

KHALIFA DABBEK and NOUREDDINE GHILOUFI

Ordres des courants positifs pluriharmoniques

Orders of positive pluriharmonic currents

Résumé. Dans cet article, nous étudions l'ordre (d'algébricité) d'un courant positif pluriharmonique et nous le comparons soit avec l'ordre de ses tranches concurrentes soit avec ses ordres directionnels. Des estimations de croissance de la fonction de Lelong sont établies dont le problème d'algébricité du courant est traité comme conséquence.

Abstract. In this article, we study the order of a positive pluriharmonic current and we compare it with either the order of the concurrent slices or the directional orders of the current. Therefore some estimates of the growth of the Lelong function are established and the problem of algebraicity of the current is treated as a result.

Keywords. Positive pluriharmonic current, Plurisubharmonic function, order and type.

Mathematics Subject Classification (2010): Primary 32U40; Secondary 32U05, 14A20.

1 - Préliminaires

Dans tout ce travail on utilise les notations suivantes: Pour $r > 0$, $\mathbb{B}(r) = \mathbb{B}_n(r) := \{z \in \mathbb{C}^n; |z| < r\}$ la boule euclidienne de \mathbb{C}^n de centre 0 et de rayon r et pour tous $0 < r_1 < r_2$, $\mathbb{B}(r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C}^n; r_1 \leq |z| < r_2\} = \mathbb{B}(r_2) \setminus \mathbb{B}(r_1)$ ainsi que les opérateurs

$$\partial = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} dz_j, \quad \bar{\partial} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j, \quad d = \partial + \bar{\partial} \quad \text{et} \quad d^c = \frac{i}{4\pi}(\bar{\partial} - \partial).$$

Notons $\mathcal{D}_{p,q}(\mathbb{C}^n)$ l'espace des formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ à supports compacts de bidegré (p, q) dans \mathbb{C}^n . L'espace des courants de bidimension (p, q) (ou de bidegré $(n-p, n-q)$), noté $\mathcal{D}'_{p,q}(\mathbb{C}^n)$, est par définition le dual de $\mathcal{D}_{p,q}(\Omega)$ muni de sa topologie usuelle.

Soit $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(\mathbb{C}^n)$; on dit que T est positif si $T \wedge i\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge i\alpha_p \wedge \bar{\alpha}_p$ est une mesure positive pour toutes $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathcal{D}_{1,0}(\mathbb{C}^n)$. Le courant T est dit négatif si $-T$ est positif. Il est dit fermé si $\langle dT, \phi \rangle := -\langle T, d\phi \rangle = 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}_{p-1,p}(\mathbb{C}^n)$, il est dit plurisousharmonique (psh)(resp. pluriharmonique (ph)) si $dd^c T$ est un courant positif (resp. $dd^c T = 0$) où $\langle dd^c T, \phi \rangle := \langle T, dd^c \phi \rangle$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}_{p-1,p-1}(\mathbb{C}^n)$.

On associe à un courant positif T de bidimension (p, p) sur \mathbb{C}^n , la fonction de Lelong définie par $\nu_T(r) = \frac{1}{r^{2p}} \int_{\mathbb{B}(r)} T \wedge (dd^c |z|^2)^p$. Si T est positif plurisousharmonique alors ν_T est croissante sur $]0, +\infty[$. Un courant positif T est dit algébrique si la fonction ν_T est bornée (Pour $T = [X]$, le courant d'intégration sur un ensemble analytique X , l'algébricité de T est équivalente à l'algébricité classique de X).

Soient $k \leq p < n$ et la projection canonique $\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$ définie par $\pi(z', z'') = z'$. Soit h une fonction positive borélienne bornée à support compact dans la boule unité de \mathbb{C}^k telle que $\int h(z') d\lambda_k(z') = 1$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $h_\varepsilon(z') = \varepsilon^{-2k} h(z'/\varepsilon)$. Soient $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(\mathbb{C}^n)$ un courant positif et $a \in \mathbb{C}^k$, la tranche (parallèle) de T par h au point a noté $\langle T, \pi, a \rangle_h$, est la limite faible dans $\mathcal{D}'_{p-k,p-k}(\mathbb{C}^n)$, quand elle existe, de $T \wedge \pi^*(h_\varepsilon(z' - a) \cdot (dd^c |z'|^2)^k)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Si T est un courant positif pluriharmonique, D'après [5], il existe un ensemble de mesure de Lebesgue nulle de \mathbb{C}^k en dehors duquel la tranche de T existe et est indépendante de h .

Dans la suite soient $p, q < n$ des entiers tels que $p + q \geq n$ et $G_{q,n}$ la Grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension q dans \mathbb{C}^n munie de sa forme Kählerienne standard ω_q et la métrique de Fubini-Study associée notée μ_q (ou simplement μ s'il n'y a pas d'ambiguïté). Soit $X_{q,n} = \{(z, L) \in \mathbb{C}^n \times G_{q,n}; z \in L\}$ le fibré vectoriel de rang q au dessus de $G_{q,n}$, muni des projections canoniques $\pi : X_{q,n} \rightarrow G_{q,n}$ et $\sigma : X_{q,n} \rightarrow \mathbb{C}^n$; alors $\beta_{X_{q,n}} := \pi^* \omega_q + \sigma^* \beta$ définit une forme Kählerienne sur la variété $X_{q,n}$ qui est de dimension $\dim X_{q,n} = n + (q-1)(n-q)$. La restriction σ_0 de σ à $X'_{q,n} := \sigma^{-1}(\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$ est une submersion sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Soit T un courant positif pluriharmonique sur \mathbb{C}^n , alors $\sigma_0^* T$ définit un courant positif pluriharmonique sur $X'_{q,n}$ de masse localement finie au voisinage de $\sigma^{-1}(0)$ (cf. [3]), et d'après Dabbek-Elkhadhra-El Mir [5], l'extension trivial de $\sigma_0^* T$ par zéro au dessus de $\sigma^{-1}(0)$ est un courant positif de dd^c -négatif de dimension $p + (q-1)(n-q)$ sur $X_{q,n}$, qu'on notera $\widetilde{\sigma_0^* T}$. On pose alors

- $\sigma^* T = \widetilde{\sigma_0^* T}$ si $q > n - p$, où $n - p$ est le degré de $\widetilde{\sigma_0^* T}$.
- $\sigma^* T = \widetilde{\sigma_0^* T} + \nu(T, 0)[\sigma^{-1}(0)]$ si $q = n - p$, où $\nu(T, 0)$ est le nombre de Lelong de T en 0.

Comme précédemment, il existe un ensemble E_T de la grassmannienne $G_{q,n}$ de mesure de Fubini-Study nulle tel que la tranche (concourante) $\langle \sigma^*T, \pi, L \rangle$ de T , qu'on notera ici $T|_L$, existe pour tout $L \in \Omega_T := G_{q,n} \setminus E_T$. Quand T est à coefficients continus, cette tranche coïncide avec la restriction usuelle de T à L . De plus en dehors d'un ensemble négligeable de Ω_T , $T|_L$ est un courant pluriharmonique; on peut donc supposer dans toute la suite que $T|_L$ est bien défini et est pluriharmonique sur Ω_T .

On note par

$$v_{T|_L}(r) := \frac{1}{r^{2(p+q-n)}} \int_{X_{q,n}(r)} T|_L \wedge \sigma^*(dd^c|z|^2)^{p+q-n}$$

la fonction de Lelong de $T|_L$ avec $X_{q,n}(r) = \sigma^{-1}(\mathbb{B}(r))$.

