ANTONIO MAMBRIANI (*)

Osservazioni su il classico teorema di confronto di STRM.

Il PICONE, come è ben noto, ha determinato (1) una identità integrale che permette di provare rapidamente il classico teorema di confronto di STURM su le equazioni differenziali ordinarie, lineari, del secondo ordine. Successivamente questa identità integrale pose in evidenza una funzione $\varphi(x)$ tale che l'identità stessa si ottiene calcolando la derivata di $\varphi(x)$, tenendo conto delle equazioni differenziali che si considerano e integrando detta derivata fra due zeri di $\varphi(x)$. In questa Nota, data l'importanza del teorema di confronto di STURM, credo opportuno osservare che, una volta individuata la funzione $\varphi(x)$, che chiameremo *funzione ausiliaria di* PICONE, per dimostrare tale teorema non conviene passare alla identità integrale di PICONE come ora si fa (2), basta invece limitarsi alla considerazione della funzione ausiliaria $\varphi(x)$ e della sua derivata. Analoga osservazione si ripete relativamente a un caso particolare notevole del teorema di confronto di STURM, nella cui dimostrazione ci si riconduce pure a una identità integrale (detta di STURM) (3).

La funzione ausiliaria di PICONE serve poi anche a formulare ulteriori precisazioni (n. 2).

Infine (n. 3), indico per l'enunciato del teorema di confronto di STURM una lieve modifica che estende il campo di applicazione di tale teorema.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma (Italia).

(1) M. PICONE, *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (1) **11**, n. 1, pp. 1-144 (1910), [cfr. p. 20, formula (7)].

(2) M. BÔCHER, *Leçons sur les méthodes de* STURM *dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes*, Monographies BOREL, Gauthier-Villars, Paris 1917, (cfr. pp. 53-55).

G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, N. Zanichelli, Bologna 1948 (2ª ediz.), (cfr. pp. 193-195).

(3) M. BÔCHER, loc. cit. in (2), (cfr. pp. 52-53). F. TRICOMI, *Equazioni differenziali*, Einaudi, Torino 1948, (cfr. pp. 118-120).

1. – Per maggiore chiarezza richiamo l'enunciato del teorema in oggetto e ne indico la dimostrazione modificata ([4]).

Teorema di confronto di STURM. (Il dato.) *Si abbiano due equazioni differenziali, lineari, del secondo ordine, in forma autoaggiunta,*

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) - Qy = 0\,, \qquad a \leqslant x \leqslant b\,, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\theta_1 \frac{dz}{dx}\right) - Q_1 z = 0\,, \qquad a \leqslant x \leqslant b\,, \tag{2}$$

dove le funzioni note

$$\begin{matrix} \theta = \theta(x)\,, & Q = Q(x)\,, \\ \theta_1 = \theta_1(x)\,, & Q_1 = Q_1(x)\,, \end{matrix} \qquad a \leqslant x \leqslant b\,,$$

sono continue ed è sempre $\theta > 0$, $\theta_1 > 0$.

(La ipotesi.) *Sia*

$$\theta(x) \geqslant \theta_1(x)\,, \qquad Q(x) \geqslant Q_1(x)\,, \qquad \text{per} \quad a \leqslant x \leqslant b\,, \tag{3}$$

senza che $Q(x)$ *e* $Q_1(x)$ *siano contemporaneamente nulle in alcun intervallo parziale di* $(a \ldots b)$. *Nell'equazione* (1) *una soluzione (non identicamente nulla)* $y(x)$ *abbia due zeri* α *e* β *(con* $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$*).*

(La tesi.) *Nell'equazione* (2) *ogni soluzione* $z(x)$ *ha almeno uno zero interno all'intervallo* $(\alpha \ldots \beta)$, *ad eccezione del caso particolare in cui sia*

$$\theta(x) = \theta_1(x)\,, \quad Q(x) = Q_1(x)\,, \quad cy(x) = z(x)\,, \quad \text{per} \quad \alpha \leqslant x \leqslant \beta\,, \tag{4}$$

essendo c *una costante.*

Dimostrazione. Se la soluzione considerata $z(x)$, di (2), è quella identicamente nulla, la tesi del teorema è evidente.

