LETTERIO TOSCANO (*)

Una classe di polinomi della Matematica attuariale. (**)

1. – In Matematica attuariale, nello studio della funzione di sopravvivenza di MAKEHAM, si presentano i polinomi:

$$\begin{aligned} G_0^{(\alpha)}(x) &= 1\,, \\ G_1^{(\alpha)}(x) &= \alpha - x\,, \\ G_2^{(\alpha)}(x) &= \alpha^2 - (2\alpha + 1)x + x^2\,, \\ G_3^{(\alpha)}(x) &= \alpha^3 - (3\alpha^2 + 3\alpha + 1)x + 3(\alpha + 1)x^2 - x^3\,, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

la cui funzione generatrice è $e^{\alpha t + x(1-e^t)}$ in quanto vale lo sviluppo in serie

$$e^{\alpha t + x(1-e^t)} = \sum_0^\infty {}_i \frac{t^i}{i!} G_i^{(\alpha)}(x)\,.$$

Le prime proprietà fondamentali di questi polinomi sono state assegnate da J. F. STEFFENSEN (1). E qualcuna di esse era stata trovata prima, studiando la serie (2)

$$\sum_0^\infty {}_i (\alpha + i)^n \frac{x^i}{i!}$$

la cui somma è $e^x G_n^{(\alpha)}(-x)$.

In questo lavoro mi propongo di approfondire lo studio dei polinomi $G_n^{(\alpha)}(x)$. Li introduco diversamente, con una operazione differenziale: ritrovo i risultati noti [formule (2), (3), (4), (8), (9), (10), (12), (15)] e ne aggiungo altri. Successivamente, e questo è lo scopo principale del lavoro, stabilisco dei legami tra i polinomi $G_n^{(\alpha)}(x)$ e quelli di LAGUERRE generalizzati, legami che con-

---

(*) Indirizzo: Via Placida, 85 - Messina (Italia).

(**) Lavoro ricevuto il 6-II-1950.

(1) J. F. STEFFENSEN, *On a class of polynomials and their application to actuarial problems*, Skand. Aktuarietidskr., 75-97 (1928); *The poweroid, and extension of the mathematical notion of power*, Acta Math. **73**, 333-366 (1941). Cfr. pure E. T. BELL, *Exponential polynomials*, Ann. of Math. (2) **35**, 258-277 (1394).

(2) E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, *Modern Analysis*, Cambridge 1935, p. 336).

ducono a nuove rappresentazioni, relazioni integrali, e formule limiti sui polinomi $G_n^{(\alpha)}(x)$. Interessante è una relazione limite che conduce ai polinomi di HERMITE.

2. – Sia D_x, o brevemente D, simbolo di derivata rispetto a x. E introduciamo i polinomi

$$G_n^{(\alpha)}(x) = x^{-\alpha} e^x (x\mathrm{D})^n x^\alpha e^{-x} . \tag{1}$$

Dalla mia relazione ([3]) sullo sviluppo della potenza dell'operatore xD,

$$(x\mathrm{D})^n = \sum_0^n {}_i\, k_{n+1,\,i+1}^{(\alpha)} x^{i+\alpha}\, \mathrm{D}^i x^{-\alpha} ,$$

con

$$k_{n+1,\,i+1}^{(\alpha)} = \frac{\Delta_\alpha^i \alpha^n}{i!} ,$$

si ha subito

$$G_n^{(\alpha)}(x) = \sum_0^n {}_i\, (-1)^i k_{n+1,\,i+1}^{(\alpha)} x^i . \tag{2}$$

Se invece si sviluppa $(x\mathrm{D})^n x^\alpha e^{-x}$ con la relazione

$$(x\mathrm{D})^n x^\alpha e^{-x} = \sum_0^n {}_i \binom{n}{i} (x\mathrm{D})^i e^{-x} \cdot (x\mathrm{D})^{n-i} x^\alpha ,$$

si ha

$$G_n^{(\alpha)}(x) = \sum_0^n {}_i \binom{n}{i}\; G_{n-i}^{(0)}(x) \cdot \alpha^i . \tag{3}$$