Définition 1. Un courant positif est dit *d'ordre d'algébricité* ρ fini si la limite suivante est finie

$$\rho := \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log v_T(r)}{\log r} < +\infty.$$

Dans toute la suite on utilise seulement l'ordre pour indiquer l'ordre d'algébricité. A noter que l'ordre du courant d'intégration sur un ensemble analytique X , est égale à l'ordre classique de l'ensemble analytique X (cf. [4]).

2 - Ordres des tranches concourantes

2.1 - Théorème principal et conséquences

Le résultat principal de cette partie (Théorème 1) consiste à contrôler la fonction v_T du courant T par celles de ses tranches sur la grassmannienne.

Théorème 1. Soient T un courant positif pluriharmonique de bidimension (p, p) sur \mathbb{C}^n et E un ensemble borelien de Ω_T de mesure de Fubini-Study $\mu(E)$ non nulle. Alors il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ qui dépendent de E telles que l'on ait

$$c_1 v_T(c_2 r) \leq \int_E v_{T|_L}(r) d\mu(L)$$

pour tout r suffisamment grand.

Corollaire 1. *Soit T un courant positif pluriharmonique de bidimension (p, p) sur \mathbb{C}^n . On suppose qu'il existe un ensemble E de mesure non nulle de la grassmannienne $G_{q,n}$ tel que $T|_L$ soit un courant algébrique pour tout $L \in E$, alors T est algébrique.*

Notons que ces deux résultats sont démontrés par les mêmes auteurs dans [7] dans le cas d'un courant positif fermé.

Démonstration. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{B}_N := \{L \in E; v_{T|_L}(r) \leq N, \forall r > 0\}$. Comme $\mu(E) > 0$ et, par hypothèse, $\bigcup_N \mathcal{B}_N = E$ donc il existe $N_0 > 0$ tel que $\mu(\mathcal{B}_{N_0}) > 0$. D'après le Théorème 1, il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$v_T(r) \leq \frac{1}{c_1} \int_{\mathcal{B}_{N_0}} v_{T|_L} \left(\frac{r}{c_2} \right) d\mu(L) \leq \frac{1}{c_1} N_0 \mu(\mathcal{B}_{N_0}).$$

□

Corollaire 2. *Soit T un courant positif pluriharmonique de bidimension (p, p) sur \mathbb{C}^n . Soit $(r_m)_m$ une suite de réels positifs croissante vers $+\infty$. Alors l'ensemble*

$$E := \left\{ L \in \Omega_T; \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{v_{T|_L}(\alpha r_m)}{v_T(r_m)} = 0, \text{ pour tout } \alpha > 0 \right\}$$

est de mesure nulle.

Ce corollaire est démontré par Amamou-Ben Farah [2] dans le cas des courants positifs fermés et $q = 1$, ce qui correspond à l'espace projectif \mathbb{P}^{n-1} .

Démonstration. Supposons que $\mu(E) > 0$. Pour $s \in \mathbb{N}$, on considère

$$E_s := \left\{ L \in \Omega_T; \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{v_{T|_L}(s r_m)}{v_T(r_m)} = 0 \right\}.$$

On a $E = \bigcap_s E_s$ et d'après le théorème d'Egorov, pour tout $s \in \mathbb{N}$ il existe $K_s \subset E_s$ de mesure $\mu(K_s) \leq \frac{\mu(E)}{2^{s+2}}$ tel que la suite $\left(\frac{v_{T|_L}(s r_m)}{v_T(r_m)} \right)_m$ converge uniformément vers 0 sur $E_s \setminus K_s$. Si on note par $W = E \setminus \bigcup_s K_s$, alors $\mu(W) \geq \mu(E)/2$ et la suite $\left(\frac{v_{T|_L}(\alpha r_m)}{v_T(r_m)} \right)_m$ converge uniformément vers 0 sur W ($\forall \alpha$) ce qui donne

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_W \frac{v_{T|_L}(\alpha r_m)}{v_T(r_m)} d\mu(L) = 0, \quad \forall \alpha > 0.$$

Comme $\mu(W) > 0$, le Théorème 1 implique l'existence de deux constantes $c_1, c_2 > 0$

tels que

$$c_1 \leq \int_W \frac{v_{T|L}(\frac{1}{c_2} r_m)}{v_T(r_m)} d\mu(L)$$

pour m suffisamment grand ce qui est en contradiction avec la limite est nulle quand m tend vers l'infinie. \square

Corollaire 3. *Soit T un courant positif pluriharmonique de bidimension (p, p) sur \mathbb{C}^n . S'il existe un ensemble $E \subset \Omega_T$ de mesure non nulle de la grassmannienne $G_{q,n}$ tel que $T|_L$ soit nul pour tout $L \in E$ alors T est nul.*

Démonstration. Comme $\mu(E) > 0$, d'après le Théorème 1, il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que pour tout r suffisamment grand on a

$$v_T(r) \leq \frac{1}{c_1} \int_E v_{T|L} \left(\frac{r}{c_2} \right) d\mu(L) = 0.$$

Ce qui donne $T = 0$. \square

2.2 - Preuve du Théorème 1

La démonstration du Théorème 1 se fait par récurrence sur l'entier q où on utilise les Lemmes 1 et 2 qui suivent.

Lemme 1 (formule de type Crofton). *Soit S un courant positif pluriharmonique de bidimension (p, p) sur \mathbb{C}^n . Alors pour tout $r > 0$ on a*

$$v_S(r) = \int_{G_{q,n}} v_{S|L}(r) d\mu(L).$$

Démonstration. Soit χ_k un noyau régularisant qui ne dépend que de $|z|$ sur \mathbb{C}^n , on note par $S_k = S * \chi_k$ le régularisé de S qui est un courant positif pluriharmonique de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{C}^n . D'après Alessandrini-Bassanelli [1], la suite $(\sigma^*(S_k))_k$ est bornée en masse, alors quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que $(\sigma^* S_k)_k$ converge faiblement sur $X_{q,n}$ vers $\sigma^* S$. D'après la formule de Lelong-Jensen, pour $0 < r_1 < r_2 < r$,

$$\frac{1}{r_2^{2p}} \int_{\mathbb{B}(r_2)} S_k \wedge (dd^c |z|^2)^p - \frac{1}{r_1^{2p}} \int_{\mathbb{B}(r_1)} S_k \wedge (dd^c |z|^2)^p = \int_{\mathbb{B}(r_1, r_2)} S_k \wedge (dd^c \log |z|^2)^p.$$

Donc si $r_1 \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{r_2^{2p}} \int_{\mathbb{B}(r_2)} S_k \wedge (dd^c |z|^2)^p = \int_{\mathbb{B}(r_2) \setminus \{0\}} S_k \wedge (dd^c \log |z|^2)^p$.

