VITTORIO EMANUELE GALAFASSI (*)

Superficie algebriche reali dotate di falde pari di prima specie.

1. – Le questioni riguardanti le falde pari di prima specie (cioè contenenti circuiti dispari) di una superficie algebrica reale sono state poste in rilievo da una recente Nota della signora Prof. M. PIAZZOLLA BELOCH (1).

In tale Nota si utilizzano argomentazioni le quali anche conducono ad affermare che, indicato con δ il numero delle falde pari di prima specie di una superficie algebrica (irriducibile) reale la cui sezione piana generica abbia *un prefissato genere* p, dev'essere:

$$\delta \leqslant p + 1 . \tag{1}$$

Basta invero osservare che ogni piano (generico reale) incontra una falda pari di prima specie in almeno un circuito, onde il numero δ delle falde pari di prima specie della superficie non può superare quello dei circuiti di una sua sezione piana generica, e quindi non può superare $p+1$, in virtù del classico teorema di HARNACK (2).

Nel presente lavoro si stabiliscono dapprima alcune circostanze che necessariamente si presentano ove sia $\delta = p + 1$ (cfr. n. 2), e si risolvono i problemi esistenziali che in conseguenza si pongono (n. 3). Utilizzando i risultati conseguiti ed altre considerazioni, si procede quindi (n. 4) ad un primo esame del problema riguardante il massimo numero delle falde pari di prima specie di una superficie algebrica generale reale di un assegnato ordine pari (3).

(*) Indirizzo: Via Volta, 9; Pavia (Italia).

(1) Cfr. M. PIAZZOLLA BELOCH, *Sul numero delle falde delle superficie algebriche*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **29**, 121-123 (1949).

(2) Cfr. A. HARNACK, *Über die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven*, Math. Ann. **10**, 189-198 (1876).

(3) Una superficie algebrica reale priva di singolarità reali (per es. generale), d'ordine dispari, non possiede alcuna falda pari di prima specie. Cfr. V. E. GALAFASSI, *I tactinvarianti nella topologia dello spazio proiettivo*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **3**, 18-25 (1948), [cfr. n. 2, *a*)]. Cfr. anche lavoro citato in (1).

2. – Si può intanto osservare che una superficie algebrica reale la cui sezione piana generica è di genere p, se possiede $\delta = p + 1$ falde pari di prima specie *non possiede altre falde*, chè diversamente la sezione della superficie con un piano genericamente secante una ulteriore falda di essa darebbe luogo ad una sezione di genere p con almeno $p + 2$ circuiti, in contrasto col teorema di HARNACK. In particolare non esisteranno falde dispari e la superficie sarà pertanto *d'ordine pari*.

Ma interesse maggiore riveste la circostanza che, ove sia $\delta = p + 1$, la superficie è necessariamente rigata (vale a dire *è una rigata di genere* p).

Occorre invero che ogni piano reale tangente alla superficie intersechi questa in una curva riducibile: diversamente la sezione di regola risulterebbe di genere $p - 1$ e dotata di almeno $p + 1$ circuiti, ancora in contrasto col teorema di HARNACK. Data l'indole della questione, ne viene che ogni piano (reale o meno) tangente alla superficie, sega questa in una curva riducibile. La superficie è allora segata dai piani di un sistema ∞^2 in curve riducibili, perciò (essendo la superficie irriducibile) è *rigata* oppure è la superficie di STEINER, in virtù del teorema di KRONECKER-CASTELNUOVO ([4]). Ma è senz'altro da escludere la superficie di STEINER: invero per questa $p = 0$ e si ha una sola falda pari però di seconda specie perchè notoriamente su tale falda non esistono circuiti dispari ([5]). Non nasce invece contraddizione quando si suppone che la superficie sia rigata: allora, invero, la sezione col piano tangente generico si spezza in una generatrice ed in una curva residua ancora di genere p.

3. – La trattazione precedente pone il quesito dall'esistenza di superficie (algebriche, irriducibili, reali) con sezione piana generica di genere p, e dotate di $p + 1$ falde pari di prima specie. Tali superficie, *necessariamente rigate* (n. 2), le diremo superficie Φ_p.

