque ε rispetto al solido qualunque $\mathcal{S}$.

Se ε è un piano baricentrale, G_ε non differisce da G e s_ε si riduce all'ellisse secondo cui tale piano taglia l'ellissoide centrale $\mathcal{E}_G$, però anche per un piano baricentrale gli assi dell'ellisse centrale di regola non sono assi centrali. Se $\mathcal{S}$ si riduce a una piastra in un certo piano p, l'ellisse e_p, ma essa sola, non differisce dall'ellisse di CULMANN.

Il sistematico intervento della e_ε permette di estendere a un solido qualsiasi tutte le proprietà ben note dei momenti d'inerzia di una piastra piana rispetto agli assi del suo piano, senza neppure che abbia a soffrirne la semplicità degli enunciati. Ad esempio per ogni asse di ε non passante per G_ε, indicando con ϱ il raggio d'inerzia di $\mathcal{S}$, con d_{G_ε} la distanza da G_ε e con d_{A_ε} la distanza dall'antipolo (3) rispetto alla e_ε, si ha

$$\varrho^2 = d_{G_\varepsilon} d_{A_\varepsilon}\,. \tag{1}$$

2. – Può farsi risalire ad AMPÈRE la denominazione di *asse permanente* per ogni retta del solido che sia asse principale d'inerzia per almeno uno dei suoi punti. Tra le rette baricentrali hanno questa proprietà tutti e soli gli assi centrali, anzi ognuno di questi è asse principale d'inerzia per ogni suo punto.

Considero ormai una retta non baricentrale a e indico con α il piano individuato da a e G. Al tempo stesso sia A l'antipolo di a rispetto all'ellisse centrale e_α di tale piano [il piano baricentrale per a], punto che brevemente chiamerò *l'antipolo di a, riguardo a* $\mathcal{S}$; C la proiezione ortogonale di A su a, cui è il caso di dare il nome di *centro d'inerzia di a*, perchè si dimostra che questa retta non baricentrale *può* essere asse principale d'inerzia *solo* rispetto a C.

Sia infine Q una qualunque delle due intersezioni della retta a con l'ellissoide d'inerzia $\mathcal{E}_C$ relativo al centro d'inerzia; n' la normale esterna a $\mathcal{E}_C$ nel punto Q; n la semiretta spiccata da C parallelamente a n'; δ_C l'angolo, certamente acuto, formato da n e CQ.

Si dimostra che n appartiene al piano α solo se δ_C è nullo, cioè solo se a è asse permanente. Nel caso opposto il triedro $\mathcal{T}^{(a)}$ (triedro effettivo) formato dalle tre semirette

$$n\,,\quad CQ\,,\quad CA\,,$$

(3) Il simmetrico del polo riguardo a G_ε.

prese proprio nell'ordine indicato, può essere levogiro o destrogiro. Se $\mathcal{C}^{(c)}$ è levogiro, dico che il considerato asse non permanente è un asse *destro* e dò all'angolo δ_c il segno $+$; se $\mathcal{C}^{(c)}$ è destrogiro, dico invece che si tratta di un asse *sinistro* e dò a δ_c il segno $-$.

3. – Dalla Geometria delle masse passo ora alla Cinematica delle masse, pensando a una rotazione istantanea di $\mathcal{S}$ attorno al solito asse non baricentrale a.

Sia $\boldsymbol{\omega}$ il vettore velocità angolare (4), $\boldsymbol{v}_G$ la velocità del baricentro, Σ_q l'insieme delle quantità di moto di tutti gli elementi del solido, $\boldsymbol{K}_T$ il momento risultante di Σ_q rispetto a un qualunque polo T, d_A la distanza di a dal suo antipolo A, b la normale in A al piano $\alpha \equiv aG$.