Quitte à remplacer S par $S \wedge (dd^c |z|^2)^{p-q}$, on peut supposer que $p + q = n$, donc on peut appliquer l'égalité (prouvé par Siu ([9], p. 128)):

$$(dd^c \log |z|^2)^p = \sigma_* \pi^* \omega_{n-p}^{p(n-p)}$$

où ω_{n-p} est la forme Kählerienne canonique de $G_{n-p,n}$, et par suite

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_2^{2p}} \int_{\mathbb{B}(r_2)} S_k \wedge (dd^c |z|^2)^p &= \int_{\mathbb{B}(r_2) \setminus \{0\}} S_k \wedge (dd^c \log |z|^2)^p \\ &= \int_{\mathbb{B}(r_2) \setminus \{0\}} S_k \wedge \sigma_* \pi^* \omega_{n-p}^{p(n-p)} \\ &= \int_{\sigma^{-1}(\mathbb{B}(r_2))} \sigma^* S_k \wedge \pi^* \omega_{n-p}^{p(n-p)}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_2^{2p}} \int_{\mathbb{B}(r_1)} S \wedge (dd^c |z|^2)^p &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{r_2^{2p}} \int_{\mathbb{B}(r_2)} S_k \wedge (dd^c |z|^2)^p \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_{\sigma^{-1}(\mathbb{B}(r_2))} \sigma^* S_k \wedge \pi^* \omega_{n-p}^{p(n-p)} \\ &\leq \int_{\sigma^{-1}(\mathbb{B}(r))} \sigma^* S \wedge \pi^* \omega_{n-p}^{p(n-p)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\sigma^{-1}(\mathbb{B}(r_1))} \sigma^* S \wedge \pi^* \omega_{n-p}^{p(n-p)} &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\sigma^{-1}(\mathbb{B}(r_2))} \sigma^* S_k \wedge \pi^* \omega_{n-p}^{p(n-p)} \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{r_2^{2p}} \int_{\mathbb{B}(r_2)} S_k \wedge (dd^c |z|^2)^p \\ &\leq \frac{1}{r_2^{2p}} \int_{\mathbb{B}(r)} S \wedge (dd^c |z|^2)^p. \end{aligned}$$

Si on tend $r_1 \rightarrow r$ (r en dehors d'un ensemble au plus dénombrable), on obtient

$$\frac{1}{r^{2p}} \int_{\mathbb{B}(r)} S \wedge (dd^c |z|^2)^p = \int_{\sigma^{-1}(\mathbb{B}(r))} \sigma^* S \wedge \pi^* \omega_{n-p}^{p(n-p)}.$$

Et d'après la formule de tranchage on a

$$\int_{\sigma^{-1}(\mathbb{B}(r))} \sigma^* S \wedge \pi^* \omega_{n-p}^{p(n-p)} = \int_{L \in G_{n-p,n}} \left(\int_{L \cap \mathbb{B}(r)} S|_L \right) \omega_{n-p}^{p(n-p)}.$$

$$\text{D'où } \frac{1}{r^{2p}} \int_{\mathbb{B}(r)} S \wedge (dd^c |z|^2)^p = \int_{L \in G_{n-p,n}} \left(\int_{L \cap \mathbb{B}(r)} S|_L \right) \omega_{n-p}^{p(n-p)}. \quad \square$$

Remarque 1. Dans le cas des courants positifs fermés, la formule de Crofton est démontré par Siu [9] en 1974. Une question naturelle se pose: A-t-on une formule pareille pour les courants positifs plurisousharmoniques?

Lemme 2 [5]. Soit S un courant positif pluriharmonique de bidimension (p, p) sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{C}^n . Soit f une fonction psh, $f \geq -1$ de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{O} telle que $\mathcal{O}' = \{z \in \mathcal{O}; f(z) < 0\}$ soit relativement compact dans \mathcal{O} . Si K un compact de \mathcal{O}' , on pose $c_K = -\sup_{z \in K} f(z)$.

Alors pour tout entier $1 \leq s \leq p$ et pour toute fonction g psh de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{O}' vérifiant $-1 \leq g < 0$ on a:

$$\int_K S \wedge (dd^c g)^p \leq c_K^{-s} \int_{\mathcal{O}'} S \wedge (dd^c f)^s \wedge (dd^c g)^{p-s}.$$

Si S est de classe \mathcal{C}^2 alors le lemme reste vrai en omettant l'hypothèse de régularité de f et g .

Démonstration (du Théorème 1). On procède par récurrence sur q .

- $q = 1$: Soit T un courant positif pluriharmonique de bidimension $(n-1, n-1)$ sur \mathbb{C}^n et $E \subset \Omega_T \subset \mathbb{P}^{n-1}$ de mesure non nulle. Si $w \in \mathbb{P}^{n-1}$, on note L_w l'hyperplan de \mathbb{C}^n , d'équation $w_1 z_1 + \dots + w_n z_n = 0$ et $[L_w]$ le courant d'intégration sur L_w . La fonction $f_w(z) = \frac{w_1 z_1 + \dots + w_n z_n}{|w|}$ est psh sur \mathbb{C}^n et $[L_w] = dd^c \log |f_w|$. Soit v la fonction définie sur \mathbb{C}^n par

$$v(z) = \int_{\mathbb{P}^{n-1}} \log |f_w(z)| d\mu_E(w) \quad \text{ou} \quad \mu_E = \frac{1}{\mu(E)} \mu|_E$$

alors v est psh sur \mathbb{C}^n qui vérifie $\log |z| - \eta \leq v(z) \leq \log |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ où $\eta > 0$ est une constante.

Soit χ_j un noyau régularisant qui ne dépend que de $|z|$ sur \mathbb{C}^n , on note par $T_j = T * \chi_j$ le régularisé de T qui est un courant positif pluriharmonique de classe C^∞ sur \mathbb{C}^n .

Fixons $r > 0$ et soit $1 < \delta < 2$. Soit ϕ la fonction psh sur \mathbb{C}^n définie par $\phi(z) = \max(-1, v(z) - \log(\delta r))$.

Le Lemme 2, appliqué à $\mathcal{O} = \mathbb{C}^n$ et $\mathcal{O}' = \{z \in \mathbb{C}^n; \phi(z) < 0\}$ qui est inclus dans $\mathbb{B}(\delta r e^\eta)$, donne

$$\int_{|z| \leq r} T_j \wedge \beta^{n-2} \wedge dd^c \left(\left| \frac{z}{\delta r e^\eta} \right|^2 - 1 \right) \leq \frac{1}{\log \delta} \int_{|z| \leq \delta r e^\eta} T_j \wedge \beta^{n-2} \wedge dd^c \phi$$

et par suite

$$\int_{|z| < r} T_j \wedge \beta^{n-1} \leq r^2 \frac{\delta^2 e^{2\eta}}{\log \delta} \int_{|z| \leq \delta r e^\eta} T_j \wedge \beta^{n-2} \wedge dd^c v.$$

Soient $0 < c_2 < \delta e^\eta$ et ψ une fonction C^∞ sur \mathbb{C}^n vérifiant $\mathbb{1}_{\mathbb{B}(\delta e^\eta r)} \leq \psi \leq \mathbb{1}_{\mathbb{B}(\frac{c_2}{\delta})}$. On pose

$$\begin{aligned} - c_1 &= \frac{\mu(E) \log \delta}{\delta^2 e^{2\eta}} \\ - A_T &:= \{r > 0; \|T\|(\partial \mathbb{B}(r)) > 0 \text{ ou } \|T\|(\partial \mathbb{B}(\delta r)) > 0\} \end{aligned}$$

A_T est au plus dénombrable et pour $r \notin A_T$, par passage à la limite quand $j \rightarrow +\infty$, le théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} \int_{|z| < r} T \wedge \beta^{n-1} &\leq \frac{\mu(E)}{c_1} r^2 \int_{\mathbb{C}^n} \psi T \wedge \beta^{n-2} \wedge dd^c v \\ &= \frac{r^2}{c_1} \int_E \int_{\mathbb{C}^n} \psi T \wedge dd^c \log |f_w| \wedge \beta^{n-2} d\mu(w) \\ &\leq \frac{r^2}{c_1} \int_E \int_{|z| < \frac{1}{c_2} r} T \wedge [L_w] \wedge \beta^{n-2} d\mu(w). \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat pour le cas $q = 1$.

