Riv. Mat. Univ. Parma (6) **3*** (2000), 153-181

NICOLINA A. MALARA (*)

Un progetto di avvio al pensiero algebrico: esperienze, risultati, problemi (**)

In memoria di Francesco Speranza

Introduzione

La letteratura internazionale sui problemi di insegnamento/apprendimento dell'algebra sottolinea la crisi dell'insegnamento tradizionale. Numerosi studi indicano i principali ostacoli cognitivi per lo sviluppo del pensiero algebrico nell'usuale insegnamento dell'aritmetica, rivolto più ai risultati di processi di calcolo che agli aspetti relazionali e strutturali di questa (Kieran 1989, 1990, 1992). Altri enfatizzano le difficoltà della codifica formale del testo di problemi (MacGregor 1991, Bednarz & Janvier 1996) e, ad un livello più avanzato le difficoltà di gestione e controllo del linguaggio algebrico da un punto di vista logico (Bloedy-Vinner 1995). Altri ancora enfatizzano la mancanza di consapevolezza nel passaggio procedurale-strutturale (Sfard 1991, 1994) e di flessibilità e coordinamento tra i vari elementi di conoscenza che si sovrappongono nel tempo (Drouhard & Sackur 1997). Studi

---

(*) Dipartimento di Matematica Pura e Applicata G. Vitali, Università di Modena, Via Campi 213/b, 41100 Modena, Italia.

(**) Ricevuto il 16 Febbraio 2000. Classificazione AMS 97 C 30, 97 D 50. Ampliamento del lavoro omonimo pubblicato in spagnolo su *Revista EMA* vol. **5**, n. 1 (1999), 3-28 e in versione inglese più breve in Rogerson A. (a cura di) *Proc. International Conference on Mathematics Education into 21*st *Century: Societal Challenges, Issues and Approaches* (Cairo, Egitto, nov. 1999), vol. **2**, 68-78.

più recenti (Yerushalmy 1997, Kieran 1994, 1998) evidenziano come l'uso di software di visualizzazione grafica interattiva suggerisca una revisione dell'usuale percorso di insegnamento.

Con questa base teorica, in sintonia con il modello di sviluppo del pensiero algebrico di Arzarello & Altri (1992), abbiamo messo in atto un progetto sperimentale di innovazione per l'avvio al pensiero algebrico nella scuola media (1), tuttora in corso, che punta ad un approccio graduale e consapevole agli oggetti dell'algebra attraverso processi di matematizzazione. Il progetto vede due livelli di intervento: su (e con) gli insegnanti e gli allievi. Diversi di questi insegnanti seguono da parecchi anni le attività dei nuclei e tra essi ve ne sono alcuni ormai affermati anche come ricercatori, tanto da aver acquisito appunto la doppia professionalità di insegnante-ricercatore (IR). Si tratta dunque di insegnanti attenti, fortemente motivati e pronti a mettersi in gioco con piena consapevolezza (2).

Il progetto, come già accennato, riguarda un processo composto in cui vengono considerati:

– le credenze iniziali degli insegnanti, lo sviluppo di loro nuovi atteggiamenti e concezioni verso l'approccio all'algebra (grazie all'analisi critica degli studi del settore svolta congiuntamente al direttore della ricerca) e la ricaduta di ciò nelle scelte culturali e metodologiche dell'attività di classe;
– le interazioni tra direttore di ricerca ed insegnanti nella pianificazione comune degli interventi di classe e la costruzione di prove per testare opportune ipotesi di ricerca;
– lo studio congiunto (direttore e insegnanti) dei comportamenti degli allievi e l'analisi qualitativa delle loro produzioni;
– le ricadute sul versante dell'innovazione nelle classi e delle concezioni degli insegnanti.

Gli elementi di novità rispetto agli studi citati sono, da un lato la complessità del processo e dall'altro la considerazione di elementi di conoscenza non molto studiati in letteratura, in riferimento a questo livello scolare, quali: la dimostrazione in ambito aritmetico, aspetti relazionali e di analogia strutturale in vari ambiti numerici, il concetto di funzione.

---

(1) In questi ultimi tre anni il progetto si è esteso alla scuola elementare con la rivisitazione dell' insegnamento dell'aritmetica in chiave pre-algebrica (si veda Navarra 1999).

(2) Per ulteriori dettagli sulla situazione della ricerca italiana ed in particolare sulla figura dell'insegnante-ricercatore si veda Navarra, & De Plano (1992), Arzarello (1999).

Qui noi, dopo aver dato un quadro di sintesi del progetto, riferiamo su:

– alcuni risultati di attività poste in sperimentazione con indicazioni sui comportamenti degli allievi;
– alcune questioni riguardanti le modalità di conduzione della ricerca ed il ruolo degli insegnanti al riguardo;
– cenni su problemi più generali.

Uno sguardo sul progetto

Il progetto si avvia nel 1994, dopo due anni di letture e confronti sul piano teorico circa i problemi di insegnamento-apprendimento dell'Algebra, svolti in seminari di studio con insegnanti ([3])

L'esigenza di un tale approfondimento ci appare chiara lavorando ad un precedente progetto di ricerca su «il problema» (Malara 1993). All'epoca, riguardo ai problemi verbali algebrici, gli insegnanti mostrano una certa perplessità a farne oggetto di studio, motivata dalla convinzione che, a livello di scuola media, non sia possibile affrontare problemi di questo genere di una qualche significatività per la poca dimestichezza degli allievi con i metodi di soluzione di equazioni e sistemi lineari. In quella occasione appaiono altrettanto chiaramente negli insegnanti concezioni diverse circa l'algebra stessa ed in alcuni emerge una visione riduttiva e distorta di essa ([4]).

