COSIMO SANGERMANO (*)

Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia a jacobiano nullo, di caratteristica zero. (**)

1. – Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari S_r in una coppia a jacobiano nullo sono state studiate dal BOMPIANI, dal VILLA e da altri (1). Però, come mi ha fatto rilevare il prof. VILLA, il caso in cui lo jacobiano è nullo e di caratteristica zero differisce profondamente dagli altri casi già studiati. Tale caso per $r = 2$ è stato esaminato in una mia Nota recente (2), mentre per $r = 3$ viene appunto esaminato nel presente lavoro.

2. – Una corrispondenza algebrica associata alla trasformazione.

Consideriamo fra due spazi ordinari $S_3(x, y, z)$, $S'_3(x', y', z')$ una trasformazione puntuale T, e sia (O, O') una coppia di punti corrispondenti in relazione alla quale il determinante jacobiano di T sia (nullo e) di caratteristica zero. Assumendo i punti O, O' come origini dei sistemi di coordinate proiettive non omogenee dei rispettivi spazi, le equazioni di T si possono scrivere nell'intorno della coppia considerata

$$(2.1)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + [3] \\ y' &= b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{23}yz + 2b_{31}zx + [3] \\ z' &= c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + 2c_{12}xy + 2c_{23}yz + 2c_{31}zx + [3] \end{aligned}\right.$$

dove le a, b, c sono costanti e si è indicato con [3] l'insieme dei termini degli sviluppi in serie di grado > 2.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma (Italia).

(**) Lavoro eseguito nell'Istituto di Matematica della Università di Parma e ricevuto il 25-X-1949.

(1) Si veda il lavoro recente, anche per le notizie bibliografiche sull'argomento: M. VILLA e G. VAONA, *Le trasformazioni puntuali in una coppia a jacobiano nullo, I. Intorno del 2° ordine. II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci.* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **4**, 184-278 (1949).

(2) C. SANGERMANO, *Le trasformazioni puntuali fra due piani in una coppia a jacobiano nullo di caratteristica zero.* Boll. Un. Mat. It. (3) **4**, 260-267 (1949).

Ogni E_2 di centro O tangente alla retta di equazioni

$$x = m_1 t\,, \quad y = m_2 t\,, \quad z = m_3 t$$

viene trasformato dalla T in un elemento cuspidale avente per tangente (cuspidale) in O' la retta di equazioni

$$x' = m'_1 t\,, \quad y' = m'_2 t\,, \quad z' = m'_3 t\,,$$

essendo

$$m'_1 = \sum a_{ik} m_i m_k\,, \quad m'_2 = \sum b_{ik} m_i m_k\,, \quad m'_3 = \sum c_{ik} m_i m_k\,, \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$ (3).

Dalle (2.2) appare che la T determina fra le rette uscenti da O e quelle uscenti da O' una corrispondenza algebrica $\Gamma[4,1]$.

Assumendo in S'_3 come rette $y' = z' = 0$, $z' = x' = 0$, $x' = y' = 0$ le corrispondenti in Γ delle rette analoghe del riferimento proiettivo di S_3, si ha

$$b_{11} = c_{11} = a_{22} = c_{22} = a_{33} = b_{33} = 0\,, \qquad (a_{11} b_{22} c_{33} \neq 0)\,. \tag{2.3}$$

3. – Cono jacobiano ed altri enti geometrici.

La superficie jacobiana di T ha in O punto triplo; il relativo cono tangente (che si dirà brevemente *cono jacobiano*) ha l'equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & a_{21}x + a_{23}z & a_{31}x + a_{32}y \\ b_{12}y + b_{13}z & b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z & b_{31}x + b_{32}y \\ c_{12}y + c_{13}z & c_{21}x + c_{23}z & c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z \end{vmatrix} = 0\,. \tag{3.1}$$

Le rette $y = z = 0$, $z = x = 0$ del riferimento proiettivo di S_3 possono scegliersi fra le generatrici di tale cono; si ha quindi

$$\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ c_{12} & c_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{12} & c_{23} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} = 0. \tag{3.2}$$

Assumeremo anzi come rette $y = z = 0$, $z = x = 0$ le due rette che proiettano da O due dei punti di flesso della sezione piana generica del cono jacobiano (4).

