

**Sul modo d'approssimare una curva rettificabile,
descritta su una superficie quadrabile,
mediante altre curve rettificabili. (**)**

1. - In una recente pubblicazione dal titolo *Un problema metrico relativo alle superficie quadrabili* (1), abbiamo costruito un esempio di dominio tridimensionale E , semplicemente connesso e limitato da una superficie quadrabile $S = FE$, e abbiamo dimostrato la possibilità di scegliere due punti A, B estranei ad E , in modo da soddisfare alla seguente condizione:

se si congiungono A, B mediante una generica curva semplice e rettificabile γ di PEANO-JORDAN totalmente estranea ad E , e si deforma poi γ con continuità, in modo da farne tendere la lunghezza $L(\gamma)$ al proprio estremo inferiore Λ , la curva γ tende ad una ben determinata curva limite Γ , tale che $L(\Gamma) < \Lambda$.

Tale esempio appariva inquadrato, in detta pubblicazione, in un interessante problema di carattere generale, relativo alla teoria degli insiemi, proposto dal prof. M. PICONE, anni or sono, nel suo corso d'Analisi Superiore. Ma esso può esser considerato da altro punto di vista, come ora ci proponiamo di mostrare.

Nell'es. citato, la curva limite Γ s'identificava col segmento AB . Ma abbiamo osservato (n. 11) che l'esempio potrebbe facilmente modificarsi, in modo che Γ risultasse (a prescindere ovviamente da due tratti rettilinei terminali) una linea semplice e regolare, comunque prefissata nello spazio. In altre parole: prefissata $\Gamma = \overline{AB}$ a piacere, è sempre possibile far passare per Γ una superficie quadrabile S (2), in modo da soddisfare alla condizione

(*) Prof. Dott.. Indirizzo: Piazza Vespi Siciliani, 17 - Roma (Italia).

(**) Lavoro ricevuto il 18-X-1949.

(1) In corso di stampa nel « Bollettino dell'Unione Mat. Ital. ».

(2) E , per di più, una superficie dotata, in ogni punto estraneo a Γ , di piano tangente variabile con continuità, e magari anche di elementi differenziali d'ordine prefissato elevato a piacere. Si può naturalmente intendere (per quanto questa condizione non

sopra enunciata. Da questo punto di vista, non ha veramente importanza il fatto che gli estremi A, B di Γ siano estranei ad S (infatti, a priori, si possono ridurre i due tratti rettilinei terminali di Γ , ad essere piccoli ad arbitrio). Ed allora ci possiamo proporre la seguente questione. Supponiamo prefissate una superficie S e, su di essa, una certa curva $\Gamma = \overline{AB}$ ⁽³⁾. Consideriamo una successione di curve γ_n ($n = 1, 2, \dots$) aventi tutte per estremi A, B , che tenda a Γ ⁽⁴⁾ e che sia minimizzante per la lunghezza $L(\gamma)$ (sia cioè tale che $L(\gamma_n)$ tenda al limite minimo di $L(\gamma)$, per $\gamma \rightarrow \Gamma$, cfr. la nota ⁽¹⁴⁾ della preced. pubblicazione), compatibilmente con l'una, oppure con l'altra delle due condizioni:

- a) le curve γ_n sono tutte interamente estranee alla superficie S ⁽⁵⁾;
 a') le curve γ_n sono tutte interamente tracciate sulla superficie S .

Poniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) = \begin{cases} \Lambda & \text{nel caso } a, \\ \Lambda' & \text{» » } a'. \end{cases}$$

Come noto, è $\Lambda \geq L(\Gamma)$, $\Lambda' \geq L(\Gamma)$. Ma esistono esempi, per ciascuna delle quattro combinazioni a cui danno luogo queste limitazioni? È cioè possibile costruire una superficie S e tracciare su di essa una curva Γ , in modo che sia:

- I) $\Lambda = L(\Gamma)$, $\Lambda' = L(\Gamma)$, oppure
 II) $\Lambda > L(\Gamma)$, $\Lambda' > L(\Gamma)$, oppure
 III) $\Lambda > L(\Gamma)$, $\Lambda' = L(\Gamma)$, oppure
 IV) $\Lambda = L(\Gamma)$, $\Lambda' > L(\Gamma)$?

Il I caso è quello a cui dà luogo una qualunque superficie regolare, il II è quello della nostra precedente costruzione. In questo articolo daremo anche degli esempi per il III e per il IV caso ⁽⁶⁾.

sia ormai più essenziale), che S sia la frontiera d'un certo dominio semplicemente connesso.

⁽³⁾ La quale dunque non dovrà ormai più esser dotata di due tratti rettilinei terminali.

⁽⁴⁾ Sia cioè tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, indicando con δ_n (per il generico valore dell'indice n) la massima delle distanze dei singoli punti di γ_n da Γ .

⁽⁵⁾ Fatta eccezione dei soli due estremi A, B .

