LAMBERTO CESARI (*)

Problemi di Calcolo delle Variazioni e questioni connesse (**).

Negli ultimi 35 anni si è sviluppata in Italia e all'Estero, sotto l'impulso di LEONIDA TONELLI, una corrente di ricerche sul Calcolo delle Variazioni che ha preso il nome di Scuola Italiana di Calcolo delle Variazioni. Essa è caratterizzata dal concetto di semicontinuità, trasportato dal campo delle funzioni di variabili reali al campo funzionale, e dall'uso dei concetti dell'Analisi funzionale di VITO VOLTERRA.

Io intendo qui parlare anzitutto dei risultati più recenti inquadrandoli nei vari problemi fondamentali, per poi accennare a vari indirizzi nuovi, estranei alla Scuola, ma che hanno con la Scuola vari punti di contatto. E tutto ciò mi sembra tanto più opportuno desiderando compiere atto di omaggio verso LEONIDA TONELLI che, proprio qui a Pisa, ha portato la Sua Scuola a tanto grande sviluppo.

La teoria del Calcolo delle Variazioni per gli integrali dipendenti da curve in forma parametrica trovò già la sua forma definitiva nel trattato del TONELLI « Fondamenti di Calcolo delle Variazioni »; la teoria per gli integrali dipendenti da curve in forma ordinaria ebbe una nuova sistemazione nelle Memorie del Maestro del 1934-36 e in un riassunto di esse che si trova nel libro di VOLTERRA e PÉRÈS su la teoria generale dei funzionali. Non intendo qui di parlare di esse, avendone già parlato LEONIDA TONELLI in un precedente Congresso. Ricorderò invece una recente e difficile estensione di CINQUINI della teoria degli integrali dipendenti da una curva in forma parametrica. CINQUINI ha considerato integrali che dipendono dagli elementi differenziali di ordine superiore al primo delle curve in questione e ha ottenuto teoremi di semicontinuità e di esistenza, ritrovando tra l'altro precedenti risultati di BOGOGLIUBOFF, ha stabilito le proprietà differenziali e analitiche delle estremanti e ha dimo-

---

(*) Professore o. della Università di Bologna. Indirizzo: Via Castiglione, 1 - Bologna (Italia).

(**) Conferenza tenuta al 3° Congresso della « Unione Matematica Italiana » a Pisa (23-26 Settembre 1948).

strato che queste debbono soddisfare la classica equazione di EULERO. Estensione questa del CINQUINI difficile perchè vari procedimenti, usuali per gli integrali dipendenti dalle derivate del primo ordine soltanto, non si estendono al caso generale.

Il problema della curva di massima velocità finale e altri problemi classici trattati da MANIÀ col metodo diretto, condussero questi ad impostare e a sistemare anche il generale problema di LAGRANGIA o di MAYER libero, nel quale quelli rientravano come casi particolari. I risultati di MANIÀ furono migliorati da TONELLI che ne indicò anche varie ulteriori estensioni. Di queste estensioni si è occupato ora MAGENES che ha dato le dimostrazioni che mancavano, vari complementi e osservazioni. Il problema di LAGRANGIA è stato studiato recentemente anche da BLISS, GRAVES e MCSHANE con metodi diversi. GIULIANO ha introdotto, in tale questione, la nozione di variazione prima smorzata, generalizzando il risultato, noto per il problema ordinario, che l'annullarsi della variazione prima smorzata è condizione necessaria e sufficiente perchè la curva sia un estremaloide.

Nello stesso ordine di idee, un problema più difficile è quello di MAYER isoperimetrico, già trattato precedentemente da GRAVES, e completamente inquadrato nel metodo diretto da BAIADA in questi ultimi anni. BAIADA ha esteso a tale problema criteri del caso isoperimetrico ordinario e anche criteri completamente nuovi che non hanno riscontro in tale teoria e ha stabilito le equazioni differenziali delle estremanti. MCSHANE, HESTENES, REID si sono occupati recentemente, con metodi diversi, del più generale problema di BOLZA. LEWIS e WAGNER hanno studiato il problema di LAGRANGIA per integrali multipli.