Convinti della necessità di una chiarificazione e rifondazione concettuale al riguardo, vista la pervasività e l'importanza del tema, si sceglie di farne l'oggetto di un ampio progetto di innovazione didattica. Si vogliono portare gli insegnanti a concepire un approccio all'algebra come linguaggio (non solo nei suoi aspetti sintattici ma soprattutto in quelli di traduzione e produzione/comunicazione di pensiero) ed a promuovere nelle classi un uso precoce delle lettere per la codifica di relazioni da un lato e la formulazione di proprietà in termini generali dall'altro *attraverso e per* lo studio di problemi, sia interni che esterni alla matematica ed anche di tipo dimostrativo (Malara 1995, 1996).

([3]) Sono coinvolti attualmente nel progetto: Loredana Gherpelli (IR), Rosa Iaderosa (IR), Giancarlo Navarra (IR), Roberta Fiorini, Giovanna Grasso, Deanna Pellacani, Maria Clete Spadoni, Antonella Trevisan ed 'at large' una decina di altri insegnanti che non indichiamo.

([4]) Occorre ricordare che in Italia l'insegnamento della matematica a questo livello scolare è affidato a docenti che in massima parte non hanno svolto studi specifici né in matematica né di formazione professionale.

Grazie allo studio critico di studi del tempo ([5]) gli insegnanti del gruppo vengono ad acquisire la consapevolezza della necessità di rinnovare profondamente l'usuale prassi didattica e il desiderio di misurarsi in ricerche sperimentali sul tema.

Si giunge a pianificare un progetto sperimentale coinvolgente l'intero ciclo della scuola media ([6]), con in particolare l'idea di osservare una stessa classe nell'intero triennio ([7]) e nello stesso tempo attuare in parallelo studi specifici su altre classi.

Elemento cardine per lo sviluppo del progetto è l'idea di un approccio naive al linguaggio algebrico, centrato sul controllo dei significati delle scritture, che nascono dall'esigenza di codificare o generalizzare relazioni tra elementi in gioco in assegnate situazioni problematiche, e sul confronto di scritture, nate da modi diversi ma equivalenti, di codifica di date relazioni. In tale approccio le proprietà delle operazioni aritmetiche fanno da guida per la messa a punto delle leggi di trasformazione sintattica che risultano il punto di arrivo, lento e faticoso, di attività collettiva. Un motivo conduttore è quello di operare un confronto costante tra le operazioni di addizione e moltiplicazione per forzare l'attenzione degli allievi non solo sulle analogie ma anche sulle differenze tra i due ambiti. Una nostra ipotesi di ricerca è infatti che proprio attraverso un tale confronto si possano evitare trasferimenti o mescolanze impropri di proprietà da una struttura ad un'altra, che danno luogo a svariati e persistenti errori documentati in letteratura (si veda ad esempio Fishbein & Barach, 1993 o Fishbein 1994).

Elementi salienti nella pianificazione delle attività sono:

– la rivisitazione in chiave critico-riflessiva dei contenuti di aritmetica propri della scuola elementare e la messa in luce di aspetti, solitamente trascurati, che la letteratura di ricerca indica come causa di blocchi nel passaggio aritmetica-algebra ([8]);

– l'uso precoce delle lettere e la messa a fuoco del collegamento tra linguaggio naturale e linguaggio algebrico, evidenziando significati e ruoli di elementi lingui-

---

([5]) Ci limitiamo qui a citare i lavori di Bell (1987), Chevallard (1989/90), Filloy e Rojano (1989), Kieran (1990, 1992), Kuchemann (1981), Sfard (1991), e gli articoli sugli atti PME dal 1987 in poi. Va precisato che lo studio critico della letteratura di ricerca prosegue nel tempo in parallelo alla messa in atto del progetto.

([6]) Per l'articolazione nel triennio delle attività sperimentali si veda Malara & Gherpelli (1996) o Malara & Iaderosa (1999a).

([7]) La classe posta in osservazione è di L. Gherpelli, come documentato in Gherpelli & Malara (1998).

([8]) Una analisi puntuale di questi aspetti si trova Malara (1997).

stici di quest'ultimo, quali termini, segni, simboli e convenzioni, sia in attività di traduzione da un linguaggio ad un altro che nel passaggio dall'ambito aritmetico a quello algebrico ([9]);

– la progressiva conquista del linguaggio simbolico vista come fatto culturale, in analogia con quanto avviene nell'apprendimento di una qualsiasi altra lingua, intrecciando lo studio di questioni sintattiche a quelle di traduzione e produzione di pensiero.

Da un punto di vista metodologico generale nella classe gli insegnanti operano in modo costruttivo, stimolando e orchestrando l'interazione degli allievi, promuovendo riflessioni collettive su quanto viene via via svolto fino a giungere alla istituzionalizzazione delle conoscenze. Particolare costume nelle classi è:

– l'uso della verbalizzazione come strumento di lavoro (si abitua cioè l'allievo a fissare in ogni occasione per iscritto sul proprio quaderno idee, congetture, motivazioni di scelte di procedimenti ecc.);

– la proposizione di situazioni problematiche aperte che siano leggibili da più punti di vista in modo da stimolare negli allievi il pensiero ipotetico;

– il fare analizzare agli allievi ragionamenti o procedimenti prodotti da altri (sia nel lavoro individuale che a piccoli gruppi);

– il dare spazio alla discussione collettiva in modo da trarre, dal confronto e dalla pluralità delle idee, delle conclusioni socialmente condivise che l'intera classe senta come proprie ([10]).