Pertanto i polinomi G sono di grado n tanto in x quanto in α.
Dalla (2), poichè

$$\sum_0^n {}_i\, (-1)^i k_{n+1,\,i+1}^{(\alpha)}\, x^i = \left[\sum_0^n {}_i\, \frac{(-x)^i}{i!}\, \Delta_\alpha^i\right] \alpha^n = \left[\sum_0^\infty {}_i\, \frac{(-x\Delta_\alpha)^i}{i!}\right] \alpha^n = e^{-x\Delta_\alpha} \alpha^n ,$$

segue

$$G_n^{(\alpha)}(x) = e^{-x\Delta_\alpha} \alpha^n . \tag{4}$$

Per brevità, nel seguito denoteremo Δ_α con Δ.
Alla (1), essendo

$$(\mathrm{D}x)^n = x^{-1} (x\mathrm{D})^n x$$

([3]) L. TOSCANO, *Sulla iterazione dell'operatore* xD, Rend. Mat. (5) 8, 337-350 (1949).

e

$$x^{-\alpha}e^{x}(\mathrm{D}x)^{n}x^{\alpha}e^{-x} = x^{-\alpha-1}e^{x}(x\mathrm{D})^{n}x^{\alpha+1}e^{-x} ,$$

si può associare l'altra

(5) $$G_n^{(\alpha+1)}(x) = x^{-\alpha}e^{x}(\mathrm{D}x)^{n}x^{\alpha}e^{-x} .$$

3. – *a*) Un primo legame tra i polinomi G si ottiene con l'applicazione delle relazioni

$$(\mathrm{D}x)^n = \sum_0^n{}_i \binom{n}{i} (x\mathrm{D})^i ,$$

$$(x\mathrm{D})^n = \sum_0^n{}_i (-1)^{n-i} \binom{n}{i} (\mathrm{D}x)^i .$$

E si ha

(6) $$G_n^{(\alpha+1)}(x) = \sum_0^n{}_i \binom{n}{i} G_i^{(\alpha)}(x) ,$$

(7) $$G_n^{(\alpha)}(x) = \sum_0^n{}_i (-1)^{n-i}\binom{n}{i} G_i^{(\alpha+1)}(x) .$$

b) Successivamente, essendo

$$(x\mathrm{D})x^{-\alpha}e^{x}f(x) = x^{-\alpha}e^{x}(x-\alpha+x\mathrm{D})f(x) ,$$

si ha

$$(\alpha - x + x\mathrm{D})\, x^{-\alpha}e^{x}\, f(x) = x^{-\alpha}e^{x}\,(x\mathrm{D})\, f(x),$$

$$x^{-\alpha}e^{x}(x\mathrm{D})^{n+1}x^{\alpha}e^{-x} = (\alpha - x + x\mathrm{D}) \cdot x^{-\alpha}e^{x}(x\mathrm{D})^{n}x^{\alpha}e^{-x} ,$$

quindi per la (1)

(8) $$G_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (\alpha - x + x\mathrm{D})G_n^{(\alpha)}(x) ,$$

ovvero

(8′) $$G_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (\alpha - x)G_n^{(\alpha)}(x) + (x\mathrm{D})G_n^{(\alpha)}(x) .$$

c) Calcoliamo la differenza $G_n^{(\alpha+1)}(x) - G_n^{(\alpha)}(x) = \Delta G_n^{(\alpha)}(x)$.

Basta applicare alla (1) l'operatore Δ, e si ha

$$\Delta G_n^{(\alpha)}(x) = \sum_0^n{}_i (-1)^i \frac{\Delta^{i+1}\alpha^n}{i!}\, x^i = \sum_0^n{}_i (-1)^i(i+1)k_{n+1,i+2}^{(\alpha)}x^i =$$

$$= (\mathrm{D}x)\sum_0^n{}_i (-1)^i k_{n+1,i+2}^{(\alpha)}x^i = (\mathrm{D}x)\,\frac{\alpha^n - G_n^{(\alpha)}(x)}{x} = -\,\mathrm{D}G_n^{(\alpha)}(x) .$$

Cioè

(9) $$\Delta G_n^{(\alpha)}(x) = -\,\mathrm{D}G_n^{(\alpha)}(x) ,$$

ovvero

$$\frac{\mathrm{d}G_n^{(\alpha)}(x)}{\mathrm{d}x} = G_n^{(\alpha)}(x) - G_n^{(\alpha+1)}(x) . \tag{9'}$$