Il problema isoperimetrico ordinario era già stato trattato da TONELLI nei «Fondamenti» in due casi e cioè nel caso in cui il funzionale, che deve essere costante, è continuo, oppure nel caso in cui la funzione integranda dell'integrale, che deve essere costante, è legato ad una semplice relazione alla funzione integranda di quello che deve essere minimizzato. Casi più generali sono stati trattati da MCSHANE in Note del 1939-1940. Recentemente BAIADA, prendendo spunto da una osservazione di GRAVES, ha dimostrato che, anche nel campo funzionale e nel quadro del metodo diretto, è possibile estendere il noto procedimento per i massimi e minimi condizionati delle funzioni di un numero finito di variabili reali, ottenendone teoremi assai generali di esistenza del minimo del problema isoperimetrico, e ciò anche in casi non regolari che non rientrano nei risultati di MCSHANE.

Importanti sono i contributi portati negli ultimi anni al caso non regolare per integrali dipendenti da curve in forma parametrica o in forma ordinaria:

problema molto difficile, poichè l'integrale non è più semicontinuo in tutto il campo, ma che tuttavia si inquadra ugualmente nel metodo diretto. Notevoli estensioni di precedenti teoremi di CARATHÉODORY, HAAR e TONELLI sono state ottenute recentemente da McSHANE con una adatta generalizzazione del concetto di piano di appoggio della figurativa e tali teoremi di McSHANE sono stati in parte generalizzati da BAIADA in applicazione del metodo diretto.

Il caso non regolare è stato pure ampiamente trattato da MARSTON MORSE in applicazione della sua teoria topologica. L'importanza del caso non regolare è veramente notevole, anche per le applicazioni, e qui basti ricordare che il principio della minima azione si presenta come un problema non regolare di Calcolo delle Variazioni.

I funzionali di linea che sono continui furono completamente caratterizzati da TONELLI per integrali dipendenti da una curva piana, sia in forma parametrica che non parametrica. Nello spazio, per curve in forma ridotta, TONELLI e McSHANE hanno dato una condizione necessaria per la continuità e tale condizione è stata ora dimostrata sufficiente da GIULIANO per curve completamente interne al campo. Per curve che possono arrivare alla periferia del campo la condizione non è sufficiente, come si può vedere con esempi, e GIULIANO ha stabilito alcune condizioni sufficienti per tale caso.

TONELLI nel 1939 ha inquadrato nel metodo diretto i così detti integrali quadratici, che sono assai importanti, ad esempio nella teoria delle equazioni integrali del tipo di FREDHOLM, ma che sono soltanto un caso particolare di un tipo assai generale di problemi. Alcuni di questi sono stati trattati da TONELLI, che stabilì notevoli teoremi di esistenza del massimo e del minimo entro una data sfera dello spazio funzionale e varie precisazioni sulla ubicazione di tali estremanti nella sfera considerata. FICHERA ha studiato con la metrica hilbertiana e utilizzando precedenti risultati di PICONE, funzionali quadratici con termini lineari, ritrovando i risultati di TONELLI e altresì qualche fenomeno nuovo, peculiare di tale problema, un poco più generale di quello strettamente considerato da TONELLI. Ora, più recentemente, FAEDO ha iniziato la teoria degli integrali più generali proposti da TONELLI e di un altro tipo di integrali proposti da FUBINI. Tali integrali, che comprendono tutti i precedenti come casi particolari, sono stati detti, in onore dei matematici che li hanno proposti, integrali di TONELLI e FUBINI. Per tali integrali FAEDO ha stabilito condizioni, del tipo di quelle di LEGENDRE e di WEIERSTRASS, necessarie per la semicontinuità e MAGENES ha trovato ora condizioni sufficienti.

Una seconda estensione, iniziata da CINQUINI e proseguita da FAEDO, del metodo diretto, è quella relativa agli integrali in forma ordinaria in un intervallo infinito. Tale estensione è particolarmente difficile ma ha potuto essere fatta recentemente in modo completo.

FAEDO ha esteso precedenti teoremi di TONELLI, NAGUMO, McSHANE per integrali tra limiti finiti deducendone notevoli proposizioni sul comportamento asintotico delle soluzioni dei problemi variazionali in campi illimitati. Tali teoremi hanno permesso interessanti applicazioni al problema della stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali.