La retta b è l'asse centrale di Σ_q, anzi più completamente si dimostra che Σ_q equivale al vettore $m\boldsymbol{v}_G$ applicato alla retta b più una coppia il cui momento $\boldsymbol{K}_A$ semplicemente è dato da

$$\boldsymbol{K}_A = \overline{d_A} \operatorname{tg} \delta_c \cdot m\boldsymbol{v}_G\,.$$

La coppia sparisce se l'asse di moto a è permanente $[\delta_c = 0]$: altrimenti si ha a che fare con una diname destra o sinistra secondo che, in base alla mia definizione, l'asse istantaneo riesce destro o sinistro.

D'altra parte, se O è un punto di a, al trinomio invariante T_q di Σ_q può sempre darsi l'espressione

$$T_q = m(\boldsymbol{\omega} \wedge OG) \times \boldsymbol{K}_G\,;$$

e questo rende ormai evidente che le direzioni dei tre vettori $\boldsymbol{K}_G$, $\boldsymbol{\omega}$ e OG appartengono a una stessa giacitura solo se l'asse di moto è permanente.

Converrà pure mettere fin d'ora in rilievo che se a è permanente risulta

$$\boldsymbol{K}_o = OA \wedge m\boldsymbol{v}_G\,. \tag{2}$$

4. – I teoremi che ho elencati hanno delle applicazioni immediate nella teoria degli urti, ma valeva la pena di approfondire lo studio della corrispondenza $\mathcal{B}$ tra le rette a e b nello spazio rigato: è quanto BOMPIANI (5) già da qualche anno ha messo in luce.

---

(4) Intendo *positive* le rotazioni levogire, ecc..

(5) E. BOMPIANI, *Sopra una nozione di antipolarità fra rette dello spazio, occorrente in Dinamica*, Univ. Roma, Ist. Naz. Alta Mat., Rend. e Appl. (5) **8**, 412-422 (1949).

Su ciò non posso oggi soffermarmi. L'argomento di questa Conferenza trae invece origine da alcune considerazioni sulla corrispondenza $\mathcal{A}$ tra a e A.

A differenza della $\mathcal{B}$, la $\mathcal{A}$ non è, neppure generalmente, biunivoca. Sono ∞^1 le rette, non baricentrali, che ammettono come antipolo uno stesso punto $A \neq G$. Ce ne è una ed una sola, $a(A, \gamma)$, in ogni piano γ del fascio $\mathcal{F}_A$ di asse GA.

Si può subito aggiungere che [assegnato A] due $a(A, \gamma)$ si tagliano, in un punto dell'asse di $\mathcal{F}_A$, solo quando i loro γ *segano* $\mathcal{E}_G$ *secondo ellissi di egual area.*

Invero sia E_* il punto comune a $\mathcal{E}_G$ e alla semiretta GA, punto che per ogni γ apparterrà all'ellisse s_γ secondo cui $\mathcal{E}_G$ è tagliata da γ. Sia poi E_γ l'intersezione della stessa semiretta con l'ellisse centrale e_γ di γ, cioè il punto corrispondente a E_* nell'omotetia che trasforma s_γ in e_γ.

Indicando con σ_γ l'area di e_γ, dovrà essere

$$\frac{|GE_\gamma|}{|GE_*|} = \frac{\pi}{\sigma_\gamma \sqrt{m}},$$

onde l'asserto appare evidente non appena si rilevi che E_γ [a parità di A] è in corrispondenza biunivoca con l'intersezione di GA ed $a(A, \gamma)$.

5. – Torno alla Cinematica delle masse limitandomi ai moti di $\mathcal{S}$ che ammettono un punto fisso $O \neq G$. Indicherò con f l'asse OG, con $\boldsymbol{k}$ il versore di OG. Non pongo nessuna restrizione alla struttura materiale di $\mathcal{S}$: solo per abbreviare il discorso intenderò che l'ellissoide centrale $\mathcal{E}_G$ non sia rotondo.

L'asse di moto a dovrà ad ogni istante passare per O, con la direzione della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, ed è pure evidente che quando si tratti di un semplice moto rotatorio (di asse $\neq f$) insieme ad a verrà ad essere solidale a $\mathcal{S}$ anche l'antipolo A di a.