⁽⁶⁾ Le dimostrazioni, se pur delicate nei dettagli, sono concettualmente elementari e possono facilmente ottenersi imitando quelle della pubblicazione precedente. Per quanto riguarda il III caso, non si potrà però soddisfare alla richiesta di regolarità, per la S , di cui alla nota ⁽²⁾. Cfr. la nota ⁽²³⁾.

2. - Per costruire un esempio, in cui si verifichi il III caso, si potrebbe procedere con un metodo di condensazione di singolarità o d'iterazione della costruzione della pubblicazione precedente ma, ciò facendo, s'andrebbe incontro a fastidiose e sottili complicazioni. Ad evitare queste, riteniamo opportuno dare un nuovo esempio relativo al II caso, esempio dal quale se ne potrà poi molto semplicemente dedurre uno relativo al III.

Tale nuovo esempio è illustrato nelle figg. 1₁, 1₂, 1₃. Consideriamo il cubo C di spigolo = 2, i tre assi del quale sono sovrapposti rispettivamente ai tre assi coordinati x, y, z (nelle figg. 1₁, 1₂ è visibile il primo AB di tali assi). Prefissiamo un angolo $\alpha \geq 20^\circ$ ma, in ogni caso, non molto superiore a 20° (nelle figg. 1 s'è assunto $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2}{5} = \sim 21^\circ 49'$) (7) e cominciamo col praticare, nell'interno di C , una successione di tagli rettangolari

$$\begin{array}{cccccccc}
 T_{11} & & & & & & & \\
 T_{21} & T_{23} & & & & & & \\
 T_{31} & T_{33} & T_{35} & T_{37} & & & & \\
 T_{41} & T_{43} & T_{45} & T_{47} & \dots & T_{4,15} & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\
 T_{h1} & T_{h3} & T_{h5} & T_{h7} & \dots & \dots & \dots & T_{h,2^h-1} \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

Il generico taglio T_{hk} ($h = 1, 2, 3, \dots; k = 1, 3, 5, \dots, 2^h - 1$) è praticato col piano $z = \frac{1}{2^h}$, ha due lati opposti rispettivamente sui semipiani

$$(1) \quad \begin{cases} z = y \operatorname{tag} \alpha \\ y \geq 0, \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} z = -y \operatorname{tag} \alpha \\ y \leq 0, \end{cases}$$

gli altri due lati opposti rispettivamente sui piani

$$x = -1 + \frac{2k-1}{2^h}, \quad x = -1 + \frac{2k+1}{2^h}.$$

Pratichiamo poi una seconda successione di tagli S_{hk} (in corrispondenza delle stesse coppie d'indici h, k or ora introdotti), tutti simili al triangolo isoscele della fig. 1₃: il generico triangolo S_{hk} giace nel piano $x = -1 + \frac{k}{2^{h-1}}$,

(7) Queste limitazioni per α non hanno nulla di veramente essenziale: non rispettandole, s'avrebbero soltanto delle modificazioni di dettaglio nella costruzione delle curve che indicheremo con ω_n^0 , e quindi anche delle curve $\bar{\omega}_n, \gamma_n, \gamma'_n$ che da esse dedurremo. Sarà praticamente conveniente non superare il valore $\alpha = 22^\circ$.

ha la base sul piano $z = \frac{1}{2^{h-1}}$, il vertice opposto sull'asse AB , i lati uguali (uscanti da questo vertice) sui semipiani (1), (2) rispettivamente.

Infine pratichiamo in C ancora due successioni di tagli rettangolari V_{hk} , W_{hk} . Per una generica coppia d'indici h, k , il taglio V_{hk} giace nel semipiano (1), ha due lati opposti rispettivamente sui piani

$$x = -1 + \frac{k}{2^{h-1}}, \quad x = -1 + \frac{k-1}{2^{h-1}},$$

gli altri due lati opposti sui piani

$$z = \frac{1}{2^h}, \quad z = \frac{1}{2^{h-1}};$$

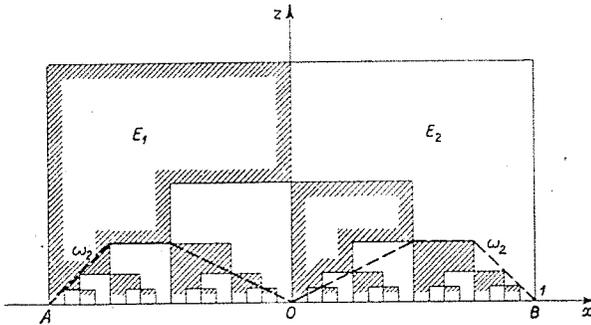


Fig. 1.

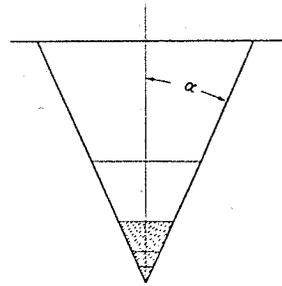


Fig. 1.