Consideriamo un piano generico per la retta $y' = z' = 0$ e un piano generico per la retta $z' = x' = 0$, aventi rispettivamente le equazioni

$$y' = h_1 z'\,, \qquad x' = h_2 z'\,. \tag{3.3}$$

---

(3) $a_{ik} = a_{ki}$, $b_{ik} = b_{ki}$, $c_{ik} = c_{ki}$.

(4) Il caso in cui tale sezione piana sia una cubica cuspidata va quindi esaminato a parte.

Ciascuno di essi ha per corrispondente in S_3 una superficie dotata di punto doppio in O; i relativi coni tangenti segano il piano $z = 0$ rispettivamente nelle coppie di rette

$$z = 2(h_1 c_{12} - b_{12})xy - b_{22}y^2 = 0\,,$$
$$z = 2(h_2 c_{12} - a_{12})xy - a_{11}x^2 = 0\,.$$

Ciascuna di queste coppie è costituita da rette coincidenti (necessariamente in una delle rette $y = z = 0$, $z = x = 0$) quando e solo quando

$$h_1 = \frac{b_{12}}{c_{12}}\,, \qquad h_2 = \frac{a_{12}}{c_{12}}\,, \tag{3.4}$$

rispettivamente.

Assumendo i piani (3.3) relativi ai valori (3.4) di h_1, h_2 [5], rispettivamente come piani coordinati $y' = 0$, $x' = 0$, si ha

$$b_{12} = a_{12} = 0\,. \tag{3.5}$$

Segue, tenuto conto delle (3.2),

$$a_{23} = b_{13} = 0\,. \tag{3.6}$$

L'equazione del cono jacobiano diviene

$$\begin{aligned} &a_{13}b_{23}c_{33}z^3 + (a_{11}b_{23}x + a_{13}b_{22}y)c_{33}z^2 + \\ &\quad + [a_{11}b_{23}c_{13}x^2 + (a_{11}b_{22}c_{33} - 2a_{13}b_{23}c_{12})xy + a_{13}b_{22}c_{23}y^2]z + \\ &\quad + [a_{11}(b_{22}c_{13} - b_{23}c_{12})x + b_{22}(a_{11}c_{23} - a_{13}c_{12})y]xy = 0\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

I piani tangenti lungo le generatrici $y = z = 0$, $z = x = 0$ sono rispettivamente

$$(b_{22}c_{13} - b_{23}c_{12})y + c_{13}b_{23}z = 0$$
$$(a_{11}c_{23} - a_{13}c_{12})x + c_{23}a_{13}z = 0\,.$$

Questi piani hanno col cono jacobiano un contatto del secondo ordine rispettivamente lungo le rette $y = z = 0$, $z = x = 0$; è dunque

$$\begin{cases} S_{102}X_1^2 - S_{111}X_1Y_1 + S_{120}Y_1^2 = 0 \\ S_{012}X_2^2 - S_{111}X_2Y_2 + S_{210}Y_2^2 = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

dove si è posto per brevità:

$$X_1 = b_{22}c_{13} - b_{23}c_{12}\,, \quad X_2 = a_{11}c_{23} - a_{13}c_{12}\,, \quad Y_1 = c_{13}b_{23}\,, \quad Y_2 = c_{23}a_{13}\,,$$

e S_{ijk} è il coefficiente di $x^iy^jz^k$ nella (3.7).

---

[5] Si suppone che questi piani siano distinti, sicchè $c_{12} \neq 0$.

La scelta degli elementi di riferimento fatta fin qui porge già riferimenti metrici intrinseci. Le equazioni di T assumono la forma

$$(3.9)\qquad \begin{cases} x' = a_{11}x^2 + 2a_{13}xz & + [3] \\ y' = b_{22}y^2 + 2b_{23}yz & + [3] \\ z' = c_{22}z^2 + 2c_{12}xy + 2c_{23}yz + 2c_{31}zx & + [3] , \end{cases}$$

coi coefficienti a, b, c legati dalle relazioni (3.8).