L'estensione del metodo diretto a integrali su campi illimitati era poi particolarmente connessa alla sistemazione del metodo variazionale proposto da Picone per l'effettiva e numerica risoluzione di equazioni alle derivate parziali. La sistemazione in questione, iniziata da Manià, è stata proseguita da Faedo, che ha dimostrato la compatibilità e la convergenza in media del metodo, portando anche al metodo stesso notevoli completamenti.

Douglas e Patterson si sono occupati del problema inverso del Calcolo delle Variazioni, cioè di stabilire sotto quali condizioni una data equazione differenziale è l'equazione di Eulero di un problema di Calcolo delle Variazioni.

Un problema di balistica ha condotto Tricomi allo studio di un particolare integrale del quale ha determinato le estremali col metodo classico. Del tutto recentemente il problema, del tipo di Newton, di determinare la superficie di rivoluzione che incontra la minima resistenza in certi casi di moto a velocità ultrasonore, ha condotto Federighi allo studio di un problema variazionale che egli ha inquadrato nel metodo diretto. Ma il problema variazionale più cospicuo sorto da questioni della tecnica è un problema risolto recentemente dal Tonelli. Si tratta di un nuovo tipo di problemi variazionali, in cui la funzione incognita da determinare deve soddisfare ad una opportuna disuguaglianza che involge in ogni punto i valori della funzione e della sua derivata prima.

Relativamente recente è la sistemazione nel metodo diretto del Calcolo delle Variazioni per gli integrali doppi dipendenti da una superficie in forma ordinaria; tale sistemazione è basata sui concetti e i risultati della soluzione, data dal Tonelli, al problema dell'area di una superficie in forma ordinaria. Alla teoria hanno notevolmente contribuito Manià, mettendo in luce un fenomeno analogo a quello noto di Lavrentieff per le curve; McShane, Cinquini, Scorza, Caccioppoli, ottenendo la necessità della condizione di Weierstrass per una data superficie, Giuliano, Amerio, Graves, Bliss, e del tutto recentemente Stampacchia, con nuove condizioni per la semicontinuità e per l'estremo; Reid stabilendo la condizione di Jacobi per integrali doppi e multipli. Una recentissima e ampia estensione di tutta la teoria per gli integrali doppi, è dovuta a Cinquini che si è occupato di quegli integrali che dipendono dalle derivate parziali di ordine superiore al primo della funzione incognita.

La importante questione, di assicurare la differenziabilità e l'analiticità delle superficie che realizzano l'estremo degli integrali e di dimostrare che esse effettivamente soddisfano alle classiche equazioni differenziali, è stato studiato da MORREY e, del tutto recentemente, da SHIFFMAN.

Desidero qui ricordare anche alcuni recenti risultati della CIBRARIO-CINQUINI che assicurano l'esistenza del minimo di integrali doppi, non attraverso il metodo diretto basato sul concetto di semicontinuità, ma su ragionamenti di FUBINI e LEVI sulla convergenza in media e su recenti risultati, della stessa Autrice e di altri, sulla teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali. Tra l'altro è ora acquisito che, considerato un problema di minimo di un integrale doppio regolare e la corrispondente equazione di LAGRANGIA, ogni soluzione del problema al contorno per l'equazione di LAGRANGIA realizza, sotto opportune ipotesi, il minimo per l'integrale in questione.

Nello stesso ordine di idee è un recente lavoro di KAMKE e LORENTZ, relativo al classico problema di DIRICHLET in un campo qualsiasi ad n dimensioni.

* * *

L'estensione dei metodi diretti ad integrali dipendenti da superficie in forma parametrica fu già iniziata con successo da MCSHANE nel 1929-35, stabilendo condizioni per la semicontinuità e per l'esistenza, e ottenendo tra l'altro una teoria assai soddisfacente per integrali in cui la funzione integranda non dipende dal punto (x, y, z) ma soltanto dagli Jacobiani. Altri contributi in proposito sono stati portati da CIMMINO e da CACCIOPPOLI. A proposito della teoria di MCSHANE ricorderò che essa era già sufficiente per inquadrare fin da allora il problema di PLATEAU di cui la prima generale soluzione era stata data da RADÓ. Il problema di PLATEAU ha trovato semplici sistemazioni in successivi lavori di COURANT e TONELLI ed eleganti estensioni per superficie di tipo topologico superiore nelle ricerche di DOUGLAS. Ulteriori e notevoli risultati sul problema della minima area sono dovuti a DAVIDS, HAAR, PAUL LEVY, LONSETH, MARSTON MORSE, SHIFFMAN.