Data la non biunivocità della $\mathcal{A}$, ci si può domandare se sono possibili moti non rotatori *con antipolo solidale*; voglio dire, se è possibile che uno stesso punto $X \neq G$ di $\mathcal{S}$ [a priori incognito] dia ad ogni istante l'antipolo dell'asse di moto *senza che il moto sia rotatorio*, cioè senza che riesca solidale a $\mathcal{S}$ anche l'asse di moto.

Una tale ipotesi, per quanto or ora ho messo in rilievo circa la $\mathcal{A}$, trae con sè due condizioni:

I) O deve essere allineato con G ed X, cioè X deve appartenere a f, anzi, rispetto a G, deve essere situato dalla banda opposta ad O;

II) tutti i piani γ per f devono tagliare $\mathcal{E}_G$ secondo ellissi di uguale area, σ_*.

Come è noto (6), la condizione II), da sola, equivale a quella che f sia normale a un piano ciclico dell'ellissoide $\mathcal{R}_G$ reciproco di $\mathcal{E}_G$. L'ellissoide $\mathcal{E}_G$ è l'indicatrice dell'omografia centrale d'inerzia Θ, la dilatazione propria che trasforma $\boldsymbol{\omega}$ nel momento $\boldsymbol{K}_G$ della quantità di moto di $\mathcal{S}$ rispetto a G:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{K}_G\,. \tag{3}$$

Invece $\mathcal{R}_G$ è l'indicatrice della Θ^{-1}, la dilatazione che trasforma $\boldsymbol{K}_G$ in $\boldsymbol{\omega}$:

$$\Theta^{-1}\boldsymbol{K}_G = \boldsymbol{\omega}\,. \tag{3'}$$

Ormai la condizione che f sia normale a un piano ciclico di $\mathcal{R}_G$ resterà sottintesa, ma per averla meglio presente scriverò f^* al posto di f.

Una tale restrizione riguardo alla scelta del punto fisso O in $\mathcal{S}$ può brevemente chiamarsi « restrizione vincolare di HESS », perchè è proprio una delle caratteristiche delle ricerche di HESS che oggi mi sono proposto di illustrare.

Ricordo che il nostro f^* appartiene a uno dei piani principali comuni a $\mathcal{R}_G$ ed $\mathcal{E}_G$; precisamente, al piano centrale π' normale all'asse medio η_* di $\mathcal{E}_G$.

Appresso indicherò con n_* la normale esterna a $\mathcal{E}_G$ nella sua intersezione E_* con la semiretta complementare della GO; con ε l'angolo, necessariamente acuto, formato da n_* con GE_*. La n_* certo dà la direzione e il verso di $\Theta\boldsymbol{k}$: la restrizione vincolare di HESS permette di aggiungere che anche n_* appartiene a π'.

6. – Sia

$$K_f = \boldsymbol{K}_G \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{K}_o \times \boldsymbol{k}$$

il momento della quantità di moto di $\mathcal{S}$ rispetto a f, π'' il piano per G normale a $\boldsymbol{k}$ e π_* il piano per O normale a n_* [e a $\Theta\boldsymbol{k}$]. La restrizione vincolare di HESS evidentemente implica che π_* è normale a π', cioè contiene la parallela η per O a η_*: ma implica pure che ogni retta di π_* per O dà un asse permanente di $\mathcal{S}$.

---

(6) È una conseguenza immediata del fatto che se si indicano con A_1, A_2, A_3 i momenti centrali d'inerzia e con γ_1, γ_2, γ_3 i coseni di direzione [rispetto alla terna centrale] della normale a una sezione diametrale s_γ di $\mathcal{E}_G$, quale espressione dell'area σ_γ di s_γ si ha

$$\sigma_\gamma = \frac{\pi}{\sqrt{A_1A_2A_3}}\,\frac{1}{\sqrt{(\gamma_1^2/A_1) + (\gamma_2^2/A_2) + (\gamma_3^2/A_3)}}\,,$$

in modo che σ_γ riesce proporzionale alla lunghezza del diametro $\mathcal{R}_G$ normale al piano di s_γ.