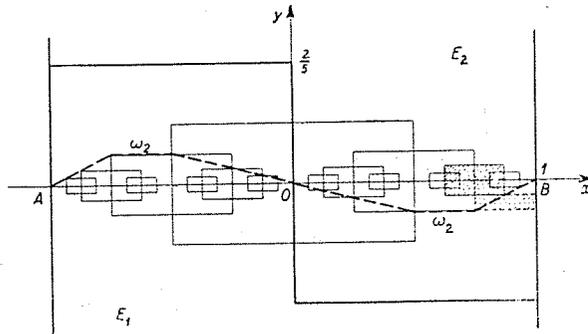


Fig. 1.

analogamente il taglio W_{hk} giace nel semipiano (2), ha due lati opposti rispettivamente sui piani

$$x = -1 + \frac{k}{2^{h-1}}, \quad x = -1 + \frac{k+1}{2^{h-1}},$$

gli altri due lati opposti sui piani

$$z = \frac{1}{2^k}, \quad z = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Indicando con R il rettangolo, giacente nel piano $y = 0$ ed avente due vertici in A, B , gli altri due nei punti $(x = 1, z = -1), (x = -1, z = -1)$, e ponendo

$$\Pi = \sum_{hk} (T_{hk} + S_{hk} + V_{hk} + W_{hk}),$$

si riconosce facilmente che la superficie poliedrica (a infinite facce) $R + \Pi$ divide C in due domini semplicemente connessi E_1, E_2 . In fig. 1₁ è rappresentata la sezione della superficie poliedrica Π , eseguita col semipiano $y = 0, z \geq 0$: in essa le zone tratteggiate appartengono ad E_1 , le altre ad E_2 . Nelle figg. 1₂, 1₃ abbiamo eseguite le proiezioni ortogonali di Π , sui piani $z = 0, x = 1$ rispettivamente. Come esempio, abbiamo tratteggiate in fig. 1₂ le proiezioni dei due tagli rettangolari T_{37}, W_{37} , in fig. 1₃ la proiezione del taglio triangolare S_{37} (8).

L'area di Π può calcolarsi con tutta facilità: si trova infatti

$$\mathfrak{A}(T_{hk} + S_{hk} + V_{hk} + W_{hk}) = \frac{1}{4^{k-1}} \left(2 \operatorname{tag} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right).$$

(indipendente da k) e perciò

$$\mathfrak{A}(\Pi) = 4 \operatorname{tag} \alpha + \frac{2}{\cos \alpha}.$$

Nel caso del disegno è $\mathfrak{A}(\Pi) = \frac{8 + 2\sqrt{29}}{5} = \sim 3,754$.

3. - Immaginiamo la superficie poliedrica Π materializzata mediante due pagine aderenti l'una all'altra, in modo che fra di esse possa venir teso libe-

(8) A scanso d'equivoci nell'esatta interpretazione di quanto precede, rileviamo anche le seguenti particolarità della superficie poliedrica Π . In Π sono multipli (doppi) tutti e soli i punti degli spigoli che sono mediane dei rettangoli T_{hk} : tali spigoli sono le intersezioni dei tagli T_{hk} coi corrispondenti tagli S_{hk} (epperò da ogni coppia di tagli T_{hk}, S_{hk} , derivano quattro facce in Π). Invece i tagli V_{hk} si raggruppano in successioni parziali, ciascuna delle quali dà luogo ad un'unica faccia in Π , la cui proiezione ortogonale sul piano $y = 0$ è una delle zone tratteggiate in fig. 1₁. Analogamente per i tagli W_{hk} .

Se la superficie Π si sottopone a una trasformazione omotetica di polo A (oppure B) e di modulo $\frac{1}{2^h}$ (h intero positivo qualunque), s'ottiene una porzione della superficie Π stessa. La superficie Π è simmetrica rispetto all'asse coordinato z .

ramente (cioè senza attrito) un filo perfettamente flessibile ed inestendibile. La ricerca delle configurazioni del filo, supposto teso dall'estremo A all'estremo B , equivale a quella di tutte le geodetiche che possono tracciarsi su Π da A a B .

Esistono infinite di tali geodetiche, e una qualunque di esse può univocamente determinarsi, quando si prefissi una certa successione o « catena » (collegante gli estremi A, B) di facce, ciascuna delle quali abbia uno spigolo, o almeno un vertice in comune con la faccia che la precede ed uno spigolo, o almeno un vertice in comune con quella che la segue, e s'obblighi il filo a percorrere tale catena senza uscirne ⁽⁹⁾.

Il modo più semplice per costruire una geodetica, è quello di sviluppare la corrispondente catena di facce, sul piano del disegno.

Consideriamo la catena doppiamente infinita

$$\dots, V_{h1}, \dots, V_{31}, V_{21}, V_{11}, V_3, V_{37}, \dots, V_{h,2^h-1}, \dots$$

Su di essa, la geodetica, che indichiamo con ω_1^0 , è una poligonale composta di soli tre lati e giacente nel semipiano (1): i suoi vertici sono i punti

$$A, \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2 \operatorname{tag} \alpha}, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2 \operatorname{tag} \alpha}, \frac{1}{2}\right), B.$$

Trasformiamo ω_1^0 mediante l'omotetia di polo A (oppure B) e di modulo $\frac{1}{2}$ e aggiungiamo alla poligonale così ottenuta, quella che da questa s'ottiene per rotazione di 180° intorno all'asse z . La poligonale a sei lati, così costruita, ha i vertici nei punti

$$A, \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4 \operatorname{tag} \alpha}, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4 \operatorname{tag} \alpha}, \frac{1}{4}\right), 0, \\ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4 \operatorname{tag} \alpha}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4 \operatorname{tag} \alpha}, \frac{1}{4}\right), B$$

ed è una nuova geodetica ω_2^0 (v. figg. 1₁, 1₂ e la nota ⁽⁸⁾) ⁽¹⁰⁾.