È stato notato da vari autori che una più completa estensione dei metodi diretti al caso delle superficie in forma parametrica, non poteva ottenersi senza una adeguata soluzione del problema dell'area per lo stesso tipo generale di superficie. Del problema dell'area delle superficie in forma parametrica si occuparono nel 1924 BANACH e VITALI, contemporaneamente e indipendentemente, e da essi fu rilevato che le proprietà fondamentali per l'area di una superficie in forma parametrica

$$S: \quad x = x(u, v)\,, \quad y = y(u, v)\,, \quad z = z(u, v)\,, \quad (u, v) \in A\,,$$

debbono riflettersi non in una proprietà delle singole funzioni x, y, z che la rappresentano ma in proprietà delle tre proiezioni della superficie stessa sopra i tre piani coordinati, cioè in proprietà delle tre coppie di funzioni (y, z), (z, x), (x, y). Tali coppie individuano delle trasformazioni continue del piano di riferimento nei tre piani coordinati. La teoria di Banach era completa ma non si riferiva alla definizione di area di Lebesgue, la quale aveva già servito a Tonelli nel 1915 per dimostrare la proprietà di minimo della sfera e che doveva poi servire tanto bene nel 1926 per le superficie in forma ordinaria. Della teoria di Banach si occuparono successivamente Gröss, Schauder e Radó, ma qui voglio ricordare le ricerche della Pia Nalli, di Andreoli e di Caccioppoli nelle quali è usato quel concetto di indice topologico, o di Kronecker, che doveva dimostrarsi in seguito tanto fecondo e che Marston Morse ha applicato nella sua teoria delle funzioni analitiche. E tale indice topologico doveva servire altresì a Radó nel 1936 per dimostrare che un noto teorema su gli zeri delle funzioni analitiche si estende a tutte le trasformazioni piane continue ed è perciò dovuto non alla analiticità di esse ma solo alla continuità.

Ricordo qui che il concetto di «superficie in forma parametrica» non è definito soltanto dalla terna delle funzioni che la «rappresentano» ma dalla fondamentale nozione di distanza secondo Fréchet. Si parla perciò delle superficie di Fréchet, costituenti uno spazio metrico. Se con ciò era definita la nozione di superficie, essa non era però ancora caratterizzata topologicamente, ciò che è riuscito soltanto recentemente a conclusione di una lunga serie di ricerche della topologia degli insiemi piani, a cui sono legati i nomi di Kerékjártó, Moore, Whiburn, Neumann, Morrey, J. W. T. Youngs.

Moltissime sono le definizioni di area di una superficie proposte nell'ultimo secolo, ma se noi vogliamo che l'area di una superficie possa essere considerata come un funzionale sopra una superficie, adempiendo nel Calcolo delle Variazioni per le superficie ad un ufficio analogo a quello della lunghezza nei funzionali di linea (ufficio che Menger chiama di funzionale di confronto) noi dobbiamo esigere che la definizione di area soddisfi al fondamentale principio di semicontinuità. Ora è veramente notevole rilevare che tutte le definizioni di area finora proposte, soddisfacenti al principio di continuità e sufficientemente studiate, si sa oggi essere identiche all'area di Lebesgue. Questo vale anzitutto per la così detta area di Geöcze, introdotta mediante la nozione di indice topologico, quale è stata utilizzata da McShane, da Morrey e da Cesari, la cui coincidenza con l'area di Lebesgue è stata dimostrata da Cesari. Così Radó, nella sua teoria, ha fatto largo uso di una opportuna nozione di area che diremo area di Radó, o area inferiore, ed egli ne dimostra la coincidenza con l'area di Lebesgue in casi molto estesi direttamente e, nel caso generale, utilizzando risultati di Cesari.