Le realizzazioni

Richiamiamo qui, brevemente e in ordine temporale, alcuni studi realizzati a livello di scuola media e riguardanti nello specifico: argomentazione e dimostrazione in aritmetica, la risoluzione di problemi algebrici, questioni di intreccio tra aritmetica ed algebra, l'avvio al concetto di funzione.

Argomentazione e dimostrazione in aritmetica

Il primo studio affrontato concerne l'analisi dei comportamenti e delle produ-

---

([9]) Pur nascendo il codice algebrico come generalizzazione di quello artimetico tuttavia tra i simbolismi nei due ambiti esistono elementi di frattura per la molteplicità di significati o di ruoli che uno stesso simbolo, avente significato univoco in aritmetica, viene ad assumere nel linguaggio algebrico (si veda Malara & Iaderosa, 1999b).

([10]) Tali criteri possono cosiderarsi il substrato comune di tutte le ricerche italiane di innovazione in didattica della matematica (Arzarello 1999).

zioni degli allievi di fronte a problemi di indagine, quali quelli riportati in tavola 1, proposti sin dalla prima media, in cui gli allievi sono chiamati non solo ad individuare proprietà o regolarità ma anche ad argomentare sotto ipotesi, formulare controesempi e dare giustificazioni.

TAVOLA 1

Esempi di attività di indagine in ambito aritmetico

Discuti le seguenti informazioni sui numeri naturali giustificando perché secondo te sono vere oppure false. E' vero che:
1. La somma di due numeri pari è divisibile per 4?
2. Se il prodotto di due numeri è pari (dispari) ciascuno dei due fattori è pari (dispari)?
3. Un numero divisibile per 3, ossia del tipo 3n, è sempre dispari?
4. Il quadrato di un qualsiasi numero pari è divisibile per 4?
5. Tutti i numeri divisibili per 3 sono anche divisibili per 9?
6. Se 3 divide due numeri naturali divide anche la loro somma o la loro differenza?
7. Il prodotto di due numeri pari è divisibile per 7?
8. Ci sono valori di n in modo che 5n+3 sia: divisibile per 5, divisibile per 3, divisibile per 2?
9. La somma di due numeri che divisi per 5 danno resto 1 è ancora un numero che diviso per 5 dà resto 1?
10. La somma di quattro numeri naturali consecutivi è sempre pari?

L'indagare su tale genere di quesiti porta gli allievi nel tempo a comprendere il ruolo del controesempio per confutare la presunta verità di una proposizione e, di riflesso, della non sufficienza di singole prove, anche numericamente elevate, per affermare la verità di un enunciato, e della necessità di argomentazioni di carattere generale.

In questa prima fase l'attenzione si rivolge sull'uso delle lettere da parte degli allievi e sul loro ruolo nella argomentazione, si vedono codifiche spontanee di relazioni e proprietà, produttive o non, su cui nelle classi si discute successivamente.

A titolo esemplificativo riportiamo in tavola 2 alcune produzioni degli allievi.

Da tali produzioni risulta evidente il tipo di contratto promosso, volto alla giustificazione di proprietà o alla individuazione di controesempi. Le argomentazioni improprie consentono la chiarificazione di aspetti logici o linguistici spesso riposti ed anche l'uso improprio di notazioni. Ad esempio il protocollo di

TAVOLA 2

Produzioni degli allievi relative al Quesito 8 di tavola 1

Ci sono valori di n in modo che 5n+3 sia: divisibile per 5, divisibile per 3, divisibile per 2?
(Gli allievi in questa prova devono stabilire le ipotesi cui il numero n deve soddisfare in relazione a ciascuna delle proprietà considerate.)

Eleonora
$5 \cdot n + 3 \rightarrow$ divisibile per 5. $5 \cdot n + 3$ $n = 6$ $5 \cdot 6 + 3 = 33 : 5$ non è divisibile per 5 perché se noi facciamo $5 \times n$ il risultato finisce sempre con $\underline{0}$ o con $\underline{5}$ e così potrebbe essere divisibile ma questo potere ci viene tolto perché si aggiunge 3 e così non ci sono numeri divisibili per 5.
$5 \cdot n + 3 \rightarrow$ divisibile per 2. es. $5 \cdot 9 + 3$: $45 + 3 = 48$:2 $+24$; $5 \cdot 8 + 3 = 40 + 3 = 43$:2 no. In questo caso invece solo in certi casi si divide per 2: quando il numero che noi moltiplichiamo per 5 è dispari, cioè $3 \cdot 7$ ecc. invece quando è pari non viene.
$5 \cdot n + 3 \rightarrow$ divisibile per 3. Es. $5 \cdot 9 + 3 : 3 = (45 + 3) : 3 = 16$; $(5 \cdot 3 + 3) : 3 = (15 + 3) : 3 = 18 : 3 = 6$; $(5 \cdot 8 + 3) : 3 = (40 + 3) : 43 : 3 = no$; $(5 \cdot 2 + 3) : 3 = (13) : 3 = no$; $(5 \cdot 18 + 3) : 3 = (90 + 3) : 3 = 93/3 = 31$ $(5 \cdot 4 + 3) : 3 = (23) : 3 = no$; $(5 \cdot 12 + 3) : 3 = (63) : 3 = 21$. In questo caso il numero è divisibile per 3 quando il numero che viene moltiplicato per 5 è nella tabellina del 3 e non c'entra il pari e dispari. Cioè 3, 9, 12, 15, 18, 21, 30 ecc.