- Supposons que le résultat est vrai à l'ordre $q \geq 1$, c'est à dire sur $G_{q,n}$, et prouvons le à l'ordre $q + 1$. L'idée est de ramener le problème de $G_{q+1,n}$ vers $G_{q,n}$, pour cela, on considère l'ensemble:

$$Y_{q,n} = \{(L, A) \in G_{q,n} \times G_{q+1,n}; L \subset A\}$$

et les projections canoniques:

$$\begin{array}{ccccc} G_{q,n} & \xleftarrow{f} & Y_{q,n} & \xrightarrow{g} & G_{q+1,n} \\ \pi_q \uparrow & & & & \uparrow \pi_{q+1} \\ X_{q,n} & \xrightarrow{\sigma_q} & \mathbb{C}^n & \xleftarrow{\sigma_{q+1}} & X_{q+1,n} \end{array}$$

On muni $Y_{q,n}$ de la forme Kählerienne $\omega = g^* \omega_q + f^* \omega_{q+1}$ et donc de la mesure de Fubini-Study correspondante m . On vérifie que $g_* m \otimes \mu_{q+1} = \mu_q \otimes f_* m$, de plus la valeur $\kappa = m(g^{-1}(A)) = m(f^{-1}(L))$ est indépendante de $L \in G_{q,n}$ μ_q -presque partout et de $A \in G_{q+1,n}$ μ_{q+1} -presque partout.

On a $\sigma_q^* T$ est un courant positif de dimension $p + (q - 1)(n - q)$ sur $X_{q,n}$, de même $\sigma_{q+1}^* T$ est un courant positif de dimension $p + q(n - q - 1)$ sur $X_{q+1,n}$.

Soit $A \in E \subset \Omega_T = G_{q+1,n} \setminus E_T$.

On remarque que $G_{q,q+1}(A) = f(g^{-1}(A))$, et comme $T|_A$ est positif pluriharmonique, d'après le Lemme 1, on a

$$v_{T|_A}(r) = \int_{L \in f(g^{-1}(A))} v_{T|_L}(r) d(f_* m)(L)$$

d'après Fubini on a,

$$\begin{aligned} \int_E v_{T|_A}(r) d\mu_{q+1}(A) &= \int_E \left(\int_{L \in f(g^{-1}(A))} v_{T|_L}(r) d(f_* m)(L) \right) d\mu_{q+1}(A) \\ &= \int_{L \in f(g^{-1}(E))} \left(\int_{A \in g(f^{-1}(L))} v_{T|_L}(r) d(g_* m)(A) \right) d\mu_q(L) \\ &= \kappa \int_{f(g^{-1}(E))} v_{T|_L}(r) d\mu_q(L). \end{aligned}$$

Comme $f(g^{-1}(E))$ est de mesure non nulle dans $G_{q,n}$, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que

$$c_1 v_T(c_2 r) \leq \int_{f(g^{-1}(E))} v_{T|_L}(r) d\mu_q(L).$$

Donc

$$\kappa c_1 v_T(c_2 r) \leq \int_E v_{T|_A}(r) d\mu_{q+1}(A).$$

□

2.3 - Applications du Théorème 1

Le résultat suivant est une illustration des résultats précédents sur les courants positifs pluriharmoniques d'ordres finis.

Théorème 2. *Soit T un courant positif pluriharmonique de bidimension (p, p) et d'ordre ρ fini sur \mathbb{C}^n . Alors pour presque tout $L \in G_{q,n}$, $T|_L$ est d'ordre ρ_L égal à ρ .*

Démonstration. La démonstration se fait en deux étapes.

Première étape: $\rho_L \geq \rho$, μ -presque partout.

Par définition, il existe une suite $(r_m)_m$ croissante vers l'infinie telle que $\log(v_T(r_m)) \cdot (\log(r_m))^{-1} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \rho$. On considère alors l'ensemble

$$E = \left\{ L \in \Omega_T; \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{v_{T|_L}(\alpha r_m)}{v_T(r_m)} = 0, \text{ pour tout } \alpha > 0 \right\} \cup \Omega_T^c$$

qui est de mesure nulle (d'après le Corollaire 2). Pour $L \notin E$, il existe $\alpha_0 > 0$, une sous suite, notée de même $(r_m)_m$, tels que $\limsup_{m \rightarrow +\infty} v_{T|_L}(\alpha_0 r_m)/v_T(r_m) = \alpha_L \in]0, +\infty]$. Or

$$\frac{\log v_{T|_L}(\alpha_0 r_m)}{\log(\alpha_0 r_m)} = \frac{\log v_{T|_L}(\alpha_0 r_m) - \log(v_T(r_m))}{\log(\alpha_0 r_m)} + \frac{\log v_T(r_m)}{\log r_m} \times \frac{\log r_m}{\log(\alpha_0 r_m)}.$$

Le terme de gauche de cette égalité admet une limite-supérieure plus petite que ρ_L quand m tend vers $+\infty$, alors que le deuxième terme de droite tend vers ρ .

Dans le cas où $\alpha_L < +\infty$,

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{\log v_{T|_L}(\alpha_0 r_m) - \log(v_T(r_m))}{\log(\alpha_0 r_m)} = \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{v_{T|_L}(\alpha_0 r_m)}{v_T(r_m)}\right)}{\log(\alpha_0 r_m)} = 0.$$

Dans l'autre cas, $\alpha_L = +\infty$, on a pour m suffisamment grand,

$$\frac{\log v_{T|_L}(\alpha_0 r_m)}{\log(\alpha_0 r_m)} \geq \frac{\log v_T(r_m)}{\log r_m} \times \frac{\log r_m}{\log(\alpha_0 r_m)}.$$

Donc $\rho_L \geq \rho$.

Deuxième étape: $\rho_L \leq \rho$, μ -presque partout.

Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ et $\gamma > 1$ fixé, on pose

$$\mathcal{E}_{\varepsilon,k} = \left\{ L \in G_{q,n}; v_{T_L}(\gamma^k) > (\log \gamma^k)^{1+(\log(\log \gamma^k))^{\varepsilon-1}} v_T(\gamma^k) \right\}, k \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{E}_{\varepsilon,k})(\log \gamma^k)^{1+(\log(\log \gamma^k))^{\varepsilon-1}} v_T(\gamma^k) &\leq \int_{\mathcal{E}_{\varepsilon,k}} v_{T_L}(\gamma^k) d\mu(L) \\ &\leq \int_{G_{q,n}} v_{T_L}(\gamma^k) d\mu(L) \\ &\leq v_T(\gamma^k). \end{aligned}$$

Par suite

$$\mu(\mathcal{E}_{\varepsilon,k}) \leq (\log \gamma^k)^{-1-(\log(\log \gamma^k))^{\varepsilon-1}}.$$

Posons $\mathcal{E}_\varepsilon = \bigcap_{j \geq 1} \bigcup_{k \geq j} \mathcal{E}_{\varepsilon,k}$. Puisque

