Riv. Mat. Univ. Parma (7) 2 (2003), 63-68

MOHAMED EL KADIRI (*)

Sur les suites de fonctions finement harmoniques (**)

1 - Introduction

Il est bien connu que toute suite de fonctions harmoniques localement bornée sur un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$ contient une sous-suite qui converge uniformément localement vers une fonction harmonique. Ceci est dû au principe de Harnack pour les fonctions harmoniques positives.

Notre but dans ce travail est de montrer que ce résultat est vrai aussi pour les fonctions finement harmoniques dans un ouvert fin de $\boldsymbol{R}^n$. Plus précisemment nous allons établir le résultat suivant:

Théorème. *Soient U un ouvert fin de $\boldsymbol{R}^n$ et (h_n) une suite uniformément finement localement (i.e. au sens de la topologie fine) bornée de fonctions finement harmoniques dans U. Alors on peut extraire de (h_n) une sous-suite qui converge uniformément finement localement vers une fonction finement harmonique dans U.*

Corollaire. *Si (k_n) est une suite uniformément finement localement bornée de fonctions finement harmoniques dans un ouvert fin U de $\boldsymbol{R}^n$ qui converge presque partout (au sens de la mesure de Lebesgue) vers une fonction finement continue k, alors k est finement harmonique dans U et la convergence a lieu uniformément finement localement.*

(*) B.P. 726, Salé-Tabriquet, Salé, Morocco, e-mail: elkadiri@fsr.ac.ma

(**) Received 28th May 2003 and in revised form 26th September 2003. AMS classification 31 D 05.

Ces résultats sont vrais plus généralement dans un espace harmonique de Brelot vérifiant l'axiome (D); nous n'avons considéré le cas classique que pour des raisons de simplicité et nous indiquerons à la fin comment on peut faire l'extension au cas général. Nous ignorons toutefois si le théorème et son corollaire existent dans la littérature consacrée aux fonctions finement harmoniques.

Signalons qu'en général les fonctions finement harmoniques $\geqslant 0$ ne possèdent pas la propriété de Harnack. Pour le voir il suffit de considérer un ouvert borné D de $\boldsymbol{R}^n$ qui ne soit pas régulier et soit l'ouvert fin $U = D \cup \{z\}$ où z est un point irrégulier de ∂D. Soient Ω un domaine borné de $\boldsymbol{R}^n$ tel que $\overline{D} \subset \Omega$ et (z_n) une suite de points de $\Omega \setminus \overline{D}$ qui converge vers z. La suite des restrictions à U des fonctions $G_\Omega(.\,, z_n)$, finement harmoniques $\geqslant 0$ dans U, converge simplement dans U vers $G_\Omega(.\,, z)$ qui n'est pas finement harmonique dans U. Ici G_Ω est le noyau de Green de Ω.

Dans la suite U désigne un domaine fin de $\boldsymbol{R}^n$, $n \geqslant 2$, borné si $n = 2$, qu'on supposera régulier quitte à lui ajouter l'ensemble polaire des points irréguliers de sa frontière fine, ce qui ne change pas le cône $\mathcal{S}(U)$ des fonctions finement surharmoniques positives en vertu du principe de prolongement par continuité fine ([**4**], th. 9.14). On utilisera le mot fin (finement) pour distinguer les notions relatives à la topologie fine de celles relatives à la topologie initiale (euclidienne) de $\boldsymbol{R}^n$. Si f est une fonction de U dans $\overline{R}$, on note $\hat{f}$ la régularisée finement s.c.i. de f, i.e. la plus grande minorante finement s.c.i. de f dans U.

Dans [**7**], de la Pradelle a montré que le cône $\mathcal{S}(U)$ est exactement le cône des fonctions excessives finies presque partout (relativement à la mesure de Lebesgue) d'une famille résolvante de noyaux de Borel sur U absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Comme U est supposé régulier, c'est un K_σ de $\boldsymbol{R}^n$, donc un espace radonien, de sorte que l'on puisse appliquer les résultats de ([**2**], chap. XII).

2 - Démonstration des résultats

On rappelle qu'il existe une résolvante (V_λ) de noyaux sur U (muni de la tribu de Borel relative à la topologie initiale) telle que $\mathcal{S}(U)$ est le cône des fonctions excessive de (V_λ) (voir [**7**], th. 2.). Pour construire cette résolvante, il suffit de considérer une mesure de Radon positive σ équivalente à la mesure de Lebesgue dont le potentiel G^σ est continu et borné, où G est le noyau de Green de $\Omega = \boldsymbol{R}^n$ si $n \geqslant 3$ ou d'un domaine borné Ω de $\boldsymbol{R}^2$ contenant U si $n = 2$. Soient W_0 le noyau (borélien) défini sur Ω par

$$W_0 f(x) = \int G(x, y)\, f(y)\, d\sigma(y), \qquad \forall x \in \Omega$$

pour toute fonction boréilenne $f \geqslant 0$ sur Ω, et W le noyau sur Ω défini par

$$Wf = W_0 f - \widehat{R}^{CU}_{W_0 f}$$

pour toute fonction borélienne bornée $f \geqslant 0$ sur Ω.