4. – Riferimenti proiettivi intrinseci nelle stelle O, O'.

Le superficie corrispondenti ai piani $x' = 0$, $y' = 0$ hanno in O un punto doppio biplanare [6]; le due coppie di piani tangenti sono date rispettivamente dalle equazioni

$$(4.1)\qquad x = 0 , \quad a_{11}x + 2a_{13}z = 0 ,$$

$$(4.2)\qquad y = 0 , \quad b_{22}y + 2b_{23}z = 0 .$$

Assumendo il secondo dei piani (4.1) e il secondo dei piani (4.2) rispettivamente come piani $x = z$, $y = z$, si ha

$$(4.3)\qquad 2a_{13} = -a_{11} , \qquad 2b_{23} = -b_{22} .$$

Assumeremo infine come retta $x' = y' = z'$ la corrispondente in Γ (n. 2) della $x - y = z = 0$ (or ora caratterizzata); si ha allora

$$(4.4)\qquad a_{11} = b_{22} = 2c_{12} .$$

Restano così stabiliti riferimenti intrinseci (proiettivi) nelle due stelle O, O'.
Posto

$$2a = a_{11} = b_{22} = 2c_{12} , \qquad c = c_{33} ,$$
$$-l = c_{23} , \qquad -m = c_{31} ,$$

le equazioni di T si scrivono, fino all'intorno del secondo ordine di O, O'

$$(4.5)\qquad \begin{cases} x' = 2ax^2 - 2axz & + [3] \\ y' = 2ay^2 - 2ayz & + [3] \\ z' = cz^2 + 2axy - 2mxz - 2lyz & + [3] , \end{cases}$$

coi coefficienti l, m, n legati dalle due relazioni

$$(4.6)\qquad \begin{cases} (2l + a)m^2 - (2c + a)am + ca^2 = 0 \\ (2m + a)l^2 - (2c + a)al + ca^2 = 0 . \end{cases}$$

---

[6] Si suppone $a_{13} \neq 0$, $b_{23} \neq 0$.

Si può verificare che sono invarianti proiettivi i rapporti $a : c : l : m$; ossia, la trasformazione T possiede, nell'intorno del secondo ordine della coppia (O, O') un invariante proiettivo indipendente.

5. – Intorno del 3° e 4° ordine.

Scriviamo le equazioni di T fino all'intorno del 3° ordine di (O, O'):

$$(5.1)\qquad \begin{cases} x' = 2ax(x-z) & + \varphi_3(x, y, z) + [4] \\ y' = 2ay(y-z) & + \psi_3(x, y, z) + [4] \\ z' = cz^2 + 2axy - 2mxz - 2lyz & + \omega_3(x, y, z) + [4], \end{cases}$$

avendo indicato con φ_3 (e analogamente con ψ_3, ω_3) un polinomio omogeneo di terzo grado in x, y, z, del quale denoteremo con a_{ijk} (o rispettivamente b_{ijk}, c_{ijk}) il coefficiente di $x^i y^j z^k$ $(i + j + k = 3)$.

Consideriamo in S_3' l'elemento cuspidale corrispondente all'asse z

$$x' = a_{003}z^3 + [4], \qquad y' = b_{003}z^3 + [4], \qquad z' = cz^2 + c_{003}z^3 + [4].$$