Altrettanto vale per certe nozioni di area, che diremo di Cauchy e di

FAVARD, ottenute da RADÓ, HELSEL e MICKLE modificando precedenti definizioni degli stessi autori, così da introdurre la semicontinuità inferiore.

Tutto ciò è in armonia col concetto, espresso da CACCIOPPOLI e da RADÓ nel 1928, secondo il quale ogni funzionale semicontinuo inferiormente e uguale all'area elementare per le superficie poliedriche, deve coincidere con l'area di LEBESGUE per tutte le superficie continue, almeno sotto debolissime condizioni. A questo indirizzo, di ottenere cioè una definizione assiomatica del concetto di area, hanno contribuito FRÉCHET, KEMPISTY e, negli ultimi anni, SCORZA, ZWIRNER, STAMPACCHIA.

Molti progressi sono stati fatti nel problema chiamato da RADÓ problema di GEÖCZE. Sappiamo che nella definizione di area secondo LEBESGUE si prendono in considerazione tutte le superficie poliedriche, inscritte e non inscritte nella superficie, e l'area secondo LEBESGUE è appunto il minimo limite delle aree elementari di tutte queste superficie poliedriche al loro tendere, nel senso di FRÉCHET, verso la superficie data. Domandiamoci ora se, nella precedente definizione, è possibile limitarsi a considerare le sole superficie poliedriche inscritte senza che ne risulti una modificazione del valore dell'area (problema debole di GEÖCZE). Già HUSKEY e RADÓ dimostrarono che, per una classe particolare di superficie in forma ordinaria, è possibile limitarsi, nella definizione di area secondo LEBESGUE, alle sole superficie poliedriche inscritte. Recentemente MAMBRIANI ha dimostrato che questo vale, non solo per tutte le superficie in forma ordinaria, ma anche per le superficie in forma parametrica di una certa classe. Di questo importante teorema di MAMBRIANI, RADÓ ha dato ora una nuova dimostrazione e, sulla base del teorema di MAMBRIANI, si può oggi rispondere affermativamente alla questione accennata nel caso più generale, cioè, come ha dimostrato CESARI, l'area secondo LEBESGUE di una superficie può sempre ottenersi come minimo limite delle aree delle superficie poliedriche inscritte nella superficie data.

In modi diversi, negli ultimi anni, RADÓ e CESARI hanno introdotto la nozione di trasformazione piana a variazione limitata, e RADÓ ha ora dimostrato che varie definizioni proposte sono equivalenti. Mediante tale nozione e facendo uso dei metodi della topologia combinatoria, CESARI ha stabilito la condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie in forma parametrica e del tutto arbitraria abbia area finita secondo LEBESGUE.

L'area di LEBESGUE risulta maggiore o uguale all'integrale classico per l'area, l'integrale essendo calcolato con una opportuna nozione di Jacobiano, più generale dell'usuale.

RADÓ e CESARI hanno introdotto, in modi diversi, la nozione di trasformazione piana assolutamente continua, e anche tali differenti definizioni, apparentemente molto diverse, sono equivalenti, come RADÓ ha dimostrato direttamente. Mediante tale nozione RADÓ e CESARI, indipendentemente, durante gli anni di guerra, hanno espressa la condizione necessaria e sufficiente perchè l'area sia data dall'integrale classico generalizzato.

Con le ricerche di RADÓ e di CESARI e con quelle di GIULIANO, CECCONI, DOLCHER e REICHELDERFER è oggi dimostrato, sia dal punto di vista analitico e della teoria delle funzioni di variabile reale, sia dal punto di vista topologico, che i recenti concetti di trasformazione piana a variazione limitata e assolutamente continua generalizzano le corrispondenti nozioni di JORDAN e di VITALI per le funzioni di una variabile reale.

CECCONI ha esteso recentemente la scomposizione canonica di LEBESGUE delle funzioni continue e a variazione limitata alle trasformazioni piane. DOLCHER si è occupato più da vicino dei problemi topologici connessi alla questione dei punti di diramazione delle trasformazioni piane soltanto continue. REICHELDERFER e CESARI, indipendentemente, hanno dato formule del tutto generali per la trasformazione degli integrali doppi.