Pour toute fonction f borélienne positive sur U, on pose

$$Vf = W\bar{f}\,|_U,$$

où $\bar{f}$ est le prolongement de f à Ω nul sur CU. Alors V vérifie le principe complet du maximum, c'est donc le noyau potentiel d'une résolvante (V_λ) sur U dont le cône des fonctions excessives est $\mathcal{S}(U) \cup \{+\infty\}$. Il est clair que la réstriction de la mesure de Lebesgue à U est une mesure de référence pour la résolvante (V_λ) (voir [**2**], chap. XII).

Lemme 1. *Soit* (u_n) *une suite de fonctions finement hyperharmoniques* $\geqslant 0$ *dans* U, *alors on peut en extraire une sous-suite qui converge presque partout vers une fonction finement hyperharmonique dans* U.

Démonstration. Le lemme résulte d'un lemme plus général dû à Deny (voir [**2**], chap. XII, no. 94) qui affirme que si (u_n) est une suite de fonctions excessives d'une résolvante basique et transiente alors on peut en extraire une sous-suite de fonctions qui converge presque partout pour une mesure de référence de cette résolvante.

Remarque. Ce résultat es plus général qu'un résultat de De la Pradelle qui affirme que si (E, τ) est un espace mesurable, τ est une mesure bornée $\geqslant 0$ séparable (i.e. $L^1(\tau)$ est séparable), et si (V_λ) et $(\widetilde{V}_\lambda)$ sont deux résolvantes sous-markoviennes achevées et en dualité par la formule

$$\int \phi V_\lambda \psi d\tau = \int \psi \widetilde{V}_\lambda \phi d\tau, \quad \phi, \psi \in L^\infty(\tau),$$

alors le cône des fonctions pseudo-excessives $\mathcal{H}^*$ de la résolvante (V_λ) est compact en τ-mesure ([**7**], th. 3). La démonstration du lemme de Deny dans [**2**] utilise des techniques de compactifications.

Lemme 2. *Si* (u_n) *est une suite uniformément finement localement bornée inférieurement de fonctions finement surharmoniques dans* U *qui converge pre-*

sque partout vers une fonction u finement surharmonique dans U alors on a

$$u = \lim \widehat{\inf} u_n.$$

Démonstration. En effet, on a $u = \lim \inf u_n$ p.p. D'autre part, la fonction $\lim \widehat{\inf} u_n$ est finement hyperharmonique dans U et ne diffère de $\lim \inf u_n$ que sur un ensemble polaire, on en déduit que $u = \lim \widehat{\inf} u_n$ p.p., donc partout.

Corollaire. *Soit (h_n) une suite uniformément finement localement bornée de fonctions finement harmoniques dans U qui converge presque parout vers une fonction finement harmonique h, alors (h_n) converge partout vers h.*

Démonstration. Quitte à se placer (finement) localement on peut supposer que les fonctions h_n sont majorées en valeur absolue par une même constante $c > 0$ dans U. Soit $x \in U$ et $(h_{n'})$ une sous-suite de (h_n) telle que la suite réelle $(h_{n'}(x))$ converge. D'après le Lemme 1, on peut extraire de $(h_{n'})$ une sous-suite $(h_{n''})$ telle que la suite $(c - h_{n''})$ converge presque partout vers une fonction finement hyperharmonique k. On a alors, d'après le Lemme 2, $h(x) \leqslant \lim \inf h_{n''}(x)$ et $k(x) \leqslant c - \lim \sup h_{n''}(x)$, soit $\lim \sup h_{n''}(x) \leqslant c - k(x)$. Or on a aussi $k = c - h$ presque partout, donc partout puisque deux fonctions finement hyperharmoniques égales presque partout sont égales partout. Il en résulte alors que $\lim \sup h_{n''}(x) \leqslant h(x) \leqslant \lim \inf h_{n''}(x)$, donc la suite $(h_{n''}(x))$ converge vers $h(x)$. Il en résulte finalement que la suite $(h_n(x))$ converge vers $h(x)$, d'où le résultat puisque x est arbitraire.