Roberta
Div: $\rightarrow 2$. Un qualunque numero formato da $5n + 3$ è sempre divisibile per 2 solo se il prodotto finisce con un numero dispari 5 (e non 0) (es. $5 \cdot 5 = 25$; $5 \cdot 7 = 35$) e aggiungiamo 3. Perciò un numero divisibile per 2 formato da $(5n + 3)$ è divisibile per 2 quando a 5 moltiplichiamo un numero dispari e aggiungiamo 3.
Div: $\rightarrow 3$. Un qualsiasi numero formato da $(5n + 3)$ non è mai divisibile per 3 (controesempio $5 \cdot 5 + 3 = 25 + 3 = 28$).
Div: $\rightarrow 5$. No Se dividiamo per 5 un qualunque numero formato da $5n+3$ resta sempre 3.

Sara
$5n + 3$. n=appartenente all'insieme dei naturali
$5n + 3$ divisibile per 5. MAI perché $n \cdot 5$ dà sempre un numero divisibile per 5 ma il $+3$ lo modifica e gli toglie questa caratteristica. $5 \cdot 2 = 10$ / $10 + 3 = 13$ / : 5 NO.
$5n + 3$ divisibile per 2. A VOLTE perché se $5n$ dà un numero che finisce per 0, aggiungendo 3 viene dispari (finisce per 3). Se il numero $5n$ finisce per 5, aggiungendo 3 viene un numero pari (che finisce per 8).
$5n + 3$ divisibile per 3. A VOLTE. Se finisce per 8 a volte.
$5 \cdot 6 = 30 + 3 = 33 : 3 = 11$; $5 \cdot 3 = 15 + 3 = 18 : 3 + 6$. ATTENZIONE: è divisibile per 3 solo quando il 5 è moltiplicato per 3 o per un suo multiplo.

Roberta, in relazione alla divisibilità per 3 mette in luce un errore logico comune: l'identificazione della negazione di una proposizione con la proposizione contraria. Nei protocolli di Eleonora e Sara si rileva invece l'uso procedurale del segno di uguale. I protocolli evidenzano come, pur ragionando in termini generali, le allieve sentono il bisogno di particolarizzare le proprietà rilevate, come a confermare attraverso l'esempio quanto asserito.

Le argomentazioni rivelano un differente controllo della situazione da parte delle allieve, la prima, a differenza delle altre, ha bisogno dello studio di casi particolari e ricorre a conoscenze stereotipate legate alla divisibilità. In generale le prove testimoniano, al di là, degli errori prodotti, l'acquisita capacità degli allievi ad esprimere per iscritto le idee ed i ragionamenti messi in atto.

Per una maggiore documentazione su questa fase della ricerca rinviamo a Gherpelli & Malara (1994) dove sono riportate analisi fini di svariati protocolli documentanti difficoltà e potenzialità espresse dagli allievi. I risultati relativi a questa prima fase della ricerca appaiono senz'altro incoraggianti, soprattutto in considerazione dell'agilità con cui gli allievi a livello degli undici/dodici anni riescono ad operare-con e riflettere-su le scritture formali, al punto da risolvere correttamente problemi di tipo algebrico usualmente considerati proponibili solo a fine terza media. C'è da rilevare che gli atteggiamenti positivi degli allievi ed i risultati ottenuti danno la convinzione agli insegnanti di avere individuato un filone di studio di grande produttività, cosa che determina in loro il desiderio di proseguire l'indagine sul passaggio dalla argomentazione alla dimostrazione.

L'approccio alla dimostrazione con l'uso del codice algebrico si affronta già a partire dalla seconda media con la realizzazione di: a) dimostrazioni costruite in attività collettiva (insegnante e allievi); b) dimostrazioni guidate dall'insegnante (vengono scanditi i vari passi dimostrativi ed evidenziato il modo di porsi per il raggiungimento dello scopo) ([13]); c) dimostrazioni fornite autonomamente dall'allievo.

Riportiamo a titolo esemplificativo in tavola 3 uno dei problemi dimostrativi proposti e alcuni protocolli di diversa tipologia ad esso relativi.

TAVOLA 3

Produzioni tipo degli allievi su un problema dimostrativo

Osserva:

$3 = (2^2 + 2)/2;\ 4 = (3^2 + 3)/3;\ 5 = (4^2 + 4)/4.$

Controlla la verità delle uguaglianze, fai qualche altro caso analogo, ad esempio $6 = \ldots$

Dimostra che ogni numero naturale maggiore di 1 si può ottenere nel modo descritto.

([11]) Il momento in cui l'insegnante si pone come modello è di fondamentale importanza per gli allievi poiché essi comprendono che cosa realmente devono fare e produrre.

Sara: $x = \dfrac{(x-1)^2 + (x-1)}{x-1} \rightarrow \dfrac{x^2 - 2x + 1 + (x-1)}{x-1} \rightarrow \dfrac{x^2 - 2x + 1 + x - 1}{x-1}$
$\rightarrow \dfrac{x^2 - x}{x-1} \rightarrow \dfrac{x(x-1)}{x-1} \rightarrow x$

Silvia: n=numero naturale; $n+1$=numero naturale maggiore di uno.
$n+1 = \dfrac{n^2+n}{n}$; $n+1 = \dfrac{n \cdot n + {}^{2n}1n}{n}$; $n+1 = \dfrac{2n}{n}$; $n+1 = \dfrac{2n^{1n}}{n}$; $n+1 = 1$ no. (n^2+n):
$n = n+1$; $n+1 = n+1$.