La proiezione di tale elemento da un punto qualunque dell'asse x' sul piano $x' = 0$, dà luogo in tale piano all'elemento cuspidale

$$x' = 0, \qquad y' = b_{003}z^3 + [4], \qquad z' = cz^2 + c_{003}z^3 + [4].$$

Un punto generico di questo, proiettato sull'asse z' da un punto qualunque dell'asse y' dà luogo su codesto asse al punto di coordinata

$$(5.2)\qquad z' = cz^2 + c_{003}z^3 + [4].$$

Le sopraindicate operazioni conducono, mediante la (5.2), ad una corrispondenza fra l'asse z e l'asse z', la quale si può approssimare fino all'intorno del 3° ordine di (O, O') con le ∞^1 trasformazioni razionali $\Lambda[2,1]$ rappresentate dall'equazione (parametro λ)

$$(5.2')\qquad z' = \frac{cz^2}{1 - \dfrac{c_{003}}{c}z + \lambda z^2}.$$

In una qualunque di queste trasformazioni razionali i due punti dell'asse z corrispondenti ad un generico punto A' dell'asse z' sono coincidenti (in un punto A) quando (e solo quando) la coordinata z' di A' è radice dell'equazione

$$\left[\left(\frac{c_{003}}{c}\right)^2 - 4\lambda\right] z'^2 + 4cz' = 0,$$

sicchè, prescindendo dal punto O' (al quale corrisponde doppiamente il punto O), si ottiene sopra l'asse z' il punto A' di coordinata

$$\frac{4c^3}{4\lambda c^2 - c_{003}^2};$$

tale punto varia al variare della trasformazione Λ considerata; tuttavia il suo corrispondente A sull'asse z non dipende affatto da Λ, poichè risulta che esso ha per coordinata

$$\frac{2c}{c_{003}};$$

assumendo il punto A come punto improprio dell'asse z, si ha

$$c_{003} = 0 .$$

Analogamente, partendo dall'elemento cuspidale corrispondente all'asse x (o all'asse y) e proiettandolo successivamente da un punto qualunque dell'asse y' (o dell'asse x') sul piano $y' = 0$ (o sul piano $x' = 0$) e da un punto qualunque dell'asse z' sull'asse x' (o sull'asse y'), si determinano certe corrispondenze (analoghe alla (5.3)) fra gli assi x, x' (oppure y, y').

Poi, usando lo stesso procedimento col quale si è fissato intrinsecamente il punto improprio dell'asse z, si caratterizzano i punti impropri degli assi x ed y; si ha quindi

$$a_{300} = 0 , \qquad b_{030} = 0 .$$

Per fissare intrinsecamente anche nello spazio S_3' un « piano improprio », occorre passare all'esame dell'intorno del 4° ordine. Scriviamo perciò gli sviluppi in serie di T fino a tale intorno, nella forma

$$(5.3) \qquad \begin{cases} x' = 2ax(x-z) & + \varphi_3(x, y, z) + \varphi_4(a, y, z) + [5] \\ y' = 2ay(y-z) & + \psi_3(x, y, z) + \psi_4(x, y, z) + [5] \\ z' = cz^2 + 2axy - 2mxz - 2lyz & + \omega_3(x, y, z) + \omega_4(x, y, z) + [5] , \end{cases}$$

avendo indicato con φ_4 (e analogamente con ψ_4, ω_4) un polinomio omogeneo di terzo grado in x, y, z, del quale denoteremo con a_{pqr} (o rispettivamente b_{pqr}, c_{pqr}) il coefficiente di $x^p y^q z^r$ $(p + q + r = 4)$.

Consideriamo di nuovo l'elemento cuspidale corrispondente all'asse z

$$x' = a_{003}z^3 + a_{004}z^4 + [5] , \quad y' = b_{003}z^3 + b_{004}z^4 + [5] , \quad z' = cz^2 + c_{004}z^4 + [5] .$$

La proiezione di tale elemento da un punto qualunque dell'asse x' sopra il piano $x' = 0$ dà luogo ivi all'elemento cuspidale

$$x' = 0 , \quad y' = b_{003}z^3 + b_{004}z^4 + [5] , \quad z' = cz^2 + c_{004}z^4 + [5] .$$

Un punto generico di questo, proiettato sull'asse z' da un punto qualunque dell'asse y', dà luogo sopra codesto asse al punto di coordinata

$$(5.4) \qquad z' = cz^2 + c_{004}z^4 + [5] .$$

La (5.4) determina fra l'asse z e l'asse z' una corrispondenza.