Démonstration du résultat principal. On peut supposer ici aussi que les fonctions h_n sont majorée en valeur absolue par une même constante $c > 0$ dans U. D'après ce qui précède on peut trouver une sous-suite (h_{n_j}) de (h_n) qui converge simplement vers une fonction h finement harmonique dans U. On a alors $h = \sup_k \widehat{\inf_{j \geqslant k}} h_{n_j}$. Pour tout entier k posons $v_k = \widehat{\inf_{j \geqslant k}} h_{n_j}$. C'est une fonction finemen surharmonique dans U. Soit $x \in U$, on peut trouver d'après la remarque du lemme 1 de [**6**] un voisinage fin K de x, compact en topologie initiale de $\boldsymbol{R}^n$, tel que les fonctions v_k, $k \in \boldsymbol{N}$, et h soient continues dans K. La suite (v_k) étant croissante et converge vers k, donc, d'après le lemme de Dini, la suite (v_k) converge uniformément vers h sur K. Soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier k_0 tel que

$$k > k_0 \Rightarrow \sup_{y \in K}(h(y) - v_k(y)) \leqslant \varepsilon ,$$

d'où

$$k > k_0 \Rightarrow \sup_{y \in K}(h(y) - h_{n_k}(y)) \leqslant \varepsilon$$

puisque $v_k \leqslant h_{n_k}$. Appliquant les arguments précédents à la suite $(-h_n)$ on peut trouver un voisinage fin K_1 de x, compact en topologie initiale de $\boldsymbol{R}^n$, tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier k_1 tel que

$$k > k_1 \Rightarrow \sup_{y \in K_1}(h_{n_k}(y) - h(y)) \leqslant \varepsilon \, .$$

On en déduit que la sous-suite (h_{n_k}) converge uniformément sur $K \cap K_1$ vers h. Le théorème est démontré.

3 - Extension au cas général des espaces de Brelot

Soit Ω un espace harmonique de Brelot vérifiant l'axiome (D) et admettant un potentiel > 0. Soit p_0 un potentiel strict fini et continu sur Ω. Alors il existe une famille résolvante (W_λ) sous-markovienne de noyaux boréliens sur Ω telle que

1. $W1 = p_0$, où W est le noyau potentiel de la résovante W_λ,
2. le cône $\mathcal{S}(\Omega) \cup \{+\infty\}$ est le cône des fonctions excessives de la résolvante (W_λ), où $\mathcal{S}(\Omega)$ est le cône des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ sur Ω (voir [**1**]).

Comme les fonctions excessives de la résolvante (W_λ) sont s.c.i., il résulte de ([**2**], chap. XII, no. 41) qu'il existe une mesure de Radon τ positive bornée sur Ω telle que la résolvante (W_λ) est de base τ. Le cône $\mathcal{S}(\Omega)$ est exactement le cône des fonctions excessives finies τ-p.p. de la résolvante (W_λ). La mesure τ ne charge pas les polaires et deux fonctions surharmoniques positives égales τ-p.p. sont égales partout.

Soit U un domaine fin (i.e. un ouvert fin finement connexe) de Ω. On construit comme plus haut à partir de (W_λ) une résolvante (V_λ) de noyaux boréliens sur U dont le cône des fonctions excessives est $\mathcal{S}(U) \cup \{+\infty\}$ (voir [**3**]). Comme la résolvante (V_λ) est subordnnée à (W_λ), on en déduit qu'elle est basique et transiente. L'ouvert fin U peut être supposé régulier quitte à lui ajouter les points irréguliers de sa frontière fine, donc un K_σ de Ω. C'est donc un espace radonien, ce qui permet là aussi d'appliquer les résultats du chapitre 12 de [**2**] comme on vient de le faire dans le cas de l'espace $\boldsymbol{R}^n$.

Réféences bibliographiques

[1] C. Constantinescu and A. Cornea, *Potential theory on harmonic spaces*, Springer Verlag, Heidelberg 1972.

[2] C. Dellacherie and P. A. Meyer, *Probabilités et potentiel*, Chap. XII à XVI, Hermann, Paris 1987.

[3] M. El Kadiri, *Fonctions séparément finement surharmoniques*, Positivity **7** (2003), 245-256.

[4] B. Fuglede, *Finely harmonic functions*, Lecture Notes in Math. **289**, Springer-Verlag, Berin-New York 1972.

[5] B. Fuglede, *Fine potential theory*, Lecture Notes in Math. **1344**, Springer, Berlin 1988, 199-201.

[6] B. Fuglede, *Finely harmonic mappings and finely holomorphic functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. A, I, Math. **2** (1976), 113-127.

[7] A. De La Pradelle, *Deux remarques sur la représentation intégrale des fonctions excessives ou surharmoniques*, Lecture Notes in Math. **814**, Springer, Berlin 1980, 229-239.

Summary

We prove that every uniformly finely locally bounded sequence of finely harmonic functions on a fine open set contains a subsequence which converges uniformly finely locally to a finely harmonic function.

* * *