Alberto: $A = \dfrac{B^2+B}{B} B+1=A$, $B=A-1$; $A = \dfrac{A-1^2+A-1}{A-1} = \dfrac{A-1^2}{A-1} + \dfrac{A-1}{A-1} = A-1+1$
$\downarrow$
$\dfrac{A-1 \cdot A-1}{A-1}$.

Sottolineiamo che al momento di somministrazione della prova gli allievi non avevano duttilità nel calcolo algebrico per carenza di studio specifico. Tale carenza è testimoniata dal protocollo di Silvia: basta osservare le trasformazioni che inizialmente l'allieva opera interpretando erroneamente la scrittura. Il protocollo di Alberto mostra un buon controllo dei significati delle scritture anche se rivela una cattiva gestione nell'uso delle parentesi (opera sul termine $A - 1$ come se esse vi fossero). L'atteggiamento di Sara è classico: l'allieva opera in modo procedurale (esplicita il quadrato e successivamente procede alla semplificazione) non rilevando le relazioni tra gli elementi in gioco. Tutti e tre gli allievi comunque colgono la regolarità insita nei casi particolari assegnati e la esplicitano correttamente. Per l'analisi di ulteriori produzioni rinviamo a Malara & Gherpelli (1996).

Da un punto di vista generale il nostro studio mette in luce che a conclusione del triennio gli allievi generalmente sono in grado di argomentare coerentemente, purché la verbalizzazzione e la riflessione su quanto via via affrontato sia di fatto costume della classe. La bontà delle argomentazioni prodotte è tuttavia strettamente connessa alla abilità linguistica dell'allievo.

Per quanto riguarda la dimostrazione si ha conferma delle ipotesi fatte circa le prestazioni degli allievi in relazione alle loro capacità generali. I risultati anche se modesti ed indicatori di una non piena autonomia nello sviluppo di una dimostrazione, rivelano tuttavia che più di un terzo della classe acquisisce il modo di porsi di fronte alla richiesta di produrre una dimostrazione aritmetica. Dalla lettura dei protocolli appare evidente, tranne che per gli allievi di livello alto un comportamento caratteristico: il supportare la dimostrazione con verifiche su casi particolari e, nei casi di allievi deboli, il sostituire la dimostrazione con verifiche numeriche. Il risultato decisamente positivo riguarda tuttavia la consapevolezza di cosa significhi dimostrare e del ruolo giocato in aritmetica dal linguaggio algebrico.

Per quanto riguarda il rapporto argomentazione-dimostrazione ci sembra di poter dire, sulla base delle nostre esperienze ed a differenza di quanto sostenuto da altri, che non vi è stretta correlazione tra le due attività: l'essere in grado di fornire buone argomentazioni non è condizione sufficiente per riuscire a condurre autonomamente dimostrazioni. Entrambe le attività sono comunque mezzi importanti per far comprendere agli allievi la valenza del linguaggio algebrico, cosa essenziale per dare significato e motivazione allo studio delle tecniche di questo linguaggio.

La risoluzione dei problemi algebrici

Il secondo studio affrontato, intrecciato ai precedenti, tratta dei problemi verbali algebrici. Come è noto, tradizionalmente tale studio si colloca dopo l'introduzione delle equazioni lineari in una incognita e, per l'età degli allievi, i problemi che si propongono solitamente sono anche risolubili in modo intuitivo e/o facendo ricorso a rappresentazioni grafiche opportune. Questo modo di procedere, come rilevato anche da Bernardz & Janvier (1996), non consente loro di apprezzare la bontà del metodo algebrico. La nostra scelta è quella di proporre lo studio dei problemi verbali algebrici a più incognite, anche complessi, prima della introduzione formale delle equazioni, proprio per giustificare agli occhi degli allievi l'opportunità dello studio di queste come oggetto matematico, in sintonia con il percorso storico ed i nostri stessi programmi ministeriali, e più in generale per educare al «principio di economia» tipico della matematica, che privilegia lo studio degli schemi rappresentativi di una pluralità di situazioni.

In tale ipotesi si vogliono studiare i comportamenti degli allievi riguardo a:

– la traduzione formale delle relazioni espresse dal testo verbale;

– la trasformazione e l'elaborazione delle relazioni per giungere ad una equazione risolutiva;

– lo studio «naive» delle equazioni per la determinazione delle incognite e la risoluzione del problema.

I problemi proposti agli allievi, alcuni dei quali riportati in Tavola 4, sono caratterizzati da un testo generalmente schematico che richiede, tranne qualche caso, una traduzione formale non particolarmente problematica. Il numero di incognite varia da due a quattro mentre le relazioni presenti sono di tipo additivo, moltiplicativo o di entrambi i tipi.

Il percorso didattico sviluppato con gli allievi è focalizzato sul controllo della pluralità di rappresentazioni di una medesima relazione, cosa cui si giunge attraverso quesiti intermedi che inducono alla riflessione sulle uguaglianze indotte dalla relazione data, ad esempio considerata la relazione: *«il segmento* $\overline{AB}$ *è maggiore del segmento* $\overline{CD}$ *di* 4 (cm)» si pongono agli allievi i seguenti quesiti:

1. *Quale dei due segmenti è il maggiore (quale il minore)*?
2. *Scelto il maggiore (scelto il minore) scrivi come ottieni l'altro.*
3. *Scelto il maggiore scrivi la differenza tra i due.*

e si induce il controllo contemporaneo delle scritture $\overline{CD} = \overline{AB} - 4$; $\overline{AB} = \overline{CD} + 4$; $\overline{AB} - \overline{CD} = 4$.