E associando questa alla (8') si ottiene

$$G_{n+1}^{(\alpha)}(x) = \alpha G_n^{(\alpha)}(x) - xG_n^{(\alpha+1)}(x) . \tag{10}$$

4. – La funzione generatrice dei polinomi G si può ottenere ricordando dal n. 1 che

$$\sum_0^\infty{}_i (\alpha + i)^n \frac{(-x)^i}{i!} = e^{-x}G_n^{(\alpha)}(x) . \tag{11}$$

Allora

$$\sum_0^\infty{}_i \frac{t^i}{i!} G_i^{(\alpha)}(x) = \sum_0^\infty{}_i \frac{t^i}{i!} e^x \sum_0^\infty{}_j (\alpha + j)^i \frac{(-x)^j}{j!} = e^x \sum_0^\infty{}_j \frac{(-x)^j}{j!} \sum_0^\infty{}_i \frac{t^i(\alpha+j)^i}{i!} =$$

$$= e^x \sum_0^\infty{}_j \frac{(-x)^j}{j!} e^{t(\alpha+j)} = e^{\alpha t + x} \sum_0^\infty{}_j \frac{(-xe^t)^j}{j!} = e^{\alpha t + x(1-e^t)} ,$$

cioè

$$e^{\alpha t + x(1-e^t)} = \sum_0^\infty{}_i \frac{t^i}{i!} G_i^{(\alpha)}(x) . \tag{12}$$

Da questo sviluppo in serie è facile ricavare una formula di addizione. Si ha

$$\sum_0^\infty{}_{i_1} \frac{t^{i_1}}{i_1!} G_{i_1}^{(\alpha_1)}(x_1) \dots \sum_0^\infty{}_{i_r} \frac{t^{i_r}}{i_r!} G_{i_r}^{(\alpha_r)}(x_r) = e^{(\alpha_1+\dots+\alpha_r)t + (x_1+\dots+x_r)(1-e^t)} =$$

$$= \sum_0^\infty{}_i \frac{t^i}{i!} G_i^{(\alpha_1+\dots+\alpha_r)}(x_1 + \dots + x_r) .$$

E per $i = n$ si conclude

$$G_n^{(\alpha_1+\dots+\alpha_r)}(x_1 + \dots + x_r) = \sum \frac{n!}{i_1! \dots i_r!} G_{i_1}^{(\alpha_1)}(x_1) \dots G_{i_r}^{(\alpha_r)}(x_r) , \tag{13}$$

con $i_1, \dots, i_r$ interi positivi, o nulli, tali che $i_1 + \dots + i_r = n$.

Alla stessa formula di addizione si può pervenire tenendo presente che per l'operatore $x\mathrm{D}$ vale la relazione

$$(x\mathrm{D})^n f_1 f_2 \dots f_r = \sum \frac{n!}{i_1! \dots i_r!} (x\mathrm{D})^{i_1} f_1 \dots (x\mathrm{D})^{i_r} f_r ,$$

con $i_1, \dots, i_r$ interi positivi, o nulli, tali che $i_1 + \dots + i_r = n$.

Infatti, posto $f_1 = (x_1x)^{\alpha_1}e^{-x_1x}, \dots, f_r = (x_rx)^{\alpha_r}e^{-x_rx}$, osservato che

$$(x\mathrm{D})^{i_1}(x_1x)^{\alpha_1}e^{-x_1x} = (x_1x\mathrm{D}_{x_1x})^{i_1}(x_1x)^{\alpha_1}e^{-x_1x} = (x_1x)^{\alpha_1}e^{-x_1x}G_{i_1}^{(\alpha_1)}(x_1x)$$

e che

$$(x\mathrm{D})^n(x_1x)^{\alpha_1}e^{-x_1x}\dots(x_rx)^{\alpha_r}e^{-x_rx}=\frac{x_1^{\alpha_1}\dots x_r^{\alpha_r}}{(x_1+\dots+x_r)^{\alpha_1+\dots+\alpha_r}}\cdot$$

$$\cdot[(x_1+\dots+x)_r\,x\mathrm{D}_{(x_1+\dots+x_r)x}]^n[(x_1+\dots+x_r)x]^{\alpha_1+\dots+\alpha_r}e^{-(x_1+\dots+x_r)x}=$$

$$=(x_1x)^{\alpha_1}\dots(x_rx)^{\alpha_r}e^{-(x_1+\dots+x_r)x}G_n^{(\alpha_1+\dots+\alpha_r)}[(x_1+\dots+x_r)x]\,,$$

segue per $x=1$ la formula di addizione già trovata.