Se, invece, la soluzione considerata $z = z(x)$, di (2), non è quella identicamente nulla, formiamo con essa e con la sopranominata soluzione $y = y(x)$, di (1), avente gli zeri α e β, la funzione ausiliaria di PICONE

$$\mathcal{D}(x) \equiv \frac{y}{z}\,(\theta y' z - \theta_1 z' y) \equiv \theta y y' - \theta_1 z z' \left(\frac{y}{z}\right)^2 . \tag{5}$$

Questa funzione ha un valore determinato e finito in tutti e soli i punti x di $(a \ldots b)$ nei quali è $z = z(x) \neq 0$, e negli zeri α e β di $y = y(x)$ valgono in

([4]) Seguo nelle notazioni il SANSONE, loc. cit. in ([2]).

ogni caso le relazioni limiti

$$\mathcal{P}(\alpha+)=0\,,\qquad \mathcal{P}(\beta-)=0\,. \tag{6}$$

Inoltre, la funzione $\mathcal{P}(x)$ negli x ove è $z=z(x)\neq 0$ è anche derivabile e, virtù delle equazioni (1) e (2), risulta

$$\mathcal{P}'(x)\equiv(\theta-\theta_1)y'^2+\theta_1\frac{(y'z-yz')^2}{z^2}+(Q-Q_1)y^2\,. \tag{7}$$

Per le ipotesi (3) del teorema abbiamo poi $\mathcal{P}'(x)\geqslant 0$, da cui si conclude che $\mathcal{P}(x)$ negli x ove è $z=z(x)\neq 0$ è crescente-costante.

Se ora fosse $z=z(x)\neq 0$ per $\alpha<x<\beta$, sarebbe $\mathcal{P}(x)$ crescente-costante per $\alpha<x<\beta$, e in virtù delle (6) si avrebbe necessariamente

$$\mathcal{P}(x)=0 \qquad \text{per} \qquad \alpha<x<\beta\,,$$

e anche

$$\mathcal{P}'(x)=0 \qquad \text{per} \qquad \alpha<x<\beta\,.$$

Da (7) seguirebbe allora [tenendo presente che $y=y(x)$ non è identicamente nulla]

$$(\theta-\theta_1)y'=0\,,\quad y'z-yz'=0\,,\quad Q-Q_1=0\,,\quad \text{per}\quad \alpha<x<\beta\,. \tag{8}$$

Ciò essendo, se in un punto dell'intervallo $\alpha<x<\beta$ fosse $\theta-\theta_1\neq 0$, sarebbe $\theta-\theta_1\neq 0$ in tutto un intervallo parziale di $\alpha<x<\beta$ e in questo intervallo parziale per la prima delle (8) dovrebbe essere $y'=0$, perciò $y=$ costante, e per la (1) e la terza delle (8) sarebbe $Q(x)=Q_1(x)=0$ in tale intervallo parziale, contro l'ipotesi. Per $\alpha<x<\beta$ deve perciò aversi $\theta=\theta_1$, $Q=Q_1$ e, per la seconda delle (8), $z(x)=cy(x)$ con c costante.

Quindi, se le equazioni (1) e (2) non coincidono, oppure se coincidono e le soluzioni $y=y(x)$ e $z=z(x)$ considerate non sono linearmente dipendenti, non può essere $z=z(x)\neq 0$ per $\alpha<x<\beta$.

2. – Dalla precedente dimostrazione, mediante la funzione ausiliaria di PICONE, discende la precisazione seguente:

Fisso restando il dato e l'ipotesi del teorema di confronto di STURM, *il numero degli zeri interni ad* $(\alpha\ldots\beta)$ *di una qualunque soluzione (non identicamente nulla)* $z=z(x)$, *di* (2), *supera di una unità il numero degli zeri interni ad* $(\alpha\ldots\beta)$ *del prodotto*

$$y\cdot(\theta y'z-\theta_1 z'y)\,.$$

In particolare, se α *e* β *sono zeri consecutivi della soluzione considerata* $y=y(x)$, *di* (1), *e se* $\theta y'z-\theta_1 z'y$ *non si annulla nell'interno di* $(\alpha\ldots\beta)$, *la soluzione* $z=z(x)$ *ha uno zero e uno solo nell'interno di* $(\alpha\ldots\beta)$.

3. – Se si nota che moltiplicando ambo i membri della equazione (1) per una *costante* $k \neq 0$ s'ottiene una equazione equivalente ove le funzioni θ, Q si mutano in $k\theta$, kQ, possiamo estendere il campo di applicabilità del teorema di confronto di STURM, sostituendo alla prima parte della sua ipotesi quanto segue:

Esista una costante $k > 0$ tale che sia

$$k\theta(x) \geqslant \theta_1(x)\,, \qquad kQ(x) \geqslant Q_1(x)\,, \qquad per \quad a \leqslant x \leqslant b\,,$$

senza che $Q(x)$ e $Q_1(x)$ siano contemporaneamente nulle in alcun intervallo parziale di $(a \ldots b)$.