Gli allievi vengono così abituati a rappresentare in più modi una relazione fra due grandezze ed a scegliere poi la più conveniente a seconda del problema in esame. Il metodo di soluzione proposto è quello di sostituzione presentato come «gioco del cambio» da applicarsi una o più volte fino ad ottenere un'equazione in una sola incognita che occorre poi elaborare. Tale equazione, per il tipo di problemi considerati, è riconducibile, grazie alle proprietà delle operazioni aritmetiche, alla struttura $ax + b = c$, con a, b e c numeri naturali o razionali.

Le difficoltà, oltre che il numero delle incognite ed il tipo di relazione in gioco, riguardano: i) la traduzione di relazioni in termini di uguaglianze e le loro trasformazioni; ii) la scelta dell'incognita attraverso cui esprimere le altre; iii) la gestione dell'equazione risolutiva.

Riportiamo, a titolo esemplificativo, due casi emblematici di soluzioni al problema 2.

TAVOLA 4

Problemi verbali algebrici a più incognite proposti in seconda media

1. Considera un triangolo ABC appoggiato sul lato $\overline{AB}$ di cui sono date le seguenti informazioni: il perimetro misura 60 cm; il lato $\overline{BC}$ è maggiore del lato $\overline{AC}$ di 5 cm; il lato $\overline{AB}$ è maggiore del lato $\overline{AC}$ di 10 cm. Calcola la misura dei suoi lati. Il triangolo potrebbe essere rettangolo? Se si, quale sarebbe l'angolo retto e quale l'ipotenusa?
2. In un cortile vivono 224 animali fra cani e gatti. Il numero dei gatti è 6 volte quello dei cani. Calcola quanti sono i cani e quanti i gatti del cortile.
3. Massimo va in pizzeria e per una pizza, un dolce ed una coca-cola spende 8300 lire. Il dolce è costato 1500 lire meno della pizza. La pizza è costata 400 lire più del doppio della coca-cola. Calcola rispettivamente il costo della pizza del dolce e della coca-cola.
4. Il perimetro di un trapezio rettangolo misura 96 cm. La misura della base maggiore è 20 cm più della minore. La differenza tra la misura della base maggiore e quella del lato obliquo è 13 cm. La differenza tra la misura del lato obliquo e quella dell'altezza è di 10 cm. Calcola le misure delle due basi, dell'altezza e del lato obliquo.

TAVOLA 5

Esempi di produzioni relative al Problema 2

Annalisa

$G = C \times 6,\ C = G : 6,\ C + (C \times 6) = 224;\ 224 : 6 =$ non viene

Chiara

cani + gatti = 224;	
cani $\times 6$ = gatti;	gatti: 6 = cani;
cani + cani $\times 6 = 224$;	gatti + gatti: 6 = 224
cani $\cdot 2 \cdot 6 = 224$	gatti $\cdot 2 : 6 = 224$
$224 : 6 = 3$	$224 \times 6 = 1344$; $1344 : 2 = 672$; gatti 672; cani $672 : 6 = 112$.

Il protocollo di Annalisa mostra come l'allieva non riesca ad interpretare ed elaborare correttamente la scrittura «$C + C \times 6 = 224$» ma comprende l'inadeguatezza della sua semplificazione in $C \times 6 = 224$. (Questo errore si rivelerà di frequente nella classe, in accordo a quanto documentato in letteratura). Il protocollo di Chiara evidenzia la conduzione parallela di una duplice codifica del problema, con buona e immediata traduzione formale delle relazioni espresse dal testo, ma mostra un grossolano errore di trasformazione che denuncia una lettura procedurale della codifica formale una relazione (l'espressione «cani + cani $\times 6 = 224$» viene trasformata in «cani$\cdot 2 \cdot 6 = 224$») e rivela difficoltà di controllo del significato nella corretta lettura ed elaborazione delle equazioni che ottiene. Questi errori offrono l'occasione di discutere collettivamente sul significato delle scritture e di concettualizzare la corretta trasformazione sintattica. Un'analisi di altri interessanti protocolli degli allievi relativi a questo argomento si trova in Malara (1999a).

Come si evince da questi esempi, l'aver affrontato la risoluzione dei problemi algebrici senza previa istruzione della sintassi del linguaggio algebrico, porta gli allievi a produrre trasformazioni sintattiche errate dovute principalmente a carenza di controllo sui significati delle scritture ottenute; questo tipo di questioni dà la motivazione per affrontare problematiche di tipo sintattico di per sé stesse ed indipendentemente dal contesto di riferimento, concentrando l'attenzione sulle proprietà aritmetiche. Questo aspetto è particolarmente interessante sia per gli allievi, che giungono a comprendere il significato dello studio del calcolo letterale e l'importanza del suo apprendimento, sia per gli insegnanti, che acquisiscono consapevolezza della necessità di dialogare con gli allievi per la negoziazione dei significati di semplici espressioni algebriche, solitamente date per acquisite.