In particolare, per $r=2$, $x_1=x$, $x_2=0$, $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_1+\alpha_2=\beta$, si ha

$$G_n^{(\beta)}(x)=\sum_0^n{}_i\binom{n}{i}(\beta-\alpha)^{n-i}G_i^{(\alpha)}(x)\,. \tag{14}$$

5. – I polinomi G, considerati rispetto ad α, sono della classe di APPELL. Premettiamo che a ogni funzione $a(t)$ sviluppabile in serie $\sum_0^\infty{}_i a_i\frac{t^i}{i!}$ si può far corrispondere una successione di polinomi, in α,

$$A_0\,,\quad A_1(\alpha)\,,\ \dots\,,\quad A_n(\alpha)\,,\ \dots$$

definiti dallo sviluppo

$$e^{\alpha t}a(t)=\sum_0^\infty{}_i\frac{t^i}{i!}A_i(\alpha)\,.$$

Essi sono espressi da

$$A_n(\alpha)=\sum_0^n{}_i\binom{n}{i}a_i\alpha^{n-i}$$

e soddisfano la proprietà fondamentale

$$\frac{\mathrm{d}A_n(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}=nA_{n-1}(\alpha)\,.$$

Nel caso nostro, posto

$$a(t)=e^{x(1-e^t)}\,,$$

si ha

$$a_i=G_i^{(0)}(x)\,,\qquad A_n(\alpha)=G_n^{(\alpha)}(x)$$

[in coincidenza con l'espressione (3)], e vale la condizione di APPELL

$$\frac{\mathrm{d}G_n^{(\alpha)}(x)}{\mathrm{d}\alpha}=nG_{n-1}^{(\alpha)}(x)\,. \tag{15}$$

Per $x=-1$ si conclude che appartengono alla classe di APPELL i polinomi

$$G_n^{(\alpha)}(-1)=\sum_0^n{}_i\binom{n}{i}G_i^{(0)}(-1)\cdot\alpha^{n-i}\,.$$

I coefficienti $G_i^{(0)}(-1)$ sono dati da

$$G_i^{(0)}(-1) = k_{n+1,1}^{(0)} + k_{n+1,2}^{(0)} + \ldots + k_{n+1,n+1}^{(0)} = k_{n,1} + k_{n,2} + \ldots + k_{n,n} ,$$

con $k_{n,i}$ numeri di STIRLING di seconda specie, e sono stati già studiati [4].

6. – Passiamo ora a stabilire dei legami tra i polinomi G e quelli di LAGUERRE generalizzati

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!} \mathrm{D}^n x^{n+\alpha} e^{-x} .$$

La relazione su operatori differenziali

$$(x\mathrm{D})^n = \sum_0^n {}_i \, k_{n+1,i+1}^{(\alpha)} \, x^{i+\alpha} \, \mathrm{D}^i x^{-\alpha} ,$$

si può facilmente presentare nella forma

$$(\mathrm{D}x)^n = \sum_0^n {}_i \, k_{n+1,i+1}^{(\nu+1)} x^{\nu+i} \mathrm{D}^i x^{-\nu} .$$

E vale ancora la relazione analoga

$$(x\mathrm{D})^n = \sum_0^n {}_i \, (-1)^{n-i} k_{n+1,i+1}^{(1-\nu)} x^\nu \mathrm{D}^i x^{i-\nu} .$$

Applicando queste alla funzione $x^\alpha e^{-x}$ si ottengono i due sviluppi

(16) $$G_n^{(\alpha+1)}(x) = \sum_0^n {}_i \, i! \, k_{n+1,i+1}^{(\nu+1)} L_i^{(\alpha-\nu-i)}(x) ,$$