Per convincersene basta rivolgere l'attenzione al fatto che se π'' taglia una superficie secondo una circonferenza c di centro G, la normale alla superficie in un punto qualunque di c risulta complanare alla normale a π'' in G. Segue subito di qui [stante la (3')] che quando π'' taglia $\mathcal{R}_G$ secondo una circonferenza [restrizione vincolare di HESS] le direzioni dei tre vettori $\boldsymbol{K}_G$, $\boldsymbol{\omega}$ e GO certo appartengono a una stessa giacitura (7) se è

$$K_f = 0 , \tag{4}$$

e questa restrizione equivale proprio all'ortogonalità di $\boldsymbol{\omega}$ a $\Theta\boldsymbol{k}$, cioè *all'appartenenza di* a *al piano* π_*.

Converrà dare a quest'osservazione anche un'altra forma. Comunque si pensi associata a $\mathcal{S}$ una terna solidale $\mathcal{C}$, il trinomio invariante T_q di Σ_q e la K_f possono sempre esprimersi mediante una forma quadratica Q e una forma lineare L, a coefficienti costanti, nelle componenti di $\boldsymbol{\omega}$. La restrizione vincolare di HESS dà quanto basta [e occorre] perchè la Q ammetta come fattore la L, cioè sia, per ogni moto di $\mathcal{S}$ attorno ad O,

$$T_q = L'K_f , \tag{5}$$

con L' forma lineare a coefficienti costanti nelle componenti di $\boldsymbol{\omega}$.

7. – È inutile ripetere che la restrizione vincolare di HESS da sola non basta a dar luogo a moti con antipolo solidale: c'è ancora da tener conto della condizione I).

Tutti i piani γ del fascio di asse f^* tagliano $\mathcal{E}_G$ secondo ellissi s_γ di uguale area σ_*, in modo che pure le ellissi centrali e_γ di tali piani costituiscono un ellissoide, l'ellissoide $\mathcal{E}'_G$ corrispondente a $\mathcal{E}_G$ nell'omotetia di centro G e rapporto $\pi/(\sigma_*\sqrt{m})$.

Le rette di antipolo X dovranno dunque appartenere al piano simmetrico, riguardo a G, del piano polare di X rispetto a $\mathcal{E}'_G$, mentre la giacitura di π_* risulta coniugata alla direzione di OG anche rispetto a $\mathcal{E}'_G$.

Così la condizione I) viene a dire che le rette di antipolo X sono tutte e sole le rette di π_* per O. Tra esse c'è la η, onde resta senz'altro individuata anche la posizione di X su f^*. Infatti f^* [come η_*] è asse dell'ellisse centrale del piano baricentrale per η. Quindi, in base a (1), posto

$$|OG| = \delta$$

e detto ϱ_η il raggio d'inerzia di $\mathcal{S}$ rispetto a η, X resta individuato nel punto O_*

(7) Condizione necessaria e sufficiente perchè a sia permanente (cfr. n. 3, in fine).

della semiretta OG che ha da O la distanza

$$l = \frac{\varrho_\eta^2}{\delta}, \tag{6}$$

cioè nel punto O_* per cui

$$OO_* = \lambda\, OG, \tag{6'}$$

se s'intende

$$\lambda = \frac{l}{\delta} = \frac{\varrho_\eta^2}{\delta^2} > 1 .$$

In conclusione, per un moto non rotatorio e subordinatamente alla restrizione vincolare di Hess, O_* è il solo punto di $\mathcal{S}$ che può dare ad ogni istante l'antipolo A dell'asse di moto ed *effettivamente O_* si identifica con A se a appartiene sempre al piano π_**; onde π_* viene a costituire il cono mobile di Poinsot per il considerato moto rigido sferico.