Fra le trasformazioni (5.2′), che si rappresentano ora con l'equazione

$$z' = \frac{cz^2}{1 + \lambda z^2}, \tag{5.2''}$$

ve n'è una sola che approssima la (5.4) fino all'intorno del 4° ordine di (O, O'); essa ha l'equazione

$$z' = \frac{cz^2}{1 - \dfrac{c_{004}}{c} z^2} \tag{5.5}$$

e fa quindi corrispondere al «punto all'infinito» dell'asse z il punto $\left(0, 0, -\dfrac{c}{c_{004}}\right)$ dell'asse z'; assumendo questo punto come «improprio» sopra l'asse z si ha

$$c_{004} = 0 .$$

Con procedimenti del tutto analoghi si possono caratterizzare i punti «impropri» degli assi x' ed y'; si ha quindi

$$a_{400} = 0 , \qquad b_{040} = 0 .$$

6. – Riferimenti proiettivi intrinseci.

Allo scopo di determinare intrinsecamente il punto unità di S_3, consideriamo la superficie corrispondente al piano $z' = 0$.

Tale superficie è segata dal piano $z = 0$ nella curva

$$z = 0 , \qquad 2axy + c_{300}x^3 + c_{210}x^2y + c_{120}xy^2 + c_{030}y^3 + [4] = 0 ,$$

la quale ha in O punto doppio con tangenti le rette $x = 0$, $y = 0$; gli E_2 dei rami passanti per O hanno le equazioni

$$y = -\frac{c_{300}}{2a} x^2 + [3] , \qquad x = -\frac{c_{030}}{2a} y^2 + [3] .$$

Esistono ∞^2 cubiche contenenti i suddetti E_2; esse sono rappresentate (parametri λ_1, λ_2) dall'equazione

$$-2axy(1 + \lambda_1 x + \lambda_2 y) = c_{300}x^3 + c_{030}y^3 . \tag{6.1}$$

Fra le cubiche (6.1), quella che ha per retta dei flessi la retta impropria, cioè la cubica

$$-2axy = c_{300}x^3 + c_{030}y^3 ,$$

sega la retta $x = y$, oltre che in O, nel punto di coordinate

$$x = \frac{-2a}{c_{300} + c_{030}} = y .$$

Assumendo tale punto come punto $(-1, -1)$ del piano xy, si ha

$$c_{300} + c_{030} = 2a\,.$$

Consideriamo infine le corrispondenze (analoghe alla (5.5))

$$x' = 2ax^2\,, \qquad y' = 2ay^2$$

intercedenti rispettivamente fra le coppie di assi x, x' e y, y'.

Ai punti $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ degli assi x, y corrispondono in esse rispettivamente i punti $A'(2a, 0, 0)$, $B'(0, 2a, 0)$ degli assi x', y'. Assumendo come punto $(1, 0, 0)$ di S'_3 il punto A', si ha

$$2a = 1\,.$$

Rimane così intrinsecamente determinato in ciascuno dei due spazi S_3, S'_3 il riferimento proiettivo intrinseco. Le equazioni di T sono:

$$\begin{aligned}
x' &= x(x-z) && + \sum a_{ijk}x^iy^jz^k + \sum a_{pqr}x^py^qz^r + [5]\\
y' &= y(y-z) && + \sum b_{ijk}x^iy^jz^k + \sum b_{pqr}x^py^qz^r + [5]\\
z' &= xy - 2(mx+ly)z + cz^2 && + \sum c_{ijk}c^iy^jz^k + \sum c_{pqr}x^py^qz^r + [5]
\end{aligned}$$

$$(i, j, k = 0, 1, 2, 3;\ p, q, r = 0, 1, 2, 3, 4;\ i+j+k=3;\ p+q+r=4)\,;$$

$$\begin{aligned}
2(4l+1)m^2 - (4c+1)m + c &= 0\\
2(4m+1)l^2 - (4c+1)l + c &= 0
\end{aligned}$$

$$a_{300} = b_{030} = c_{003} = a_{400} = b_{040} = c_{004} = 0\,, \qquad c_{300} + c_{030} = 1\,.$$