(17) $$G_n^{(\alpha)}(x) = \sum_0^n {}_i \, (-1)^{n-i} i! \, k_{n+1,i+1}^{(1-\nu)} L_i^{(\alpha-\nu)}(x) .$$

E poichè

$$k_{n+1,i+1}^{(0)} = k_{n,i} , \qquad k_{n+1,i+1}^{(1)} = k_{n+1,i+1} ,$$

per $\nu = \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases}$ dalla (16) e per $\nu = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ dalla (17) si deducono gli sviluppi particolari

(18) $$G_n^{(\alpha)}(x) = \sum_1^n {}_i \, i! \, k_{n,i} L_i^{(\alpha-i)}(x) ,$$

(19) $$G_n^{(\alpha+1)}(x) = \sum_0^n {}_i \, i! \, k_{n+1,i+1} L_i^{(\alpha-i)}(x) ,$$

---

[4] L. F. EPSTEIN, *A function related to the series for e^{e^x}*. J. Math. Physics **18**, 153-173 (1939).

$$G_n^{(a+1)}(x) = \sum_1^n {}_i\, (-1)^{n-i} i!\, k_{n,i} L_i^{(a)}(x)\,, \tag{20}$$

$$G_n^{(a)}(x) = \sum_0^n {}_i\, (-1)^{n-i} i!\, k_{n+1,i+1} L_i^{(a)}(x)\,. \tag{21}$$

Viceversa i polinomi di LAGUERRE si possono esprimere con i $G_n^{(a)}(x)$, e basta applicare opportune relazioni differenziali (5). In forma simbolica, valgono i risultati

$$n!\, L_n^{(a-n)}(x) = G^{(a)}(x)[G^{(a)}(x) - 1] \ldots [G^{(a)}(x) - n + 1]\,, \tag{22}$$

$$n!\, L_n^{(a-n)}(x) = [G^{(a+1)}(x) - 1][G^{(a+1)}(x) - 2] \ldots [G^{(a+1)}(x) - n]\,, \tag{23}$$

$$n!\, L_n^{(a)}(x) = G^{(a+1)}(x)[G^{(a+1)}(x) + 1] \ldots [G^{(a+1)}(x) + n - 1]\,, \tag{24}$$

$$n!\, L_n^{(a)}(x) = [G^{(a)}(x) + 1][G^{(a)}(x) + 2] \ldots [G^{(a)}(x) + n]\,. \tag{25}$$

E il simbolismo va inteso nel senso che la potenza r-esima di G deve tradursi con G_r.

Tra i tanti altri sviluppi che si possono stabilire con i polinomi G ed L, meritano di esserne riportati due in cui intervengono dei coefficienti numerici studiati da EULERO

$$A_{n,1} = A_{n,n} = 1\,,$$

$$A_{n,i} = (n - i + 1)A_{n-1,i-1} + iA_{n-1,i}\,,$$

soddisfacenti alla relazione di simmetria

$$A_{n,i} = A_{n,n-i+1}\,.$$

Essi sono

$$G_n^{(a)}(x) = \sum_1^n {}_i\, A_{n,i} L_n^{(a-n+i-1)}(x)\,, \tag{26}$$

$$G_n^{(a+1)}(x) = \sum_1^n {}_i\, A_{n,i} L_n^{(a-i+1)}(x)\,. \tag{27}$$

E si ottengono, analogamente ai precedenti, dalle mie relazioni su operatori differenziali (6)

$$n!\,(x\mathrm{D})^n = \sum_1^n {}_i\, A_{n,i} x^{n-i+1} \mathrm{D}^n x^{i-1}\,,$$

$$n!\,(\mathrm{D}x)^n = \sum_1^n {}_i\, A_{n,i} x^{i-1} \mathrm{D}^n x^{n-i+1}\,.$$

---

(5) L. TOSCANO, *Operatori lineari e numeri di Stirling generalizzati*. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **14**, 287-297 (1935-36).

(6) L. TOSCANO, *Sulla somma di alcune serie*, Boll. Un. Mat. Ital. **16**, 144-149 (1937); *Su gli operatori lineari associati*, Atti R. Ist. Veneto **96** (parte seconda), 457-473 (1936-37).

7. – La (21) si presta bene per stabilire nuovi risultati sui polinomi G. E incominciamo con l'assegnare per essi nuove rappresentazioni.