Così proseguiamo indefinitamente. In generale, dopo aver costruita la generica geodetica ω_n^0 , trasformiamo questa mediante le due omotetie di poli A, B rispettivamente e d'ugual modulo $\frac{1}{2}$. Riunendo insieme le due

⁽⁹⁾ È lecito qui sostituire la parola « taglio » (nel senso del n. 2) alla parola « faccia », e (corrispondentemente) la parola « lato (del taglio) » alla parola « spigolo ».

⁽¹⁰⁾ La corrispondente catena è

$$\dots, V_{h1}, \dots, V_{11}, V_{31}, V_{21}, V_{33}, V_{47}, \dots, V_{h,2^h-1}, \dots; \dots \\ \dots, W_{h,2^{h-1}+1}, \dots, W_{49}, W_{35}, W_{23}, W_{37}, W_{4,15}, \dots, W_{,2^h-1}, \dots.$$

trasformate, otteniamo una nuova poligonale a $3 \cdot 2^n$ lati e cioè la successiva geodetica ω_{n+1}^0 (11).

Si trova

$$L(\omega_1^0) = L(\omega_2^0) = \dots = L(\omega_n^0) = \dots = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha} + \sqrt{1 + 4 \cos^2 \alpha} + \cos \alpha}{2 \cos \alpha} > 2$$

(risultato d'un semplice calcolo trigonometrico) (12).

4. - Le due pagine, mediante le quali immaginammo di materializzare Π (n. 3), s'indicheranno con Π_1 , Π_2 e si considereranno porzioni delle due superficie poliedriche che limitano rispettivamente i domini E_1 , E_2 (n. 2).

Distacciamo leggermente, l'una dall'altra, le due pagine Π_1 , Π_2 , con le seguenti operazioni. Prefissato ad arbitrio e comunque piccolo un numero $\varepsilon > 0$ (13), allontaniamo simmetricamente le due pagine di ciascun taglio T_{hk} , della quantità $\frac{\varepsilon}{2^n}$ dalla loro posizione iniziale: cioè portiamo una pagina alla

(11) I vertici di ω_{n+1}^0 sono

$$\begin{aligned} A, & \left(-1 + \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1} \operatorname{tag} \alpha}, \frac{1}{2^{n+1}}\right), \left(-1 + \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1} \operatorname{tag} \alpha}, \frac{1}{2^{n+1}}\right), \left(-1 + \frac{1}{2^{n-1}}, 0, 0\right); \\ & \left(-1 + \frac{3}{2^n}, -\frac{1}{2^{n+1} \operatorname{tag} \alpha}, \frac{1}{2^{n+1}}\right), \left(-1 + \frac{7}{2^{n+1}}, -\frac{1}{2^{n+1} \operatorname{tag} \alpha}, \frac{1}{2^{n+1}}\right), \left(-1 + \frac{1}{2^{n-2}}, 0, 0\right), \dots \\ & \dots, \left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}, 0, 0\right), \left(1 - \frac{7}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1} \operatorname{tag} \alpha}, \frac{1}{2^{n+1}}\right), \left(1 - \frac{3}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1} \operatorname{tag} \alpha}, \frac{1}{2^{n+1}}\right), \\ & \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 0, 0\right), \left(1 - \frac{1}{2^n}, -\frac{1}{2^{n+1} \operatorname{tag} \alpha}, \frac{1}{2^{n+1}}\right), \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}, -\frac{1}{2^{n+1} \operatorname{tag} \alpha}, \frac{1}{2^{n+1}}\right), B. \end{aligned}$$

Si osservi che ω_{n+1}^0 è formata di 2^n archi piani (poligonali trilateri) fra loro uguali, alternativamente giacenti nei semipiani (1), (2).

(12) Nel caso del disegno ($\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2}{5}$), quest'espressione è uguale a

$$\frac{1}{10} (\sqrt{129} + \sqrt{54} + 5) = \sim 2,3706.$$

Il principio di simmetria assiale (prima rispetto all'asse coordinato z , poi successivamente rispetto a rette $x = \frac{k}{2^n}$ del piano $y = 0$), rigorosamente applicato in tutte queste costruzioni, potrà sfruttarsi a scopo dimostrativo, in modo analogo al principio di simmetria planare (prima rispetto al piano $x = \frac{1}{2}$, poi successivamente rispetto a piani $x = \frac{k}{2^n}$) che abbiamo applicato nell'esempio della pubblicazione precedente (n. 8 ivi).