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\log k)^2 (\log \gamma^k)^{-1-(\log(\log \gamma^k))^{\varepsilon-1}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\log k)^2 \exp \{ -(\log(\log \gamma^k))^\varepsilon \} = 0$$

alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\log \gamma^k)^{-1-(\log(\log \gamma^k))^{\varepsilon-1}} < +\infty$$

et donc $\mu(\mathcal{E}_\varepsilon) = 0$. Pour $L \notin \mathcal{E}_\varepsilon$, il existe k_L tel que pour $k \geq k_L$,

$$v_{T_L}(\gamma^k) \leq (\log \gamma^k)^{1+(\log(\log \gamma^k))^{\varepsilon-1}} v_T(\gamma^k).$$

Si r est tel que $\gamma^{k-1} \leq r \leq \gamma^k$ alors

$$(2.1) \quad v_{T_L}(r) \leq (\log \gamma r)^{1+(\log(\log \gamma r))^{\varepsilon-1}} v_T(\gamma r)$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \rho_L &:= \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log v_{T_L}(r)}{\log r} \\ &\leq \limsup_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{(1 + (\log(\log r))^{\varepsilon-1}) \log(\log \gamma r)}{\log r} + \frac{\log v_T(\gamma r)}{\log r} \right) \\ &\leq \rho. \end{aligned}$$

□

Définition 2. Une fonction dérivable $\rho :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ est appelée *ordre précisé* si elle admet une limite finie ρ à l'infini et

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho'(r) \cdot r \log r = 0.$$

Un courant positif pluriharmonique T d'ordre ρ fini est dit de *type minimal* (resp. *normal*, *maximal*) par rapport à un ordre précisé $\rho(r)$, où $\rho(r) \rightarrow \rho$, si la limite

$$\sigma(T) := \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{v_T(r)}{r^{\rho(r)}} = 0 \text{ (resp. } \sigma(T) \in]0, +\infty[, \sigma(T) = +\infty).$$

Comme conséquence des résultats précédents on généralise, au courant positif pluriharmonique sur $G_{q,n}$, un résultat démontré par Gruman [8] pour les ensembles analytiques et par Amamou-Ben Farah [2] pour les courants positifs fermés sur $\mathbb{P}^{n-1} = G_{1,n}$.

Corollaire 4. Soit T un courant positif pluriharmonique de bidimension (p, p) sur \mathbb{C}^n d'ordre ρ fini et de type normal par rapport à un ordre précisé $\rho(r)$. Alors pour presque tout $L \in G_{q,n}$, $T|_L$ est de type normal ou maximal par rapport à $\rho(r)$.

Démonstration. Pour alléger l'écriture on note par $\sigma := \sigma(T)$ et $\sigma_L := \sigma(T|_L)$. Par hypothèse, il existe une suite $(r_m)_m$ croissante vers $+\infty$ telle que $v_T(r_m) \cdot r^{-\rho(r_m)} \rightarrow \sigma$. Soit

$$E = \left\{ L \in \Omega_T; \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{v_{T|_L}(\alpha r_m)}{v_T(r_m)} = 0, \text{ pour tout } \alpha > 0 \right\} \cup \Omega_T^c.$$

D'après le Corollaire 2, E est de mesure nulle. Pour $L \notin E$, quitte à extraire une sous suite de $(r_m)_m$, il existe $\alpha_0 > 0$ tel que $\alpha_L := \limsup_{m \rightarrow +\infty} v_{T|_L}(\alpha_0 r_m) / v_T(r_m) \in]0, +\infty]$.

$$(2.2) \quad \underbrace{\frac{v_{T|_L}(\alpha_0 r_m)}{(\alpha_0 r_m)^{\rho(\alpha_0 r_m)}}}_{Q_1(m)} = \underbrace{\frac{v_{T|_L}(\alpha_0 r_m)}{v_T(r_m)}}_{Q_2(m)} \underbrace{\frac{v_T(r_m)}{r_m^{\rho(r_m)}}}_{Q_3(m)} \underbrace{r_m^{\rho(r_m) - \rho(\alpha_0 r_m)}}_{Q_4(m)} \underbrace{\frac{1}{\alpha_0^{\rho(\alpha_0 r_m)}}}_{Q_5(m)}.$$

Si $m \rightarrow +\infty$, la première quantité $Q_1(m)$ admet une limite-supérieure inférieure ou égale à σ_L , $Q_2(m)$ tend vers α_L , $Q_3(m)$ tend vers σ et $Q_5(m)$ tend vers $\alpha_0^{-\rho}$. Pour $Q_4(m)$, le cas $\alpha_0 = 1$ est évident, dans l'autre cas, d'après le théorème des accroissements finis, il existe c_m entre r_m et $\alpha_0 r_m$ tel que

$$\log(Q_4(m)) = (\rho(r_m) - \rho(\alpha_0 r_m)) \log r_m = \rho'(c_m)(1 - \alpha_0)r_m \log r_m$$

donc pour m suffisamment grand il existe une constante $Cte \geq 0$ tel que

$$|\log(Q_4(m))| \leq Cte \cdot |\rho'(c_m)c_m \log c_m|$$

et par suite $\log(Q_4(m)) \rightarrow 0$ si $m \rightarrow +\infty$. En effet:

- Si $\alpha_0 > 1$, on a $r_m < c_m$ donc $r_m \log r_m \leq c_m \log c_m$ et on peut prendre $Cte = \alpha_0 - 1$.
- Si $\alpha_0 < 1$, on a $\alpha_0 r_m < c_m < r_m$ donc

$$r_m \log r_m = c_m \log c_m \cdot \frac{r_m \log r_m}{c_m \log c_m} \leq c_m \log c_m \frac{\log r_m}{\alpha_0 \log(\alpha_0 r_m)}$$

et, pour m suffisamment large, on peut choisir $Cte = 2(1 - \alpha_0)/\alpha_0$.

Si on tend $m \rightarrow +\infty$ l'équation (2.2) donne $\sigma_L \geq \alpha_L \sigma / \alpha_0^\rho$ et donc $T|_L$ est au moins de type normal par rapport à $\rho(r)$. \square

Remarque 2.

- S'il existe un Borélien E de mesure non nulle de $G_{q,n}$ et une constante $b > 0$ telle que pour presque tout $L \in E$ on ait $T|_L$ est de type $\sigma_L \leq b$ par rapport à un ordre précisé $\rho(r)$ alors T est de type fini par rapport à l'ordre précisé $\rho(r)$.

En effet, d'après le Théorème 1, il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que pour $r > 0$ (suffisamment grand) on ait

$$\begin{aligned} \frac{v_T(r)}{r^{\rho(r)}} &\leq c_1 \int_E \frac{v_{T|_L}(c_2 r)}{(c_2 r)^{\rho(c_2 r)}} r^{\rho(c_2 r) - \rho(r)} c_2^{\rho(c_2 r)} d\mu(L) \\ &\leq c_1 b \mu(E) r^{\rho(c_2 r) - \rho(r)} c_2^{\rho(c_2 r)}. \end{aligned}$$

De plus, d'après la démonstration du Corollaire 4, le terme de droite de cette inégalité admet une limite finie ($= c_1 b \mu(E) c_2^\rho$) quand $r \rightarrow +\infty$.

- On a prouvé que

$$\left\{ L \in \Omega_T; \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{v_{T|_L}(\alpha r_m)}{v_T(r_m)} = +\infty \forall \alpha > 0 \right\} \subset \{L \in \Omega_T; \sigma_L = +\infty\}$$

et on a le premier ensemble est de mesure nulle (voir le Lemme 3 suivant). A-t-on l'ensemble $\{L \in G_{q,n} \setminus E_0; \sigma_L = +\infty\}$ est aussi de mesure nulle? c'est à dire que $T|_L$ est-il aussi de type normal par rapport à $\rho(r)$, μ -presque partout?