Prendiamo le mosse dalle

$$n!\,L_n^{(\alpha)}(x)=(t\mp1)^{-\alpha}D_t^n[e^{\pm xt}(t\mp1)^{n+\alpha}]_{t=0},$$

$$n!\,L_n^{(\alpha)}(x)=(t\mp x)^{-\alpha}D_t^n[e^{\pm t}(t\mp x)^{n+\alpha}]_{t=0},$$

note per $\alpha=0$ (7). Sostituendo la prima nella (21) si ha

$$G_n^{(\alpha)}(x)=\lim_{t\to0}(t\mp1)^{-\alpha}\left[\sum_0^n{}_i(-1)^{n-i}k_{n+1,i+1}D_t^i(t\mp1)^i\right]e^{\pm xt}(t\mp1)^\alpha=$$

$$=\lim_{t\to0}(t\mp1)^{-\alpha}[(t\mp1)D_t]^n e^{\pm xt}(t\mp1)^\alpha,$$

cioè

$$G_n^{(\alpha)}(x)=\lim_{t\to0}(t\mp1)^{-\alpha}[(t\mp1)D_t]^n e^{\pm xt}(t\mp1)^\alpha. \tag{28}$$

E sostituendo la seconda si ha analogamente

$$G_n^{(\alpha)}(x)=\lim_{t\to0}(t\mp x)^{-\alpha}[(t\mp x)D_t]^n e^{\pm t}(t\mp x)^\alpha. \tag{29}$$

I reciproci dei polinomi di LAGUERRE si possono rappresentare con (8)

$$x^nL_n^{(\alpha)}\left(\frac{s}{x}\right)=\frac{x^{n+\alpha}e^{s/x}}{n!}D_{1/x}^n\frac{e^{-s/x}}{x^{n+\alpha}}.$$

Ed essendo

$$D_{1/x}^n=(-1)^nx^{n+1}D_x^nx^{n-1},$$

si ha pure

$$L_n^{(\alpha)}\left(\frac{s}{x}\right)=\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+\alpha+1}e^{s/x}D_x^n\frac{e^{-s/x}}{x^{\alpha+1}}.$$

Sostituendo questa nella (21) si ha

$$G_n^{(\alpha)}(x)=(-1)^nx^{\alpha+1}e^{s/x}\left[\sum_0^n{}_i k_{n+1,i+1}x^iD^i\right]\frac{e^{-s/x}}{x^{\alpha+1}}=(-1)^nx^{\alpha+1}e^{s/x}(Dx)^n\frac{e^{-s/x}}{x^{\alpha+1}},$$

cioè

$$G_n^{(\alpha)}\left(\frac{s}{x}\right)=(-1)^nx^{\alpha+1}e^{s/x}(Dx)^n\frac{e^{-s/x}}{x^{\alpha+1}}. \tag{30}$$

I polinomi di LAGUERRE, considerati rispetto ad α, si possono ancora rap-

---

(7) A. A. NIJLAND, *Over een bejzondere soort van geheele functiën*, J. Van Boekhoven, Utrecht 1896.

(8) L. TOSCANO, *Su i polinomi ipergeometrici*, Boll. Un. Mat. Ital. (2) 1, 224-229 (1939).

presentare con (9)

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,x^\alpha}\,\Delta^n\,\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\,.$$

Sostituendo nella (21) si ha

$$G_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+1)}{x^\alpha}\left[\sum_0^n{}_i\, k_{n+1,i+1}(\alpha+1,\,i)\,\Delta^i\right]\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\,.$$

D'altra parte è noto che (10)

$$\sum_0^n{}_i\, k_{n+1,i+1}(\alpha+1,\,i)\Delta^i = (\Delta\alpha)^n\,,$$

e quindi

(31) $$G_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+1)}{x^\alpha}\,(\Delta\alpha)^n\,\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\,.$$

Inoltre è noto che (11)

$$[(\alpha+1)\Delta]^n = \sum_0^n{}_i\,(-1)^{n-i}\binom{n}{i}(\Delta\alpha)^i\,,$$

e per la precedente segue

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^\alpha}\,[(\alpha+1)\Delta]^n\,\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = (-1)^n\sum_0^n{}_i\binom{n}{i}G_i^{(\alpha)}(x)\,.$$