In generale possiamo dire che l'impatto di questa attività nelle classi è notevole sia per il coinvolgimento che per i risultati raggiunti. La quasi totalità degli allievi comprende di trovarsi di fronte ad un metodo generale per la risoluzione di questo tipo di problemi basato sulla traduzione in formule delle informazioni espresse dal testo, che richiede l'elaborazione delle formule ottenute. Riguardo all'apprendimento si delineano tre fasce di livello: la prima costituita da allievi che fanno proprio il metodo algebrico riuscendo ad affrontare autonomamente elaborazioni sintattiche ragionate e secondo il principio di economia; la seconda costituita da allievi che assimilano il principio della traduzione formale ma non vanno al di là della sua applicazione secondo i modelli incontrati, bloccandosi di fronte a situazioni nuove soprattutto di tipo sintattico; la terza fascia, decisamente minoritaria, costituita da allievi che non comprendono lo spirito del metodo algebrico e quando possibile si rifugiano nei metodi di risoluzione di tipo grafico a loro già noti. C'è da dire che il metodo algebrico è assimilato anche da allievi di livello generale non alto, che per questo si sentono gratificati e rassicurati.

Aspetti sintattici e strutturali

Questo studio è sviluppato, parallelamente ai precendenti, nella classe di R. Iaderosa, insegnante-ricercatore di raffinata formazione matematica, sensibile più di altri a questioni trasversali, soggiacenti all'algebra moderna. In esso si esamina una serie di problemi di tipo sintattico che si pongono sia nel passaggio tra i vari ambiti numerici sia all'interno di uno stesso ambito per la dominanza del modello additivo su quello moltiplicativo. L'ipotesi dello studio si può così riassumere: *se il conflitto che gli allievi rivelano tra le notazioni additiva e moltiplicativa può essere causa di errori o confusioni nell'apprendimento del linguaggio algebrico e dei suoi significati può essere utile didatticamente, e fino a che punto, cercare situazioni e strategie per forzare il confronto e il trasferimento tra situazioni additivo-moltiplicative e situazioni moltiplicativo-esponenziali*?

Su questa base si mette in atto una sperimentazione in classi di seconda e terza media, centrata su una serie di prove, alcune riportate in Tavola 6, concepite per indurre il confronto tra le due strutture (Malara & Iaderosa 1999b).

In queste prove gli allievi sono chiamati a trascrivere ed elaborare espressioni aritmetiche o algebriche operando un trasferimento per analogia dalla struttura additiva a quella moltiplicativa (solitamente nei naturali) e viceversa, in compresenza di più operazioni ed in situazioni di distrazione, cosa che richiede un controllo tra la notazione additivo-moltiplicativa e quella moltiplicativa-esponenziale.

Lo scopo è proprio quello di indagare sulla capacità degli allievi di cogliere la struttura di certe espressioni e di modificarla per analogia. Da queste si rileva che circa la metà degli allievi mantiene un discreto controllo sulle due notazioni. Come previsto si rilevano difficoltà nell'operare con potenze ed alcuni allievi della fascia debole semplicemente tentano di esplicitare le potenze come prodotti. In particolare, come evidenziato dai seguenti esempi di conversione:

TAVOLA 6

Confronto tra ambito additivo e ambito moltiplicativo

Scuola media, classe seconda.

1) Calcola, utilizzando il più possibile le proprietà delle potenze:
a) $3^3 \times 3^2 + 3^3 + 3^2$; b) $5 \times 2 + 5^2$; c) $(2 \times 3^2)^2 + (2 + 3^2) \times 2$

2) Trasforma le seguenti scritture sostituendo ad ogni segno di addizione il segno di moltiplicazione, e ad ogni segno di moltiplicazione la potenza:
a) $(2 \times 3) + 5 + 7 \times 2 \rightarrow$; b) $(2 \times 5) \times 7 + 2 \rightarrow$; c) $(5 + 2) \times 4 \rightarrow$.

3) Trasforma le seguenti scritture sostituendo ad ogni segno di moltiplicazione l'addizione e ad ogni potenza la moltiplicazione:
a) $2^3 \times 5 \times 7^2 \rightarrow$; b) $5^3 \times 2^4 \times 3 \rightarrow$; c) $(5 \times 8) \times 2 \rightarrow$; d) $(5^2 \times 2^2) \times 3 \rightarrow$.

4) Osserva le seguenti scritture e stabilisci per ciascuna di esse se è vera o falsa:
a) $2 \times 5 + 3 \times 4 = 5 \times 2 + 4 \times 3$; b) $2^5 \times 3^4 = 5^2 \times 4^3$.
Osserva ancora a) e b). Si può passare dall'una all'altra come negli esercizi precedenti?

Scuola media, classe terza.

5) Calcola, utilizzando il più possibile le proprietà delle potenze:
a) $2^3 \times 2^2 + 2^3 + 2^2$ $\quad a^3 \times a^2 + a^3 + a^2$
b) $(2 \times 3)^2 + (2^3)^2$ $\quad (ab)^2 + (a^3)^2$
c) $(2 \times 3^2) + (2^2 \times 3)^2$ $\quad (ab^2) + (a^2 b)^2$

– dall'ambito additivo-moltiplicativo a quello moltiplicativo-esponenziale: $(2 \times 3) + 5 + 7 \times 2$ è trasformato in: i) $(2^3)^5 \times 7^2$; ii) $2^3 + 5 \times 7^2$; iii) $2^3 \times 5 \times 7^2$; iv) $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 2$;

– dall'ambito moltiplicativo-esponenziale a quello additivo-moltiplicativo: $2^3 \times 5 \times 7^2$ è trasformato in: i) $2^3 + 5 + 7^2$; ii) $(2 \times 3) \times 5 \times (7 \times 2)$; iii) $(2 + 3) + 5 + (7 \times 2)$;

mentre gli allievi distinguono abbastanza bene le corrispondenze (dirette ed inverse) tra addizione e moltiplicazione, non riescono a controllare contemporaneamente l'operazione di potenza, soprattutto nel passaggio inverso.