(13) Si dovrà naturalmente intendere ε sufficientemente piccolo per quanto occorrerà nel seguito. Per es., già soltanto affinché le operazioni che stiamo per indicare abbiano senso, occorre che sia $\varepsilon < \frac{1}{3}$. Dovrà poi essere $\alpha^0 - \frac{180^0}{\pi} \varepsilon > 20^0$, ecc.

quota $z = \frac{1+\varepsilon}{2^h}$, l'altra alla quota $z = \frac{1-\varepsilon}{2^h}$. In modo analogo allontaniamo simmetricamente le due pagine di ciascun taglio S_{hk} dalla loro posizione iniziale, facendo loro subire due rotazioni d'ampiezza ε (ma di segni opposti) intorno alla retta $z = 0$, $x = -1 + \frac{k}{2^{h-1}}$: cioè portiamo una pagina nella posizione $x = -1 + \frac{k}{2^{h-1}} + z \operatorname{tag} \varepsilon$, l'altra nella posizione $x = -1 + \frac{k}{2^{h-1}} - z \operatorname{tag} \varepsilon$. Infine portiamo le due serie di pagine dei tagli V_{hk} , rispettivamente nei due semipiani

$$\left\{ \begin{array}{l} z = y \operatorname{tag} (\alpha + \varepsilon) \\ y \geq 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} z = y \operatorname{tag} (\alpha - \varepsilon) \\ y \geq 0, \end{array} \right. \quad (14)$$

e così le due serie di pagine dei tagli W_{hk} , rispettivamente nei due semipiani

$$\left\{ \begin{array}{l} z = -y \operatorname{tag} (\alpha + \varepsilon) \\ y \leq 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} z = -y \operatorname{tag} (\alpha - \varepsilon) \\ y \leq 0. \end{array} \right.$$

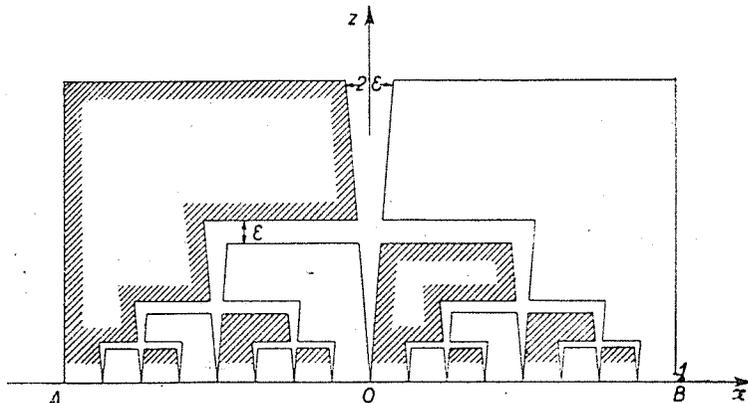


Fig. 2.

Siano Ω_1 , Ω_2 le nuove posizioni, così ottenute per le pagine Π_1 , Π_2 , e sia E il dominio, semplicemente connesso, la cui superficie S è la somma delle due pagine Ω_1 , Ω_2 e della porzione della superficie di C che non è compresa fra tali pagine. Per tutta chiarezza, rappresentiamo in fig. 2 la sezione di E eseguita col piano $y = 0$ ⁽¹⁵⁾.

(14) S'intenda: nel primo semipiano portiamo la serie di pagine che sono rivolte nel verso positivo dell'asse y , nel secondo semipiano portiamo l'altra serie.

(15) Sezione, dunque, analoga a quella della fig 1₁, ma limitatamente ai valori 1, 2, 3 dell'indice h .

Dopo ciò consideriamo, in luogo delle geodetiche ω_n^0 di cui sopra, le curve $\bar{\omega}_n$ (anch'esse ovviamente poligonali) di minima lunghezza (in senso relativo) che congiungono A, B , senza penetrare nell'interno di E , intendendo che, per ogni n , $\bar{\omega}_n$ sia la posizione cui tende ω_n^0 con deformazione continua, al crescere di ε (da 0 al valore prefissato, supposto sufficientemente piccolo). Prefissato a piacere un numero $\eta > 0$, sia pur piccolo, è possibile determinare corrispondentemente ε in modo, che la comune lunghezza delle $\bar{\omega}_n$ sia un numero

$$\Lambda > \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha} + \sqrt{1 + 4 \cos^2 \alpha} + \cos \alpha}{2 \cos \alpha} - \eta.$$

Ciascuna $\bar{\omega}_n$ è curva d'accumulazione di curve γ di estremi A, B (ma, per il resto, del tutto estranee ad E), le cui lunghezze differiscono quanto poco si vuole da $L(\bar{\omega}_n)$ e cioè da Λ . È dunque possibile sostituire la successione delle $\bar{\omega}_n$, con una successione di siffatte curve γ_n , in modo che risulti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) = \Lambda.$$