Chiamando ϱ_* il raggio d'inerzia di $\mathcal{S}$ rispetto a η_*, il teorema di Huygens riduce la (6) a esprimere che rispetto a G il punto O_* è situato, dalla banda opposta di O, alla distanza

$$|GO_*| = \frac{\varrho_*^2}{|GO|}; \tag{7}$$

ciò che rivela una semplice *legge di reversibilità* tra O e O_*.

Una notevole proprietà comune a tutti i moti in cui l'antipolo di a si identifica con O_* segue subito dal fatto che a, dovendo sempre appartenere a π_*, in ogni istante si trova ad essere sovrapposto a un asse permanente di $\mathcal{S}$.

Invero indichiamo con $\boldsymbol{v}_* = \boldsymbol{\omega} \wedge OO_*$ e $\boldsymbol{a}_*$ la velocità e l'accelerazione assoluta di O_*. La (6') implica $\boldsymbol{v}_* = \lambda \boldsymbol{v}_G$, mentre la (2) fornisce

$$\boldsymbol{K}_o = OO_* \wedge m\boldsymbol{v}_G .$$

In conseguenza è pure

$$\boldsymbol{K}_o = \frac{1}{\lambda}\, OO_* \wedge m\boldsymbol{v}_*, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}_o}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\lambda}\, OO_* \wedge m\boldsymbol{a}_*, \tag{8}$$

con la conclusione che per i moti in cui l'antipolo di a s'identifica con O_*, sia $\boldsymbol{K}_O$, sia il momento rispetto a O delle forze d'inerzia, vengono a dipendere solo dal moto di O_* e riescono ambedue sempre ortogonali a f^*.

Si può aggiungere che per tali moti la forza viva di $\mathcal{S}$ viene a essere espressa da

$$\frac{1}{2\lambda}(OO_* \wedge m\boldsymbol{v}_*)\times\boldsymbol{\omega} = \frac{m}{2\lambda}v_*^2 = \lambda\frac{mv_G^2}{2}.$$

8. – Associamo a $\mathcal{S}$ una terna solidale trirettangola levogira $\mathcal{T}\equiv\xi\eta\zeta$ di origine O, mantenendo ad η la direzione dell'asse medio di $\mathcal{E}_G$ e dando a ζ la direzione e il verso di OG. Insieme a n_*, dovrà appartenere a π' l'asse ξ e intenderò precisato anche il suo verso [e quindi quello di η] con la condizione che sia acuto pure l'angolo $\widehat{n_*\xi}$, cioè n_* abbia quali coseni di direzione rispetto a $\mathcal{T}$ proprio $\sin\varepsilon$, 0, $\cos\varepsilon$.

Indichiamo inoltre con θ, φ, ψ gli angoli di EULERO della $\mathcal{T}$ riguardo a una terna fissa, per il momento almeno scelta a piacere, e con

$$\begin{cases} p = \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\sin\theta\sin\varphi, \\ q = -\dot\theta\sin\varphi + \dot\psi\sin\theta\cos\varphi, \\ r = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta \end{cases}$$

le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ secondo la $\mathcal{T}$.

La condizione che a appartenga a π_* equivale a quella che $\boldsymbol{\omega}$ sia ortogonale a n_*, onde può tradursi in

$$p\sin\varepsilon + r\cos\varepsilon = 0,$$

cioè in

$$\dot\varphi = -\dot\psi\cos\theta - \mathrm{tg}\varepsilon\,(\dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\sin\theta\sin\varphi). \tag{9}$$

Il moto assoluto di O_* deve svolgersi sulla sfera Σ_l di centro O e raggio l ed è biunivocamente definito dalle espressioni dei soli θ e ψ in funzione di t. Comunque le si pensino assegnate, la (9) dà luogo a un'equazione differenziale del primo ordine per la determinazione dell'angolo di rotazione propria φ.

Si tratta di un'equazione che sempre si riduce al tipo RICCATI quando si assuma come incognita la tangente trigonometrica di $\varphi/2$. Notevole è il fatto che tale equazione può integrarsi elementarmente ogniqualvolta il moto di O_* è circolare ([8]); condizione che, previa un'opportuna scelta della terna fissa, può tradursi in $\theta\equiv$ cost.. Anzi in queste condizioni la (9) si riduce a individuare φ in funzione di ψ, non appena si assegni una coppia di valori corrispondenti, φ_0 e ψ_0, di φ e ψ.