Lemme 3. *Avec les mêmes notations du Corollaire 4, l'ensemble*

$$\mathcal{A}_\infty := \left\{ L \in \Omega_T; \exists \alpha_L > 0, \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{v_{T|_L}(\alpha_L r_m)}{v_T(r_m)} = +\infty \right\}$$

est de mesure nulle.

Démonstration. Pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble

$$A_s := \left\{ L \in \Omega_T; \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{v_T(r_m)}{v_{T|_L}(s r_m)} = 0 \right\}.$$

Si $L \in \mathcal{A}_\infty$ alors pour tout $s \geq \alpha_L$, on a $L \in A_s$. Donc $\mathcal{A}_\infty \subset \cup_{s \in \mathbb{N}^*} A_s$. Par suite pour montrer que $\mu(\mathcal{A}_\infty) = 0$ il suffit de montrer que $\mu(A_s) = 0$ pour tout $s \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe $s_0 > 0$ tel que A_{s_0} soit de mesure $\mu(A_{s_0}) > 0$. On a pour tout $L \in A_{s_0}$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} v_T(r_m)/v_{T|_L}(s_0 r_m) = 0$. D'après le théorème d'Egorov, on peut supposer que la convergence de cette suite vers 0 est uniforme sur A_{s_0} . Soit $\varepsilon > 0$, il existe $m_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $m \geq m_\varepsilon$ on a

$$(2.3) \quad \frac{v_T(r_m)}{v_{T|_L}(s_0 r_m)} \leq \varepsilon \quad \forall L \in A_{s_0}.$$

D'autre part, d'après le Lemme 1, pour tout $m > 0$ on a

$$\int_{A_{s_0}} v_{T|_L}(s_0 r_m) d\mu(L) \leq \int_{G_{q,n}} v_{T|_L}(s_0 r_m) d\mu(L) = v_T(s_0 r_m).$$

Donc

$$(2.4) \quad \int_{A_{s_0}} \frac{v_{T|_L}(s_0 r_m)}{v_T(s_0 r_m)} d\mu(L) \leq 1.$$

Les deux inégalités (2.3) et (2.4) donnent, pour tout $m \geq m_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \mu(A_{s_0}) \frac{v_T(r_m)}{v_T(s_0 r_m)} &= \int_{A_{s_0}} \frac{v_T(r_m)}{v_T(s_0 r_m)} d\mu(L) \\ &= \int_{A_{s_0}} \frac{v_T(r_m)}{v_{T|_L}(s_0 r_m)} \frac{v_{T|_L}(s_0 r_m)}{v_T(s_0 r_m)} d\mu(L) \\ &\leq \varepsilon \int_{A_{s_0}} \frac{v_{T|_L}(s_0 r_m)}{v_T(s_0 r_m)} d\mu(L) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

c'est à dire que $\lim_{m \rightarrow +\infty} v_T(r_m)/v_T(s_0 r_m) = 0$. Donc

$$\begin{aligned} \sigma &:= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{v_T(r_m)}{r_m^{\rho(r_m)}} \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{v_T(r_m)}{v_T(s_0 r_m)} \times \frac{v_T(s_0 r_m)}{(s_0 r_m)^{\rho(s_0 r_m)}} \times s_0^{\rho(s_0 r_m)} \times r_m^{\rho(s_0 r_m) - \rho(r_m)} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui est absurde car $\sigma > 0$. □

Modulo une petite perturbation, il existe un ordre précisé $\chi(r)$ par rapport auquel T ainsi que $T|_L$, pour presque tout $L \in G_{q,n}$, sont de types minimales et c'est donné par le lemme suivant:

Lemme 4. *Si T est de type normal par rapport à un ordre précisé $\rho(r)$ alors pour presque tout $L \in G_{q,n}$, $T|_L$ est de type fini (minimal ou normal) par rapport à l'ordre précisé*

$$\chi(r) = \begin{cases} \rho(r) + \frac{\log(\log(e-1+r))}{\log r} & \text{si } r \neq 1 \\ \rho(1) + \frac{1}{e} & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

En particulier, si T est de type minimal par rapport à $\rho(r)$ alors T et $T|_L$, pour presque tout $L \in G_{q,n}$, sont de types minimales par rapport à $\chi(r)$.

Démonstration. Vérifiant d'abord que $\chi(r)$ est bien un ordre précisé. En effet χ est dérivable sur $]0 + \infty[$ et on a $\chi(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \rho$ et

$$\chi'(r) = \rho'(r) + \frac{1}{(e-1+r)\log r} \frac{1}{\log(e-1+r)} - \frac{1}{r\log r} \frac{\log(\log(e-1+r))}{\log(r)}$$

donc $r \log(r) \chi'(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$.

D'après l'inégalité (2.1), pour tout $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$, en prenant $\varepsilon = 1/s$ et $\gamma = 1 + 1/s$, il existe un ensemble négligeable \mathcal{F}_s de $G_{q,n}$ vérifiant pour tout $L \notin \mathcal{F}_s$,

$$v_{T|_L}(r) \leq v_T \left(\left(1 + \frac{1}{s}\right)r \right) \left(\log \left(1 + \frac{1}{s}\right)r \right)^{1+(\log(\log r))^{-1+1/s}}.$$

Soit $\mathcal{F} := \cup_{s \geq 2} \mathcal{F}_s$. Alors \mathcal{F} est négligeable et pour tout $L \notin \mathcal{F}$ on a

$$v_{T|_L}(r) \leq v_T \left(\left(1 + \frac{1}{s}\right)r \right) \left(\log \left(1 + \frac{1}{s}\right)r \right)^{1+(\log(\log r))^{-1+1/s}} \quad \forall s \geq 2.$$

Comme la fonction v_T est semi-continue supérieurement, si on fait tendre s vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente on obtient

$$v_{T|_L}(r) \leq (\log r)^{1+1/\log(\log r)} v_T(r) = e \log(r) v_T(r).$$

Par suite

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{v_{T|_L}(r)}{r^{\chi(r)}} \leq \limsup_{r \rightarrow +\infty} e \log(r) \frac{v_T(r)}{r^{\rho(r)} \log(e-1+r)} = e\sigma(T).$$

□

3 - Ordres directionnels

Dans cette section on s'intéresse au ordres (et ordres directionnels) des courants positifs de bidegré (k, k) dans $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ où $k \leq n$; on utilise alors les notations $\beta_z = dd^c |z|^2$, $\beta_t = dd^c |t|^2$, $\alpha_z = dd^c \log |z|^2$ et $\alpha_t = dd^c \log |t|^2$ pour tout $(z, t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$.