Analogamente consideriamo, in luogo delle geodetiche ω_n^0 , le geodetiche (poligonali) γ'_n di S , unenti A, B , intendendo che (per ogni $n = 1, 2, \dots$) γ'_n sia la posizione cui tende ω_n^0 con deformazione continua, al crescere di ε . Anche qui si riconosce la possibilità di determinare ε in modo, che la comune lunghezza delle γ'_n sia un numero

$$\Lambda' > \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha} + \sqrt{1 + 4 \cos^2 \alpha} + \cos \alpha}{2 \cos \alpha} - \eta \quad (16).$$

Orbene si può dimostrare che Λ è effettivamente il minimo limite definito al n. 1 α , mentre Λ' è quello definito al n. 1 α' , epperò si riconosce che il dominio E qui costruito con la speciale scelta dei due punti A, B (per cui Γ è il segmento AB ed $L(\Gamma)$ è uguale a 2), fornisce il desiderato nuovo esempio relativo al caso II.

Quanto all'area della superficie S che delimita E , è manifestamente lecito supporre che l' ε scelto sia anche tanto piccolo, che $A(S)$ differisca per meno

(16) Queste nuove geodetiche γ'_n conservano la proprietà delle antiche ω_n^0 , osservata in fondo alla nota (11): esse sono formate da 2^{n-1} archi (poligonali trilateri) fra loro uguali, alternativamente giacenti nei semipiani:

$$\begin{cases} z = y \operatorname{tag}(\alpha + \varepsilon) \\ y > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} z = -y \operatorname{tag}(\alpha + \varepsilon) \\ y < 0. \end{cases}$$

della quantità prefissata η dal numero

$$24 + 2\mathcal{E}(\Pi) = 24 + 8 \operatorname{tag} \alpha + \frac{4}{\cos \alpha}. \quad (17)$$

5. - Abbiamo già annunciato che dal precedente esempio è molto facile dedurre uno relativo al III caso (n. 1). All'uopo ritorniamo, per un momento, alla superficie poliedrica $R + \Pi$ di cui al n. 2. Consideriamo la porzione C' di E_1 che si proietta ortogonalmente, sul piano $y = 0$, nel rettangolo a lati paralleli agli assi, di cui due vertici opposti sono $(0, 0, \frac{1}{2})$, $(-1, 0, 1)$ ⁽¹⁸⁾. Eseguiamo, su tale porzione C' , una costruzione analoga a quella precedentemente eseguita sul cubo C : costruiamo cioè, mediante opportuni tagli in C' , una superficie poliedrica $\Pi^{(1)}$ analoga alla Π , che sia strettamente contenuta nel diedro il cui spigolo è

$$z = \frac{3}{4}, \quad z = -y \operatorname{tag} \alpha,$$

la cui ampiezza è 2α e il cui semipiano bisettore è

$$z = \frac{3}{4}, \quad y \geq -\frac{3}{4 \operatorname{tag} \alpha}.$$

L'intersezione di questo diedro col piano $x = 1$, è l'angolo $\sphericalangle C^{(1)}A^{(1)}D^{(1)}$ della fig. 3 ⁽¹⁹⁾.

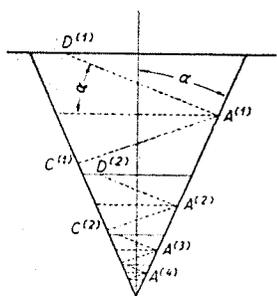


Fig. 3.

⁽¹⁷⁾ Se si desidera che S sia anche dotata, in ogni punto estraneo a Γ , di piano tangente variabile con continuità, e magari anche di elementi differenziali d'ordine prefissato elevato a piacere (v. nota ⁽²⁾), basterà ancora arrotondare opportunamente gli spigoli delle pagine Ω_1 , Ω_2 e del cubo C (oltre, s'intende, agli spigoli di raccordo della superficie $\Omega_1 + \Omega_2$ con quella di C). Una siffatta correzione potrà sempre contenersi quantitativamente in misura tale da conservare, se si vuole, le limitazioni (di cui sopra) per Λ , per Λ' e per $\mathcal{E}(S)$ (v. il n. 10 della pubblicazione preced.). Naturalmente le curve ω_n , γ'_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), dopo la correzione, non saranno più poligonali.

⁽¹⁸⁾ Tale porzione è un prisma retto a base trapezoidale, d'altezza 1 (in direzione parallela all'asse x).

⁽¹⁹⁾ Intendiamo che i tagli analoghi ai V_{hk} , vengano tutti eseguiti con una delle due facce di tale diedro, i tagli analoghi ai W_{hk} con l'altra faccia. Abbiamo appositamente parlato di « costruzione analoga », non di costruzione identica. Occorre infatti osservare che la nuova costruzione differirà necessariamente dalla precedente, in un dettaglio (per altro inessenziale) cui vogliamo accennare. Se, per praticare il primo taglio T_{11} in C' , adoperiamo il piano $y = 0$, il risultato finale sarà una superficie $\Pi^{(1)}$ simile alla Π , *soltanto nella porzione di essa che trovasi dalla banda $y \leq 0$ del detto piano*; mentre, per es., il taglio S_{11} non sarà più triangolare isoscele, ma avrà altra forma (quadrangolare, nel caso della fig. 3). Analoga osservazione, relativamente alle superfici $\Pi^{(21)}$, $\Pi^{(22)}$, $\Pi^{(31)}$, $\Pi^{(32)}$, $\Pi^{(33)}$, $\Pi^{(34)}$,... che definiremo fra poco.