È immediata l'esistenza di superficie Φ_p *coniche*: tali sono invero le super-

---

([4]) Cfr. G. CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riducibili*, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) **3**, 22-25 (1894), oppure *Memorie scelte*, Bologna 1927, (pp. 223-227). Cfr. anche E. BOMPIANI, *Il teorema di* KRONECKER-CASTELNUOVO, Boll. Un. Mat. Ital. **1**, 51-52 (1922).

([5]) È ben noto che la superficie di STEINER (generica, reale) possiede (una o tre) rette reali doppie, ma ciascuna di esse nella topologia intrinseca dell'unica falda si interpreta come un unico circuito pari costituito o dalla retta da percorrersi due volte in uno stesso verso quando i due punti uniplanari siano immaginario-coniugati, o in un segmento (proiettivo) di essa avente per estremi i detti punti supposti reali e da percorrersi due volte in versi opposti (ignorandosi qui i segmenti di punti isolati).

Simile interpretazione riproduce del resto, nel campo reale, quella che, nel campo complesso, richiede la geometria sulla superficie.

ficie coniche che si ottengono proiettando una curva piana (algebrica, irriducibile, reale) di genere p, dotata di $p+1$ circuiti, da un punto assunto fuori dal piano della curva. Ciascuna delle $p+1$ falde (pari di prima specie) del cono così costruito presenta punto singolare nel vertice del cono stesso.

Ma anche *esistono superficie Φ_p non coni, anzi superficie Φ_p prive di singolarità reali.*

Siccome la questione proposta può ricondursi ad una riguardante lo spazio rigato, potrà giovare il ricorso all'immagine di questo fornita dalla quadrica di KLEIN. Assunta su di essa una conica γ_0 reale, anzi a punti reali, si introducano altre p coniche γ_i $(i=1, 2, \ldots, p)$ dello stesso tipo prive di mutue intersezioni ed aventi ciascuna a comune con γ_0 una coppia (reale) di punti immaginario-coniugati. Si ottiene così una curva connessa (reale) spezzata nelle $p+1$ coniche assunte, notoriamente attribuibile ad una famiglia di curve irriducibili di genere p, ed avente per parte reale quella delle $p+1$ coniche, cioè $p+1$ circuiti pari privi di singolarità e di mutue intersezioni. Sottoponendo (sulla quadrica di KLEIN) la curva connessa a piccola variazione ([6]), si perviene ad una curva λ irriducibile (reale) di genere p con $p+1$ circuiti pari.

La rigata dello S_3 che ha per immagine λ, è una Φ_p.

Invero si tratta manifestamente di una rigata (irriducibile, reale) di genere p dotata di $p+1$ falde, e ciascuna di queste è pari (e quindi di prima specie, in quanto rigata) perchè il corrispondente circuito della curva λ sulla quadrica di KLEIN è pari, o, se si vuole, perchè deducibile per piccola variazione in S_3 dalla parte reale di una quadrica a punti iperbolici, rispondendo tale piccola variazione in S_3 a quella mediante la quale, sulla quadrica di KLEIN, dalla parte reale di una conica γ_i si deduce un circuito della curva λ.

Essendo λ priva di punti multipli, la corrispondente rigata di S_3 sarà priva di generatrici multiple: ma di più, disciplinando convenientemente il processo utilizzato, è possibile pervenire ad un modello sicuramente privo anche di punti multipli reali.

Per ciò basta che le coniche γ_i $(i=0, 1, \ldots, p)$ introdotte sulla quadrica di KLEIN rispondano a quadriche (a punti iperbolici) Γ_i dello S_3 assunte in

---

([6]) L'interpretazione della piccola variazione di una curva connessa come approssimazione di essa entro la famiglia di curve irriducibili a cui si attribuisce, può farsi risalire a F. SEVERI, *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema di* RIEMANN, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) **24**, 877-888, 1011-1020 (1915); *Nuovi contributi alla teoria dei sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, ibidem (5) **25**, 459-471, 551-562 (1916), [cfr. pag. 556].