Era però ancora aperto un problema, quello della rappresentazione delle superficie. Sappiamo che ogni curva di lunghezza finita ammette particolari rappresentazioni, ad esempio quella che si ottiene prendendo come parametro la lunghezza dell'arco, per le quali la lunghezza è data dal classico integrale. Ora per le superficie si presenta il problema analogo, cioè di sapere se ogni superficie di area finita ammette almeno una rappresentazione per la quale l'area è data dall'integrale classico. Per classi particolari di superficie, le superficie «a sella» di MCSHANE e più in generale le superficie «aperte non degeneri» di MORREY era già stata data risposta affermativa. Precisamente questi autori avevano dimostrato che ogni superficie a sella e ogni superficie aperta non degenere ammettono una rappresentazione sul cerchio fondamentale che è «quasi conforme». Con ciò si intende che le relazioni differenziali e classiche assicuranti la conservazione degli angoli sono soddisfatte in tutto il cerchio fondamentale, fatta eccezione dei punti di un insieme, anche infinito, di misura nulla.

Questo teorema è, in sostanza, una notevole generalizzazione del ben noto teorema di SCHWARZ sulla rappresentazione conforme di ogni superficie poliedrica dello stesso tipo topologico e, per tali superficie, i punti che fanno eccezione sono al più in numero finito, i vertici della superficie. Le rappresentazioni quasi conformi di MCSHANE e MORREY soddisfano ad un principio di minimo; esse rendono infatti minimo l'integrale della somma dei quadrati delle derivate prime delle funzioni che servono per la rappresentazione. In base a tale osservazione, e facendo uso dei metodi diretti del Calcolo delle Variazioni, CESARI ha ritrovato sia un teorema del tipo di SCHWARZ, sia il teorema di MORREY. Per le superficie qualunque entra in gioco la caratterizzazione topologica fatta da MORREY secondo la quale ogni superficie continua del tipo più generale è costituita di un numero finito o al più da una infinità numerabile di parti che sono tutte non degeneri, chiuse o aperte, congiunte da parti ad area nulla.

Tenendo conto di tale osservazione, CESARI ha anche dimostrato più in generale che ogni superficie di area finita rappresentata sopra un cerchio ammette una rappresentazione per la quale l'area è data dall'integrale classico e per la quale le varie parti non degeneri sono effettivamente rappresentate in modo quasi conforme.

Sulla base della precedente soluzione del problema dell'area e della rappresentazione delle superficie in forma parametrica, CESARI ha introdotto la nozione di integrale sopra una superficie (di area finita) come un integrale di WEIERSTRASS per una qualunque rappresentazione della superficie stessa, e ha dimostrato che tale integrale coincide con l'ordinario di LEBESGUE quando la rappresentazione sia tale che l'area è uguale all'integrale classico. In tale modo per le superficie di area finita ci si può servire indifferentemente dell'integrale di LEBESGUE o di quello di WEIERSTRASS, come appunto accade per gli integrali curvilinei. Anche nella più ampia classe delle superficie di area finita in forma parametrica, valgono tutti i teoremi di semicontinuità già stabiliti da MCSHANE e da RADÓ. Questi teoremi possono essere ulteriormente generalizzati. CESARI ha inoltre stabilito teoremi per l'esistenza del minimo per integrali doppi in forma parametrica, più generali di quelli di MCSHANE, in cui la funzione integranda dipende dagli Jacobiani e anche dal punto (x, y, z). In tal modo il problema di PLATEAU risulta inquadrato in questa classe ancora più generale di problemi variazionali, ma non c'è dubbio che tutta la teoria per il minimo in forma parametrica è in gran parte da farsi, fino a considerare i problemi non regolari e i problemi isoperimetrici per superficie in forma parametrica.

* * *

E ora uno sguardo alle più moderne estensioni del Calcolo delle Variazioni e del Calcolo funzionale, tra le quali un posto a sè hanno le ricerche del GRAFFI di Analisi funzionale ereditaria, che trovano tante applicazioni alla Meccanica e alla Fisica matematica.