([8]) « Precessione » di $\mathcal{S}$: cfr. loc. cit. in ([1]), pp. 211-213.

Ad esempio per $\theta \equiv \pi/2$ la (9) equivale a

$$\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} = \mathrm{tg}\,\frac{\varphi_0}{2}\cdot e^{-(\psi-\psi_0)\mathrm{tg}\varepsilon}\,. \tag{10}$$

9. – Passo infine alla Dinamica, mantenendo la restrizione vincolare di HESS e intendendo che $\mathcal{S}$ sia fissato in O senza attrito. Indicherò con $\boldsymbol{M}_O$ e $M_f = \boldsymbol{M}_O \times \boldsymbol{k}$ i momenti risultanti delle forze attive rispetto al punto O e all'asse f^*.

L'antipolo dell'asse di moto non potrà identificarsi con O_* altro che subordinatamente a qualche restrizione per le forze attive, perchè, come già ho avuto occasione di rilevare nel n. 6, a appartiene a π_* solo quando si verifica la (4), l'altra delle restrizioni che caratterizzano le ricerche di HESS nell'ambito della Dinamica dei solidi pesanti.

Precisamente occorre che le equazioni dinamiche del moto di $\mathcal{S}$ ammettano

$$K_f = 0 \tag{11}$$

come relazione invariante. Viceversa, quando è soddisfatta una tale restrizione per le forze attive, l'antipolo si identifica con O_* ogniqualvolta sia $K_f = 0$ inizialmente, cioè per ∞^5 degli ∞^6 moti possibili per $\mathcal{S}$: in particolare, quando inizialmente $\mathcal{S}$ non abbia forza viva.

Moltiplicando scalarmente per $OG = \delta \boldsymbol{k}$ l'equazione dei momenti

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}_O}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_O\,, \tag{12}$$

si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(OG \times \boldsymbol{K}_O) - \boldsymbol{v}_G \times \boldsymbol{K}_O = \delta M_f\,.$$

L'intervento della (5) permette di sostituire questa condizione con

$$\frac{\mathrm{d}K_f}{\mathrm{d}t} - \frac{L'}{m\delta}\,K_f = M_f$$

e quindi anche con

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{K_f\, e^{-[1/(m\delta)]\int L'\mathrm{d}t}\} = M_f\, e^{-[1/(m\delta)]\int L'\mathrm{d}t}\,.$$

Null'altro occorre per riconoscere che le equazioni dinamiche effettivamente ammettono la (11) come relazione invariante ogniqualvolta le forze attive siano tali da dar luogo a

$$M_f \equiv 0 :$$

cioè quando [come nel caso del solo peso] a ogni istante equivalgano a forze concentrate in punti di f^*, per ogni possibile posizione e atto di moto del nostro $\mathcal{S}$. Allora, basta che inizialmente sia $K_f = 0$, perchè entrino in gioco le (8), e la (12) si traduca in

$$OO_* \wedge m\boldsymbol{a}_* = \lambda \boldsymbol{M}_0 . \tag{13}$$

Purchè $\boldsymbol{M}_0$ non dipenda nè dall'angolo, nè dalla velocità di rotazione propria, la (13) riguarda solo il moto di O_* sulla sfera Σ_l, cioè riduce la determinazione del moto sferico del solido all'integrazione di un problema in due gradi di libertà, seguita da quella di un'equazione di RICCATI, la (9).

Potrà darsi benissimo che riesca agevole almeno la determinazione di soluzioni particolari del problema in due gradi di libertà. Neppure è escluso che possa essere immediata l'integrazione della (9): ad esempio si presenta questa semplificazione, come già è scritto nella (10), tutte le volte che il moto di O_* venga a svolgersi sopra un cerchio massimo di Σ_l.