Per citazioni ed effettive applicazioni di tale criterio (L. BRUSOTTI, B. BIGI) cfr. V. E. GALAFASSI, *Indirizzi e metodi in «questioni di realità»*, Rend. Sem. Torino **9**, 77-93 (1949-50), [cfr. pag. 92].

modo che le Γ_i, con $i \neq 0$, abbiano mutue intersezioni prive di punti reali, ed abbiano a comune con Γ_0 due generatrici (dello stesso regolo) immaginario-coniugate, ma nessun punto reale.

E si accerta facilmente la possibilità di introdurre nello S_3 quadriche Γ_i soddisfacenti alle condizioni sopra precisate. Invero, assunta Γ_0 e, in un regolo di questa, p distinte coppie di generatrici g_i, $\bar{g}_i$ $(i = 1, 2, ..., p)$ immaginario-coniugate, si introducano p rette r_i reali fra loro mutuamente sghembe e ciascuna rispettivamente appoggiata (con punti di appoggio necessariamente immaginario-coniugati) alle rette g_i, $\bar{g}_i$. Si considerino quindi le p quadriche reali Γ'_i rispettivamente spezzate nei piani $r_i g_i$, $r_i \bar{g}_i$ le quali hanno come parte reale rispettivamente le rette r_i (doppie isolate). Da ciascuna quadrica Γ'_i, per piccola variazione di segno opportuno entro il fascio individuato da Γ'_i e Γ_0, si deduca una quadrica Γ_i dotata di punti iperbolici. Le p quadriche Γ_i così ottenute, assieme a Γ_0, soddisfano le condizioni richieste [7].

È così assodata l'esistenza di superficie Φ_p prive di punti multipli reali.

4. – Un problema analogo a quello trattato nei nn. precedenti è quello di stabilire il massimo numero δ_n di falde pari di prima specie per una superficie (algebrica, reale) priva di singolarità, cioè *generale* nell'*assegnato* ordine pari $2n$.

Siccome il genere della sezione piana generica di una superficie generale d'ordine $2n$, vale $(2n-1)(n-1)$, subito risulta:

$$\delta_n \leq (2n-1)(n-1) + 1\,. \tag{2}$$

Per $n = 1$, notoriamente vale nella (2) il segno di eguaglianza ($\delta_1 = 1$), ma appena si supponga $n \geq 2$ alla (2) va sostituita la

$$\delta_n \leq (2n-1)(n-1)\,. \tag{3}$$

Invero (n. 2) una superficie (algebrica, irriducibile, reale) la cui sezione

---

(7) Ciascuna Γ_i $(i \neq 0)$, come ciascuna Γ'_i, ha con Γ_0 a comune, oltre alle generatrici g_i, $\bar{g}_i$, due altre generatrici (pure immaginario-coniugate). Quest'ultime però non appartengono al regolo di Γ_0 (o di Γ_i) che contiene le g_i, $\bar{g}_i$, cioè al regolo a cui si assimila la quadrica quando se ne introduce l'immagine sulla quadrica di KLEIN; vale a dire le ultime generatrici comuni a Γ_0 e Γ_i non dànno luogo a punti di connessione fra le coniche γ_0 e γ_i corrispondenti rispettivamente a Γ_0 ed a Γ_i (nel senso ormai precisato) sulla quadrica di KLEIN.

È pure immediato che il modello di superficie Φ_p cui si perviene è una rigata dell'ordine $2p + 2$, con curva doppia (reale, ma priva di punti reali) d'ordine

$$\frac{1}{2}(2p+2-1)(2p+2-2) - p = 2p^2\,.$$

generica abbia genere p, se possiede $p+1$ falde pari di prima specie è rigata mentre la superficie generale nell'ordine $2n > 2$ non è rigata ([8]).

Ma è subito da notare come nemmeno potrà affermarsi che, per qualunque n, sia accettabile nella (3) il segno di eguaglianza. Ad es., non è accettabile per $n=2$ in quanto sussiste la proposizione:

Una superficie del quart'ordine priva di singolarità reali, se possiede due falde pari di prima specie, non possiede altre falde.