On a besoin du lemme de type Lelong-Jensen suivant:

Lemme 5 [6]. *Soient T un courant positif plurisousharmonique de bidegré (k, k) dans $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ où $k < n$ et D un borélien relativement compact de \mathbb{C}^m . Alors pour tous $0 < r_1 < r_2$,*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_2^{2(n-k)}} \int_{\mathbb{B}_n(r_2) \times D} T \wedge \beta_z^{n-k} \wedge \beta_t^m - \frac{1}{r_1^{2(n-k)}} \int_{\mathbb{B}_n(r_1) \times D} T \wedge \beta_z^{n-k} \wedge \beta_t^m \\ &= \int_{\mathbb{B}_n(r_1, r_2) \times D} T \wedge \alpha_z^{n-k} \wedge \beta_t^m \\ & \quad + \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{s^{2(n-k)}} - \frac{1}{r_2^{2(n-k)}} \right) s ds \int_{\mathbb{B}_n(s) \times D} dd^c T \wedge \beta_z^{n-k-1} \wedge \beta_t^m \\ & \quad + \left(\frac{1}{r_1^{2(n-k)}} - \frac{1}{r_2^{2(n-k)}} \right) \int_0^{r_1} s ds \int_{\mathbb{B}_n(s) \times D} dd^c T \wedge \beta_z^{n-k-1} \wedge \beta_t^m. \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction

$$r \mapsto \mathcal{N}_{(T,D)}(r) := \frac{1}{r^{2(n-k)}} \int_{\mathbb{B}_n(r) \times D} T \wedge \beta_z^{n-k} \wedge \beta_t^m$$

est positive et croissante, ce qui explique l'existence du nombre de Lelong directionnel, $\mathcal{N}_{(T,D)}(0) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \mathcal{N}_{(T,D)}(r)$, de T en 0 par rapport à D suivant la direction de \mathbb{C}^n . On définit alors l'ordre directionnel de T par rapport à D , suivant la direction de \mathbb{C}^n , par:

$$\rho_{(T,D)} = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathcal{N}_{(T,D)}(r)}{\log r}.$$

Proposition 1. *Soient T un courant positif plurisousharmonique de bidegré (k, k) sur $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ où $k < n$ et D un borélien relativement compact de \mathbb{C}^m . Si T est d'ordre ρ fini alors T est d'ordre directionnel $\rho_{(T,D)}$ fini qui vérifie $\rho_{(T,D)} \leq 2m + \rho$.*

Démonstration. Si $\delta > 1$ alors il existe r suffisamment grand tel que $\mathbb{B}_n(r) \times D \subset \mathbb{B}_N(\delta r)$.

$$\begin{aligned} (\delta r)^{2m} \nu_T(\delta r) &= \frac{1}{(\delta r)^{2(n-k)}} \int_{\mathbb{B}_N(\delta r)} T \wedge (\beta_z + \beta_t)^{N-k} \\ &\geq \frac{1}{(\delta r)^{2(n-k)}} \int_{\mathbb{B}_n(r) \times D} T \wedge \beta_z^{n-k} \wedge \beta_t^m \\ &\geq \delta^{-2(n-k)} \mathcal{N}_{(T,D)}(r). \end{aligned}$$

Donc $\frac{\log [(\delta r)^{2m} \nu_T(\delta r)]}{\log r} \geq \frac{\log (\delta^{-2(n-k)} \mathcal{N}_{(T,D)}(r))}{\log r}$ et en passant à la limite supérieure quand r tend vers $+\infty$, on obtient $2m + \rho \geq \rho_{(T,D)}$ et la proposition est prouvée. \square

Dans la suite on s'intéresse à la réciproque, à savoir la question suivante : si T est d'ordre directionnel fini, a-t-on que T est d'ordre fini? Une réponse partielle positive est donnée par le Théorème 3; pour le citer on a besoin de quelques notions: Pour B un borélien relativement compact de \mathbb{C}^n , on définit de la même manière l'ordre directionnel de T par rapport à B suivant la direction de \mathbb{C}^m comme étant $\rho_{(B,T)} := \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathcal{M}_{(B,T)}(r)}{\log r}$ où $\mathcal{M}_{(B,T)}(r) = \frac{1}{r^{2(m-k)}} \int_{B \times \mathbb{B}_m(r)} T \wedge \beta_z^n \wedge \beta_t^{m-k}$. Le lemme suivant sera utile pour la suite, et sa démonstration est analogue à celle du Lemme 2.

Lemme 6. *Soient S un courant positif de dd^c -négatif de bidegré (k, k) sur $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ où $k < n$ et D un borélien relativement compact de \mathbb{C}^m . Soit f une fonction psh, $f \geq -1$, de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{C}^n telle que $\mathcal{O}' = \{z \in \mathcal{O}; f(z) < 0\}$ soit relativement compact dans \mathcal{O} . Soit K un compact de \mathcal{O}' , on pose $c_K = -\sup_{z \in K} f(z)$.*

Alors pour tout entier $1 \leq s \leq n - k$ et pour toute fonction g psh de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{O}' vérifiant $-1 \leq g < 0$ on a:

$$\int_{K \times D} S \wedge (dd^c g)^{n-k} \wedge \beta_t^m \leq c_K^{-s} \int_{\mathcal{O}' \times D} S \wedge (dd^c f)^s \wedge (dd^c g)^{p-s} \wedge \beta_t^m.$$

Théorème 3. *Soit T un courant positif pluriharmonique de bidegré $(1, 1)$ sur $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ où $n, m > 1$. On suppose qu'il existe deux ouverts non vides relativement compacts D et D' de \mathbb{C}^n et \mathbb{C}^m respectivement tels que T soit*

d'ordres finis dans les directions de \mathbb{C}^m et \mathbb{C}^n par rapport à \overline{D} et $\overline{D'}$, alors T est d'ordre fini.

Démonstration. Pour $r > 0$ on a $\mathbb{B}_N(r) \subset K_r := \mathbb{B}_n(r) \times \mathbb{B}_m(r)$, donc

$$(3.1) \quad \begin{aligned} v_T(r) &= \frac{1}{r^{2(n+m-1)}} \int_{\mathbb{B}_N(r)} T \wedge (\beta_z + \beta_t)^{n+m-1} \\ &\leq \frac{1}{r^{2(n+m-1)}} \int_{K_r} T \wedge (\beta_z + \beta_t)^{n+m-1}. \end{aligned}$$

Comme D est un ouvert non vide de \mathbb{C}^n , il existe une fonction psh u (la fonction extrémale de Siciak associé à \overline{D}) de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{C}^n telle que la mesure $(dd^c u)^n$ soit à support dans \overline{D} . De même il existe une fonction v psh de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{C}^m telle que la mesure $(dd^c v)^m$ soit portée par $\overline{D'}$. De plus elles vérifient $\max(\log|z|, -1) \leq u(z) \leq \log|z| + A$ pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ et $\max(\log|t|, -1) \leq v(t) \leq \log|t| + C$ pour tout $t \in \mathbb{C}^m$ où A et C sont deux constantes. Considérons $\varepsilon > 0$ et la fonction

$$w(z, t) = \left(\frac{u(z) - A}{\log(1 + 2r)} - 1 \right) + \left(\frac{v(t) - C}{\log(1 + 2r)} - 1 \right).$$

Alors w est une fonction psh de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{C}^N qui vérifie, pour r assez grand, $w > -\varepsilon$ sur le bord de K_{2r} . Donc l'ensemble $\mathcal{O} := \{(z, t) \in \mathbb{C}^N; w(z, t) + 2\varepsilon < 0\}$ est relativement compact dans K_{2r} . De plus $K_r \subset \subset \mathcal{O}$. Soient

$$c_r = - \sup_{(z,t) \in \overline{K_r}} w(z, t) = O\left(\frac{1}{\log(1 + 2r)}\right) \text{ et } g(z, t) = \frac{|z|^2 + |t|^2 - 4r^2}{4r^2}.$$