Prima di tutto deve essere ricordata l'estensione dovuta a L. C. YOUNG nel 1940, risultante dall'introduzione di un concetto di curva notevolmente più generale dell'usuale. Per comprenderne il principio ispiratore, ricordiamo che nella Fisica moderna e talvolta in Analisi si è trovato opportuno considerare un punto come un caso del tutto particolare di una distribuzione di massa unitaria sopra un insieme, cioè di una opportuna funzione di distribuzione.

Pensiamo ora ad una curva in forma ordinaria rappresentata da una funzione assolutamente continua. Tale funzione è l'integrale di LEBESGUE della sua derivata. Se ora per ogni punto della curva pensiamo il valore della derivata come la media di una opportuna funzione di distribuzione in uno spazio ausiliario, abbiamo il concetto di curva generalizzata di Young. Quando la funzione di distribuzione sia costante le curve generalizzate si riducono alle curve ordinarie.

Introducendo convenientemente la nozione di integrale curvilineo, usando la nozione di integrale di Denjoy e la nozione di operatore lineare secondo Banach, si riesce a stabilire una teoria di Calcolo delle Variazioni che estende quella classica. Così alla condizione di Weierstrass, nell'enunciato datogli da Minkowski, si sostituisce una condizione più debole. Si riesce tra l'altro ad assicurare, in qualche caso, l'esistenza di curve generalizzate minimanti anche in casi in cui non esistono curve minimanti ordinarie. Sono stati ottenuti da Young interessanti risultati nel caso non regolare e recentemente McShane, pur rimanendo nello spirito del metodo diretto, ha applicato questi nuovi concetti al problema di Bolza, dimostrando in qualche caso che la curva minimante, che in un primo momento risulta essere soltanto una curva generalizzata, è poi effettivamente una curva ordinaria, ottenendo per tale nuova via teoremi esistenziali.

Un posto a sè occupa l'indirizzo di Marston Morse di cui parlerò brevemente avendone trattato più autorevolmente il Prof. Morse stesso. Il punto di partenza della teoria è da ricercarsi in uno studio sui massimi, i minimi e i punti stazionari delle funzioni di più variabili, in estensione di una precedente osservazione di Birkhoff sulle funzioni di due variabili, a proposito di questioni di equilibrio della dinamica. Il numero dei massimi, il numero dei minimi e quello dei punti stazionari, di una funzione di più variabili, sono legati da notevoli disuguaglianze ai numeri che dànno la dimensione e la connessione del campo, in breve, ai numeri di Betti del campo stesso. Morse ha osservato che tale fatto si estende al campo funzionale, almeno per curve completamente interne al campo. La teoria di Marston Morse non è del tutto un metodo diretto in quantochè fa uso sistematico della teoria delle equazioni differenziali e perciò dell'esistenza di estremali in piccolo del problema in oggetto. Il problema in grande è stato trattato considerando la totalità delle curve che soddisfano alle condizioni richieste e che sono formate da un numero finito abbastanza grande di archi di curve estremali. La teoria collega in una veduta unitaria questioni di geometria differenziale in grande (esistenza di geodetiche sopra una varietà algebrica), questioni di analisi in grande, questioni di dinamica e di equilibrio di sistemi meccanici. In recenti estensioni la teoria ha attaccato problemi di estremo negli spazi astratti, come nell'indirizzo di Menger che ora espongo.

Menger osserva anzitutto che alcuni speciali problemi di Calcolo delle Variazioni ammettono come estremali curve di lunghezza infinita e che perciò si rende necessario, per inquadrare anche questi casi, una estensione del Calcolo delle Variazioni così da comprendervi anche curve di lunghezza infinita e non soltanto le curve rettificabili. Per tale estensione si rende indispensabile l'integrale di WEIERSTRASS già usato da TONELLI nel 1912 e poi abbandonato perchè nell'ambito delle curve di lunghezza finita l'integrale di WEIERSTRASS si può sempre calcolare più semplicemente come integrale di LEBESGUE per una opportuna rappresentazione della curva stessa, in modo del tutto analogo a quanto accade per le superficie. Esempi di estremali di lunghezza infinita sono stati trovati da CARATHÉODORY e da HAHN. Un tipo notevole di rappresentazione per curve di lunghezza finita o infinita è stato ottenuto da MARSTON MORSE. Tuttavia è da rilevare che mentre nessun problema delle applicazioni conduce per ora direttamente a curve in forma parametrica di lunghezza infinita, d'altra parte non dimentichiamo quale grande difficoltà fu già 35 anni or sono l'uso sistematico nel Calcolo delle Variazioni delle curve rettificabili e dell'integrale di LEBESGUE.