Si osservi dapprima che, assunti due circuiti dispari ω_1, ω_2, da ogni punto P dello spazio sempre escono rette appoggiate ad entrambi.

Ciò è manifesto quando P si assuma sopra uno dei due circuiti. Supposto P fuori da entrambi, da P si proiettino ω_1 ed ω_2 sopra un piano, ottenendo in questo due circuiti i quali, in quanto dispari, hanno almeno un punto comune A: la retta PA è allora una retta uscente da P ed appoggiata ad entrambi i circuiti ω_1, ω_2.

Siano ora Σ_1, Σ_2 due falde pari di prima specie di una superficie del quart'ordine priva di singolarità reali, e si supponga esista un punto reale P della superficie fuori dalle due falde. Assunti su Σ_1 e Σ_2 rispettivamente due circuiti dispari ω_1 ed ω_2, ogni retta condotta per P a secare ω_1 ed ω_2 taglierebbe ciascuna falda Σ_1, Σ_2 almeno in due punti e quindi la superficie in almeno cinque (quindi sei) punti, senza giacere sulla superficie.

L'assurdo cui si perviene dimostra la proposizione ([9]).

D'altra parte la trattazione del n. 3 (ove si ponga $p = n-1$) stabilisce l'esistenza di superficie rigate d'ordine $2n$, prive di singolarità reali, e dotate

---

([8]) Basterebbe, del resto, osservare che la sezione di una superficie generale d'ordine $2n$ con un piano tangente reale possiede un punto doppio (nel punto di contatto) e perciò la sua parte reale, supposto $n \geq 2$, possiede in ogni caso un numero di circuiti minore di $(2n-1)(n-1)+1$, perchè questo massimo può solo raggiungersi con curve prive di singolarità. Il numero delle falde pari di prima specie della superficie non può superare quello dei circuiti di una qualunque sua sezione piana, e quindi non può superare $(2n-1)(n-1)$, come appunto afferma la (3).

Conviene in proposito osservare come il procedimento di piccola variazione che nella Nota citata in ([1]) induce ad affermare l'esistenza di superficie algebriche generali d'ordine $2n$ e dotate di $(2n-1)(n-1)+1$ falde pari di prima specie, può condurre al tipo richiesto solo se $n=1$, perchè non più di una fra le falde (pari) della superficie dedotta per piccola variazione dalla superficie cilindrica, può risultare di prima specie. Basti ad es. osservare che delle regioni determinate nello spazio dalla parte reale della superficie cilindrica, una sola possiede circuiti dispari (e la base del fascio, entro cui opera la piccola variazione, è priva di punti reali).

([9]) È presumibile che una proposizione analoga valga anche per $n > 2$, ma a ciò si dovrebbe pervenire con metodi che non siano un'estensione (almeno immediata) di quello seguito per $n = 2$. Potrebbe forse giovare un approfondimento della topologia delle falde immerse nello spazio proiettivo, o la discussione sotto l'aspetto delle di n falde pari di prima specie. Da queste superficie immediatamente si deducono superficie generali con parte reale dello stesso tipo: è quindi

$$\delta_n \geqslant n \,. \tag{4}$$

In particolare (cioè per $n = 2$) risulta perciò $\delta_2 = 2$.

È del resto agevole procurarsi altrimenti modelli di superficie generali reali d'ordine $2n$ dotate di n falde pari, di prima specie, ma più giova rilevare come alla (4) possa sostituirsi

$$\delta_n \geqslant (n-1)^2 + 1 \,, \tag{5}$$

cioè una limitazione per $n > 2$ più significativa.

Sussiste invero la seguente proposizione:

Esistono superficie algebriche generali reali di un qualunque ordine pari $2n$ dotate di $(n-1)^2 + 1$ falde pari di prima specie.