D'après le Lemme 2,

$$\begin{aligned} \int_{K_r} T \wedge (dd^c g)^{n+m-1} &\leq c_r^{-(n+m-1)} \int_{\mathcal{O}} T \wedge (dd^c w)^{n+m-1} \\ &\leq c_r^{-(n+m-1)} \int_{K_{2r}} T \wedge (dd^c w)^{n+m-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$(3.2) \quad \frac{1}{r^{2(n+m-1)}} \int_{K_r} T \wedge (\beta_z + \beta_t)^{n+m-1} \leq \theta(r) \Theta_T(2r).$$

où $\theta(r) = \left(\frac{4}{c_r \log(1 + 2r)} \right)^{n+m-1}$ et $\Theta_T(2r) = \int_{K_{2r}} T \wedge (dd^c(u + v))^{n+m-1}$. Comme

$c_r \log(1 + 2r)$ est bornée indépendamment de r , il existe $a > 0$ tel que $\theta(r) \leq a$ pour tout $r > 0$ (suffisamment grand). Par raison de degré,

$$\begin{aligned}
(3.3) \quad \Theta_T(2r) &= \int_{K_{2r}} T \wedge (dd^c(u+v))^{n+m-1} \\
&= C_{N-1}^m \int_{K_{2r}} T \wedge (dd^c u)^{n-1} \wedge (dd^c v)^m + C_{N-1}^n \int_{K_{2r}} T \wedge (dd^c u)^n \wedge (dd^c v)^{m-1} \\
&= C_{N-1}^m \int_{\mathbb{B}_n(2r) \times \overline{D}} T \wedge (dd^c u)^{n-1} \wedge (dd^c v)^m \\
&\quad + C_{N-1}^n \int_{\overline{D} \times \mathbb{B}_m(2r)} T \wedge (dd^c u)^n \wedge (dd^c v)^{m-1} \\
&\leq b_1 C_{N-1}^m \int_{\mathbb{B}_n(2r) \times \overline{D}} T \wedge (dd^c u)^{n-1} \wedge \beta_t^m \\
&\quad + b_2 C_{N-1}^n \int_{\overline{D} \times \mathbb{B}_m(2r)} T \wedge \beta_z^n \wedge (dd^c v)^{m-1}
\end{aligned}$$

où b_1 et b_2 sont deux constantes positives qui dépendent uniquement de D' et D respectivement.

Soient $f(z) = \frac{|z|^2 - (3r)^2}{(3r)^2}$ et $g_2(z) = \frac{u(z) - A - \log(3r)}{\log(\kappa r)}$ où $\kappa := 1 + 3e^{1+A}$, f est psh sur C^n , $-1 < f(z) < 0$ sur $\mathbb{B}_n(3r)$ et $-1 \leq g_2(z) < 0$ sur $\mathbb{B}_n(3r)$. Le Lemme 6 appliqué à f , g et $K = \overline{\mathbb{B}_n(2r)}$ donne

$$\int_{\mathbb{B}_n(2r) \times \overline{D}} T \wedge (dd^c g_2)^{n-1} \wedge \beta_t^m \leq \left(\frac{9}{5}\right)^{n-1} \int_{\mathbb{B}_n(3r) \times \overline{D}} T \wedge (dd^c f)^{n-1} \wedge \beta_t^m$$

on obtient donc

$$\int_{\mathbb{B}_n(2r) \times \overline{D}} T \wedge (dd^c u)^{n-1} \wedge \beta_t^m \leq \left(\frac{9}{5} \log(\kappa r)\right)^{n-1} \mathcal{N}_{(T, \overline{D})}(\mathbb{B}_n(3r)).$$

De la même façon on démontre que

$$\int_{\overline{D} \times \mathbb{B}_m(2r)} T \wedge \beta_z^n \wedge (dd^c v)^{m-1} \leq \left(\frac{9}{5} \log(\kappa r)\right)^{m-1} \mathcal{M}_{(\overline{D}, T)}(\mathbb{B}_m(3r)).$$

L'inégalité (3.3) donne

$$(3.4) \quad \int_{K_{2r}} T \wedge (dd^c(u+v))^{n+m-1} \\ \leq b_1 C_{N-1}^m \left(\frac{9}{5} \log(\kappa r) \right)^{m-1} \mathcal{M}_{(\overline{D}, T)}(3r) + b_2 C_{N-1}^m \left(\frac{9}{5} \log(\kappa r) \right)^{n-1} \mathcal{N}_{(T, \overline{D})}(3r).$$

D'après les inégalités (3.1), (3.2) et (3.4), on déduit que

$$v_T(r) \leq c_1 (\log(\kappa r))^{n-1} \mathcal{N}_{(T, \overline{D})}(3r) + c_2 (\log(\kappa r))^{m-1} \mathcal{M}_{(\overline{D}, T)}(3r)$$

où c_1, c_2 sont deux constantes positives. Un calcul simple montre alors que

$$\frac{\log(v_T(r))}{\log r} \leq \frac{\tau + N \log \log(\kappa r)}{\log r} + \max \left(\frac{\log(\mathcal{N}_{(T, \overline{D})}(3r))}{\log r}, \frac{\log(\mathcal{M}_{(\overline{D}, T)}(3r))}{\log r} \right)$$

et par passage à la limite supérieure quand r tend vers $+\infty$, on trouve $\rho \leq \max(\rho_{(T, \overline{D})}, \rho_{(\overline{D}, T)})$. \square

Remerciements. Nous remercions vivement les professeurs Jean-Pierre Demailly, Hassine El Mir et Hédi Ben Messaoud pour d'utiles conversations à propos ce travail.

Références

- [1] L. ALESSANDRINI and G. BASSANELLI, *Lelong numbers of positive plurisubharmonic currents*, Results Math. **30** (1996), 191-224.
- [2] M. AMAMOU and S. BEN FARAH, *Croissance de la trace d'un courant positif fermé sur les plans complexes de \mathbb{C}^n* , J. Math. Pures Appl. **84** (2005), 169-188.
- [3] H. BEN MESSAOUD and H. EL MIR, *Opérateur de Monge-Ampère et tranchage des courants positifs fermés*, J. Geom. Anal. **10** (2000), 139-168.
- [4] E. M. CHIRKA, *Complex analytic sets*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **46**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht 1989.
- [5] K. DABBEK, F. ELKHADHRA and H. EL MIR, *Extension of plurisubharmonic currents*, Math. Z. **245** (2003), 455-481.
- [6] I. FEKI, *Tranchage pour le prolongement de courants positifs fermés*, Thèse de Doctorat, Fac. des sciences de Tunis (1998), 1-42.
- [7] N. GHILOUFI and K. DABBEK, *Courants algébriques et courants de Liouville avec conditions sur les tranches*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **346** (2008), 277-282.

- [8] L. GRUMAN, *La géométrie globale des ensembles analytiques dans \mathbb{C}^n* , in “Séminaire Pierre Lelong-Henri Skoda (Analyse), Années 1978/79”, Lecture Notes in Math., **822**, Springer, Berlin 1980, 90-99.
- [9] Y. T. SIU, *Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents*, Invent. Math. **27** (1974), 53-156.

KHALIFA DABBEK, NOUREDDINE GHILOUFI

Département de Mathématiques

Faculté des sciences de Gabès

Université de Gabès

6033 Gabès Tunisie

e-mail: khalifa.dabbek@fsg.rnu.tn

e-mail: noureddine.ghiloufi@fsg.rnu.tn