Per la (6) il secondo membro risulta uguale a $(-1)^nG_n^{\alpha+1}(x)$, e pertanto si conclude che

(32) $$G_n^{(\alpha+1)}(x) = \frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+1)}{x^\alpha}\,[(\alpha+1)\Delta]^n\,\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\,.$$

8. – Facendo sempre ricorso alla (21) e a relazioni integrali su polinomi di Laguerre, è facile ricavare le corrispondenti per i polinomi G. Le più espressive sono

(33) $$\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^{\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{ux})\,G_n^{(1)}(\lambda x)\,dx = \frac{(-1)^n u^{\alpha/2}e^{-u/\lambda}}{\lambda^{\alpha+1}}\,G_n^{(\alpha)}\left(\frac{u}{\lambda}\right),$$

(34) $$\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{ux})\,G_n^{(\beta)}(x)\,dx = (-1)^n u^{\alpha/2}e^{-u}G_n^{(\alpha-\beta+1)}(u),$$

---

(9) L. Toscano, *I polinomi ipergeometrici nel calcolo delle differenze finite*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **4**, 398-409 (1949); *Sviluppi in serie della funzione ipergeometrica di Kummer*, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **6**, 590-597 (1949).

(10) L. Toscano, *Operatori permutabili di secondo ordine*, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **23**, 309-312 (1936).

(11) Cfr. loc. cit. in (10).

con $J_\alpha(x) = \sum_0^\infty{}_i \frac{(-1)^i x^{\alpha+2i}}{2^{\alpha+2i}\, i!\, \Gamma(\alpha+i+1)}$ funzione di BESSEL di prima specie;

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha G_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)\,dx = (-1)^{m+n}\Gamma(\alpha+m+1)k_{n+1,m+1}\,, \tag{35}$$

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha G_m^{(\alpha)}(x)G_n^{(\alpha)}(x)\,dx = (-1)^{m+n}\sum_0^{\min(m,n)}{}_i\; i!\,\Gamma(\alpha+i+1)k_{m+1,i+1}k_{n+1,i+1}\,. \tag{36}$$

Le (33) e (34) si possono specializzare per $\alpha = \pm\frac{1}{2}$. La (33) corrisponde alla relazione integrale di LE ROY sui polinomi di LAGUERRE ([12]), la (34) alla ([13])

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{ux})L_n^{(\beta)}(x)\,dx = (-1)^n u^{\alpha/2}e^{-u}L_n^{(\alpha-\beta-n)}(u)\,,$$

le (35) e (36) alle condizioni di ortogonalità.

9. – Passiamo infine alla ricerca di formule limiti. È noto che ([14])

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-n}L_n^{(\alpha)}(\alpha x) = \frac{(1-x)^n}{n!}\,.$$

E sostituendo nella (21) si trova

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-n}G_n^{(\alpha)}(\alpha x) = (1-x)^n\,. \tag{37}$$

Questo risultato si può pure ottenere direttamente dalla (2). Si ha

$$\alpha^{-n}G_n^{(\alpha)}(\alpha x) = \sum_0^n{}_i (-1)^i \frac{k_{n+1,i+1}^{(\alpha)}}{\alpha^{n-i}}x^i\,.$$

Ma ([15])

$$i!\,k_{n+1,i+1}^{(\alpha)} = \sum_i^n{}_r\, r!\,k_{n,r}\binom{\alpha}{r-i}\,,$$

$$\frac{i!\,k_{n+1,i+1}^{(\alpha)}}{\alpha^{n-i}} = \sum_i^n{}_r\, r!\,k_{n,r}\frac{(-1)^{r-i}(-\alpha,\,r-i)}{(r-i)!\,\alpha^{n-i}}\,,$$

([12]) L. TOSCANO, *Trasformata di Laplace di prodotti di funzioni di Bessel e polinomi di Laguerre*, Comment. Pont. Acad. Sci. 5, 471-500 (1941).

([13]) E. FELDHEIM, *Développements en série de polynomes d'Hermite et de Laguerre à l'aide des transformations de Gauss et de Hankel*, I, Proc. Koninklijke Nederlandsche Akad. van Wetenschappen 43, 224-239 (1940).