Indichiamo con F^{2n} una superficie algebrica generale reale d'ordine $2n$ e dotata di $(n-1)^2 + 1$ falde pari di prima specie, una delle quali, che diremo Σ_n, intersechi una quadrica a punti iperbolici F_0^2 in $2n$ rette mutuamente sghembe (ed in nessun altro punto fuori di queste). Tali $2n$ rette ripartiranno la parte reale di F_0^2, che notoriamente consta di una falda Σ_0 pari di prima specie, in altrettante «striscie», cioè in $2n$ regioni ciascuna delle quali è omeomorfa ad una «corona circolare» ed ha come «orli» due delle $2n$ rette: simile comportamento abbiano le $2n$ rette colla falda Σ_n di F^{2n}. Anzi le $2n$ rette siano «egualmente ordinabili» su Σ_0 e Σ_n: vale a dire disponibili in ordine ciclico in modo che due rette (in tale ordine) consecutive siano orli di una stessa striscia di Σ_0 e di una stessa striscia di Σ_n.

Ciò posto, basterà dimostrare, per ogni valore di n, l'esistenza di superficie F^{2n}. Ma siccome, fissata comunque F_0^2, esistono senz'altro superficie F^2 (come tale potendosi assumere una qualunque quadrica passante per due prefissate generatrici reali di uno stesso regolo di F_0^2 e per due prefissate generatrici immaginario-coniugate dell'altro regolo di F_0^2), basterà, procedendo per induzione, dimostrare che esistono F^{2n} se esistono $F^{2(n-1)}$.

A tale scopo si introduca una superficie (algebrica, reale) G^{2n} d'ordine $2n$ passante per $2n$ generatrici reali del regolo di F_0^2 che già contiene le $2(n-1)$

questioni di realità di un noto risultato di B. SEGRE, con utilizzazione del contorno apparente, di cui, per le superficie del quart'ordine, già altrimenti si era valso K. ROHN. Cfr. B. SEGRE, *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli generali*, Mem. Accad. Italia (Classe Scienze) **1** (1930), Matematica: N. 4, pp. 5-31; K. ROHN, *Die Maximalzahl und Anordnung der Ovale bei der ebenen Kurve 6. Ordnung und bei der Fläche 4. Ordnung*, Math. Ann. **73**, 177-229 (1913).

rette che con la loro parte reale forniscono l'intersezione di Σ_0 colla falda Σ_{n-1} di una prefissata $F^{2(n-1)}$, assumendo più precisamente le $2n$ rette di cui sopra in una stessa delle $2(n-1)$ striscie introdotte su Σ_0 dalle altrettante rette comuni a Σ_{n-1}. Ancora si imponga (com'è lecito) che G^{2n} passi per $2n$ generatrici, a coppie immaginario-coniugate, dell'altro regolo di F_0^2.

La superficie dedotta per piccola variazione di segno opportuno dalla superficie spezzata nella prefissata $F^{2(n-1)}$ e nella F_0^2 entro il fascio individuato dalla detta superficie spezzata e dalla G^{2n}, è una F^{2n}.

Invero la parte reale della superficie (algebrica generale reale d'ordine $2n$) così ottenuta consta delle $(n-2)^2$ falde pari di prima specie provenienti (per piccola variazione topologica) dalle altrettante falde di $F^{2(n-1)}$ distinte dalla Σ_{n-1}. ed inoltre delle $2(n-1)$ falde provenienti dalle altrettante coppie di striscie di Σ_{n-1} e Σ_0 rispettivamente, aventi gli stessi orli. Ed anche quest'ultime falde sono pari (in quanto falde di una superficie generale d'ordine pari) e di prima specie (in quanto contenenti i circuiti dispari che provengono ad es. da rette di Σ_0). Si hanno pertanto

$$(n-2)^2 + 2(n-1) = (n-1)^2 + 1$$

falde pari di prima specie, come appunto occorre.

Fra queste è in particolare da considerare la falda che proviene dalla coppia di striscie di Σ_{n-1} e Σ_0 rispettivamente, essendo la striscia di Σ_0 quella che contiene le $2n$ rette (reali) per le quali anche passa la G^{2n}. Su tale falda e su Σ_0 le $2n$ rette sono egualmente ordinabili, sicchè tale falda assume l'ufficio di falda Σ_n.

Con ciò è provata la proposizione e di conseguenza la limitazione (5).