Trasformiamo ora la superficie $\Pi^{(1)}$, mediante le due omotetie di poli A, B rispettivamente e d'ugual modulo $\frac{1}{2}$ (cfr. n. 3): otterremo due nuove superficie poliedriche $\Pi^{(21)}, \Pi^{(22)}$ strettamente contenute in uno stesso diedro, precisamente nel diedro la cui intersezione col piano $x = 1$, è l'angolo $\sphericalangle C^{(2)}A^{(2)}D^{(2)}$ della fig. 3. Successivamente trasformiamo anche la somma $\Pi^{(2)} = \Pi^{(21)} + \Pi^{(22)}$ mediante le due omotetie or ora indicate: otterremo quattro superficie poliedriche $\Pi^{(31)}, \Pi^{(32)}, \Pi^{(33)}, \Pi^{(34)}$, tutte strettamente contenute in uno stesso diedro. La loro somma sia $\Pi^{(3)}$.

Così proseguiamo indefinitamente. In generale, per un generico indice naturale n , dopo aver costruite le 2^{n-1} superficie poliedriche $\Pi^{(n1)}, \Pi^{(n2)}, \dots, \Pi^{(n, 2^{n-1})}$, trasformeremo la loro somma $\Pi^{(n)}$ mediante le due dette omotetie, e con ciò otterremo 2^n nuove superficie poliedriche $\Pi^{(n+1,1)}, \Pi^{(n+1,2)}, \dots, \Pi^{(n+1, 2^n)}$, tutte strettamente contenute in uno stesso diedro.

6. - Immaginando ogni superficie poliedrica $\Pi^{(n,h)}$ materializzata mediante due pagine $\Pi_1^{(n,h)}, \Pi_2^{(n,h)}$ aderenti l'una all'altra, e immaginando poi di distaccare leggermente, l'una dall'altra, tali pagine, simultaneamente e in modo del tutto analogo alle due pagine Π_1, Π_2 considerate al n. 4 (sempre supponendo ε sufficientemente piccolo), s'otterrà un dominio E' semplicemente connesso e delimitato da una superficie quadrabile ⁽²⁰⁾ S' , e cioè dalla somma della superficie del cubo C e delle infinite coppie di pagine

$$\Pi_1, \Pi_2, \Pi_1^{(n,h)}, \Pi_2^{(n,h)} \quad (n = 1, 2, \dots; h = 1, 2, \dots, 2^{n-1}) \quad (21).$$

Gli infiniti segmenti paralleli all'asse x , compresi fra i due piani $x = \pm 1$ e perciò tutti di lunghezza $= 2$, i cui punti medi hanno coordinate $x = 0$, $y = -\frac{3}{2^{n+1} \operatorname{tag} \alpha}$, $z = \frac{3}{2^{n+1}}$ ($n = 1, 2, \dots$) ⁽²²⁾, giacciono tutti interamente su S' . Essi tendono, per $n \rightarrow \infty$, al segmento AB , onde si riconosce immediatamente, nel dominio E' ora costruito, un esempio del III caso con $\Lambda > 2$, $\Lambda' = L(\Gamma) = 2$ ⁽²³⁾.

⁽²⁰⁾ Si trova infatti $\mathfrak{A}(\Pi^{(n)}) = \frac{1}{2^{n-1}} \mathfrak{A}(\Pi^{(1)})$ e perciò

$$\mathfrak{A}\left(\sum_1^\infty \Pi^{(n)}\right) = 2\mathfrak{A}(\Pi^{(1)}).$$

⁽²¹⁾ Avendo naturalmente cura di detrarre, da tale somma, tutte le porzioni di FC che sono comprese fra Π_1 e Π_2 o fra una qualche coppia di pagine $\Pi_1^{(n,h)}, \Pi_2^{(n,h)}$, e tutte le porzioni di Π_1 e Π_2 che sono comprese fra una qualche coppia di pagine $\Pi_1^{(n,h)}, \Pi_2^{(n,h)}$

⁽²²⁾ Le proiezioni di tali segmenti sul piano $x = 1$, sono i punti $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}, \dots$ della fig. 3.

⁽²³⁾ Infatti (a prescindere dall'operazione di « distacco » di cui nel presente n.) il generico dei detti segmenti è composto di 2^n parti uguali, 2^{n-1} dei quali danno luogo

7. — Dall'esempio dei nn. 2-4 possiamo dedurre facilmente anche uno relativo al IV caso (n. 1). Immaginiamo infatti di tagliare la superficie S (definita al n. 4) lungo il segmento AB e inoltre d'asportarne:

- il quadrato che la S ha in comune col piano $z = -1$,
- il triangolo di vertici $(-1, 0, 0)$, $(-1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$,
- il triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(1, -1, -1)$, $(1, 1, -1)$.