Una osservazione dovuta a BOULIGAND mostra che ogni integrale curvilineo si può considerare come una lunghezza generalizzata, introducendo nello spazio ordinario una opportuna metrica, ciò che permette altresì una trasparente interpretazione geometrica della nozione di regolarità. Tutto ciò ha aperto la via al Calcolo delle Variazioni per funzionali di linea in uno spazio astratto, e di ciò si sono occupati BOULIGAND, D'ARONSZAIN, GOLDSTINE, MENGER, PAUC.

In tale ordine di idee l'uso, assai frequente nel metodo diretto per curve in forma parametrica, del teorema di HILBERT, trova una naturale estensione: al teorema di HILBERT, che assicura la compattezza dell'insieme di tutte le curve continue di lunghezze inferiori ad un numero fisso ed in un campo finito, si sostituisce una proposizione analoga che assicura la compattezza dell'insieme di tutte le curve continue di un campo finito per le quali un qualche opportuno funzionale, che si dice funzionale di confronto, risulta sempre inferiore ad un numero fisso.

Le condizioni imposte a tali funzionali di confronto rendono naturalmente la proposizione più larga del teorema di HILBERT nel quale il funzionale di confronto era la lunghezza. In tale estensione rientrano anche altri procedimenti usati nell'attuale metodo diretto per assicurare la compattezza di un insieme di curve. Il procedimento fondamentale del metodo diretto basato su tale estensione del teorema di HILBERT ha condotto MENGER ad enunciare un principio assai generale al quale egli ha dato il nome di principio di TONELLI.

Rilevo tuttavia che il teorema di HILBERT e gli altri procedimenti che si lasciano inquadrare nel principio, non sono che uno dei tanti mezzi o artifici usati nel metodo diretto di LEONIDA TONELLI per giungere ai teoremi di esistenza, nella estesa imponente varietà di problemi variazionali che sono stati trattati in questi ultimi anni. Ricordiamo qui che, costruita per un dato problema una successione minimizzante, qualche volta si riesce a dimostrare che essa presenta una curva o superficie di accumulazione, altre volte, occorre modificare tale successione così da assicurare per la successione modificata l'ente di accumulazione. Ciò appare chiaramente ad esempio nei problemi per il minimo di integrali dipendenti da una superficie ordinaria e ancora più per quelli dipendenti da una superficie in forma parametrica.

In questa varietà di procedimenti e di artifici del metodo diretto, sempre diversi in ogni tipo di problema che recentemente è stato preso in considerazione, vengono superate ogni volta grandi difficoltà. Nei problemi che sono tuttora aperti, ad esempio quello di BOLZA o quello dei funzionali di TONELLI e FUBINI o in tanti problemi per gli integrali doppi in forma parametrica, il metodo diretto, nei modi e nell'indirizzo ormai classici fondato sul concetto di semicontinuità, sarà ancora applicato con successo e ogni ulteriore estensione agli spazi astratti prenderà spunto e norma dalle attuali e future sistemazioni di tali problemi, nell'ordine delle idee di LEONIDA TONELLI.

I progressi compiuti dal Calcolo delle Variazioni negli ultimi 50 anni e nei quali la Scuola Italiana ha tanta parte, sono stati tali da indurci a pensare che molto cammino sia stato fatto dalla Matematica, e perciò dalla Filosofia Naturale, verso quella visione unitaria del sapere scientifico a cui tende ciascuno di noi. Non c'è dubbio che i metodi forniti dalla teoria degli spazi astratti e dalla topologia condurranno ancora più avanti in tale via. In essa ci illuminano le idee che BETTI, DINI, ARZELÀ e TONELLI ci hanno trasmesso.