([14]) G. SZEGÖ, *Orthogonal polynomials*, New Jork 1939, (p. 372).

([15]) Cfr. ([3]).

da cui

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{k^{(\alpha)}_{n+1,i+1}}{\alpha^{n-i}} = \binom{n}{i}.$$

E risalendo

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-n} G^{(\alpha)}_n(\alpha x) = \sum_0^n{}_i\, (-1)^i \binom{n}{i} x^i = (1-x)^n .$$

Dalla precedente espressione di $i!\,k^{(\alpha)}_{n+1,i+1}$ si ha ancora

$$\frac{k^{(\alpha)}_{n+1,n-i+1}}{n^{2i}} = \sum_0^i{}_r\, \frac{k_{n,n-r}}{n^{2r}} \frac{n!}{(n-i)!\,n^i} \frac{(n-r)!\,n^r}{n!} \frac{1}{n^{i-r}} \binom{\alpha}{i-r}.$$

D'altra parte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-i)!\,n^i} = 1 , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(n-r)!\,n^r}{n!} = 1$$

e [16]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n,n-r}}{n^{2r}} = \frac{1}{r!\,2^r}.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^{(\alpha)}_{n+1,n-i+1}}{n^{2i}} = \frac{1}{i!\,2^i}.$$

Inoltre

$$(-n^2x)^{-n} G^{(\alpha)}_n(n^2 x) = \sum_0^n{}_i\, \frac{k^{(\alpha)}_{n+1,n-i+1}}{n^{2i}} \left(\frac{-1}{x}\right)^i$$

e, per $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} (-n^2x)^{-n} G^{(\alpha)}_n(n^2x) = e^{-1/(2x)} . \tag{38}$$

Per ultima formula limite troviamo la corrispondente della [17]

$$\lim_{a\to 0} a^n L^{(1/a^2+c)}_n \left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a^2}\right) = \frac{(-1)^n}{n!} H_n(x) ,$$

con

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \mathrm{D}^n e^{-x^2/2}$$

polinomio di HERMITE e c costante.

---

[16] C. JORDAN, *Calculus of finite differences*, Budapest 1939, (p. 175).

[17] G. PALAMÀ, *Sulla soluzione polinomiale della* $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$, Boll. Un. Mat. Ital. (2) **1**, 337-339 (1939); L. TOSCANO, *Relazioni tra i polinomi di Laguerre e di Hermite*, Boll. Un. Mat. Ital. (2) **2**, 460-466 (1940).

Sostituendo nella (21) si ha

$$a^n G_n^{(1/a^2+c)}\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{a^2}\right)=\sum_{0}^{n}{}_i\,(-1)^{n-i}i\,!\,k_{n+1,i+1}a^n L_i^{(1/a^2+c)}\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{a^2}\right)$$

e quindi

$$\lim_{a\to 0} a^n G_n^{(1/a^2+c)}\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{a^2}\right)=(-1)^n H_n(x)\,. \tag{39}$$

Ma si può operare direttamente a partire dalla (1).
Si ha

$$a^n G_n^{(1/a^2+c)}\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{a^2}\right)=(ax+1)^{-1/a^2-c}e^{x/a}\,[(ax+1)\mathrm{D}]^n(ax+1)^{1/a^2+c}e^{-x/a}\,.$$

D'altra parte ($|\,ax\,|<1$)

$$\log\,(ax+1)^{1/a^2+c}\,e^{-x/a}=-\frac{x^2}{2}+\left[\frac{ax^3}{3}-\frac{a^2x^4}{4}+\ldots\right]+\log\,(ax+1)^c,$$

$$\lim_{a\to 0}\log\,(ax+1)^{1/a^2+c}e^{-x/a}=-\frac{x^2}{2}\,,$$

$$\lim_{a\to 0}\,(ax+1)^{1/a^2+c}e^{-x/a}=e^{-x^2/2}\,,$$

e risalendo segue

$$\lim_{a\to 0} a^n G_n^{(1/a^2+c)}\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{a^2}\right)=e^{x^2/2}\mathrm{D}^n e^{-x^2/2}=(-1)^n H_n(x)\,.$$

Dalla formula di addizione (13) dei polinomi G, applicando la (39), si può ottenere quella dei polinomi di Hermite.