Eseguita quest'operazione, rimangono della S due porzioni S_1 , S_2 , sconnesse l'una dall'altra. Allontaniamo l'una dall'altra tali porzioni, poi saldiamole nuovamente lungo i loro bordi, precisamente in modo che il rettangolo

$$A, B, (-1, -1, -1), (1, -1, -1) \quad (\text{bordo di } S_1)$$

venga (ordinatamente vertice con vertice) a coincidere col rettangolo

$$A, B, (-1, 1, -1), (1, 1, -1) \quad (\text{bordo di } S_2).$$

La superficie chiusa \bar{S} , così ottenuta, fornisce, come subito si riconosce, un esempio del IV caso (n. 1), relativamente al segmento AB , assunto come curva Γ tracciata sulla \bar{S} stessa.

8. — Faremo, per chiudere, alcune osservazioni (cfr. il n. 11 della pubblicazione precedente).

a) Assoggettando lo spazio cartesiano ad un'affinità del tipo

$$x = k\xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$

con coefficiente k convenientemente scelto, si possono dedurre dagli esempi precedenti, altri esempi nei quali i rapporti $\Lambda/L(\Gamma)$ oppure $\Lambda'/L(\Gamma)$ che sono maggiori dell'unità, crescano e vengano a superare un numero positivo prefissato comunque grande, oppure diminuiscano e vengano ad avvicinarsi quanto si vuole all'unità.

b) Negli esempi precedenti, la curva Γ considerata e cioè il segmento AB , è evidentemente una geodetica della superficie S (o rispettivamente della S'

esattamente allo stesso fenomeno d'approssimazione del segmento AB del caso II (esempio dei nn. 2-4), mentre le rimanenti 2^{n-1} parti (alternate con le precedenti) possono esser approssimate quanto si vuole da segmenti ad esse uguali (interamente estranei ad E' oppure, a piacere, interamente contenuti in S'). A proposito di quest'esempio, osserviamo che viene a mancare la condizione richiesta nella nota (2). Precisamente la superficie S' viene a possedere, oltre alla Γ , altre infinite curve singolari (cioè curve in tutti i punti delle quali viene a mancare il piano tangente, ecc.): si riconosce facilmente che non sarebbe possibile costruire un esempio relativo al III caso, nel quale la condizione della nota (2) fosse mantenuta.

(n. 6) o della \bar{S} (n. 7)). È però facile convincersi che questa condizione non è affatto essenziale in quanto precede. Si possono, del resto, modificare opportunamente gli esempi precedenti ⁽²⁴⁾, in modo da ottenere che la Γ sia una curva regolare semplice (piana o sghemba), comunque prefissata nello spazio (cfr. n. 1).

c) Analoga modificazione può operarsi sull'es. del n. 5, per quanto riguarda gli infiniti segmenti che si proiettano nei punti $A^{(n)}$ della fig. 3 (v. la nota ⁽²²⁾). Si può cioè modificare quell'esempio in modo, che i detti segmenti si trasformino in curve (regolari e semplici) arbitrariamente scelte e accumulanti, per $n \rightarrow \infty$, ad una curva limite Γ comunque prefissata. Di tutto ciò ci si può valere, allo scopo d'ottenere tutti i rapporti possibili fra i valori Λ e Λ' , così $\Lambda \geq \Lambda'$, ecc.

d) Il problema studiato in questa ricerca, è suscettibile di generalizzazione in uno spazio cartesiano S_m a un numero qualunque $m > 3$ di dimensioni. Se Γ è una curva regolare semplice tracciata su una varietà V il cui numero p di dimensioni sia ≥ 2 e se V' è un'altra varietà contenente V e il cui numero p' di dimensioni sia $> p$, si può studiare una qualunque successione di curve γ_n ($n = 1, 2, \dots$) che sia minimizzante per la lunghezza $L(\gamma)$ e converga alla Γ , sotto l'una o l'altra delle due condizioni seguenti:

α) (corrispondente alla a del n. 1) le curve γ_n conservino gli estremi in due punti fissi A, B di V ma, per il resto, siano tutte interamente contenute in $V' - V$;

α') (corrispondente alla a' del n. 1) le curve γ_n conservino gli estremi nei due punti fissi A, B e, di più, siano interamente contenute in V .

Posto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) = \begin{cases} \Lambda & \text{nel caso } \alpha, \\ \Lambda' & \text{» » } \alpha', \end{cases}$$

ci si può proporre la costruzione di esempi tali da soddisfare successivamente e singolarmente alle condizioni dei casi I-IV del n. 1.

La soluzione che abbiamo dato di questo problema nel caso particolare dello spazio ordinario, fa ritenere indubbio che simili esempi possano sempre costruirsi, qualunque siano le dimensioni m, p, p' assegnate.

⁽²⁴⁾ Per es. assoggettando lo spazio cartesiano a un'opportuna trasformazione $x = x(\xi, \eta, \zeta), y = y(\xi, \eta, \zeta), z = z(\xi, \eta, \zeta)$.