Per l'insegnante tali prove si rivelano a posteriori un ottimo test per rilevare il livello di concettualizzazione raggiunto dagli allievi circa le operazioni aritmetiche e le relative proprietà e circa la caratterizzazione delle due strutture, cosa difficilmente ipotizzabile al momento del loro concepimento e somministrazione.

C'è da sottolineare tuttavia che questo studio, apprezzato in sede di ricerca ([12]) dà luogo a contrastanti reazioni tra gli insegnanti, alcuni dei quali lo considerano troppo avanzato e sofisticato per tale livello scolare.

L'intreccio frazioni, frazioni algebriche, razionali

Questo studio prende spunto da alcune questioni dibattute all'interno del nostro gruppo in relazione alle possibilità offerte dal nostro progetto all'approfondimento della didattica dei razionali nella scuola media nell'ottica della continuità con la scuola secondaria.

Ricordiamo le divergenze, di tipo espistemologico, tra la moderna visione strutturale che privilegia nella scuola media l'introduzione dei vari ambiti numerici ed in particolare quello dei razionali e la radicata tradizione di insegnamento che vede lo studio delle frazioni da un punto di vista esclusivamente operativo senza neppure giungere alla conquista del concetto di numero razionale come classe di frazioni equivalenti. Inoltre l'approccio alle operazioni è finalizzato alla determinazione del loro risultato per particolari coppie di frazioni e non si giunge quasi mai alla esplicitazione in generale delle relative leggi di corrispondenza. Il confronto tra frazioni è poi solitamente effettuato passando alla rappresentazione decimale del quoziente tra numeratore e denominatore (ovviamente spesso approssimato), né si fanno riflettere gli allievi di come vari una frazione al variare del suo numeratore e/o denominatore ([13]). Tale modo di procedere non consente il passaggio al confronto di frazioni in termini generali né la concettualizzazione di come vari una generica frazione al variare dei suoi termini.

Il nostro studio si basa sull'ipotesi che un precoce avvio all'uso delle lettere consenta di affrontare questioni elementari sulle frazioni da un punto di vista generale, in modo da raggiungere una maggiore flessibilità, incisività e trasparenza nei modelli concettuali degli allievi in riferimento a: il numero razionale, l'ordine e le operazioni tra razionali in termini generali.

Un obiettivo specifico è quello di forzare l'analisi dei significati che rappresentazioni diverse del numeratore e/o del numeratore di semplici frazioni numeriche o algebriche veicolano al fine di evitare o almeno limitare atteggiamenti stereotipati e errori classici nella loro trasformazione.

([12]) Ci riferiamo alla sessione dei Seminario Nazionale del dicembre 1997 al Working Group sull'algebra al PME 22 (1998, Stellenbosch, Sud Africa) ed alla Conferenza Europea Cerme 1 (Osnabruck, 1998).

([13]) Interessante al riguardo è lo studio di Lopez-Real (1998).

TAVOLA 7

Esempi di attività proposte sull'equivalenza e confronto di frazioni

Classi seconda e terza

1. Costruisci frazioni equivalenti alle date secondo le indicazioni espresse dallo schema
$(\leftarrow\ \rightarrow)\ \leftarrow \dfrac{15}{25} \rightarrow;\ \leftarrow \dfrac{10\cdot b}{14} \rightarrow;\ \leftarrow \dfrac{3\cdot 2\cdot a}{14} \rightarrow;\ \leftarrow \dfrac{18\cdot k}{2\cdot a\cdot 15} \rightarrow$

2. Per ogni paio di frazioni tra le parentesi stabilisci qual è la minore spiegando il perché della scelta: $\left\{\dfrac{15}{17};\dfrac{13}{19}\right\};\left\{\dfrac{19}{36};\dfrac{11}{24}\right\};\left\{\dfrac{235}{352};\dfrac{115}{176}\right\}$

Classe terza

3. Ti viene detto di costruire frazioni equivalenti per ciascuna delle seguenti frazioni, chiarisci se ci sono casi difficili e perché sono difficili:
$\dfrac{5}{7};\ \dfrac{2\cdot 11}{5\cdot 9};\ \dfrac{p}{k};\ \dfrac{3\cdot a}{12};\ \dfrac{5+4}{11};\ \dfrac{a+b}{2}$

4. Seguendo la strategia che preferisci confronta tra loro ciascun paio di frazioni spiegando qual è la minore
$\left\{\dfrac{3}{4};\dfrac{5}{6}\right\};\left\{\dfrac{11}{24};\dfrac{17}{36}\right\};\left\{\dfrac{2a}{17};\dfrac{3a}{22}\right\}$

Classi seconda e terza

5. Sostituisci alle lettere gli eventuali valori numerici che rendono vere le uguaglianze indicate:
$\dfrac{k+1}{4}=2;\ \dfrac{8}{k+1}=4;\ \dfrac{4}{5}=\dfrac{12}{k+2};\ \dfrac{15}{18}=\dfrac{k}{k+1};\ \dfrac{k}{3}\cdot\dfrac{4}{m}=\dfrac{5}{6};\ \dfrac{2}{3}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{6}{21}$

Da un punto di vista concettuale si intendono portare nel tempo gli allievi alla consapevolezza: i) di come riconoscere frazioni equivalenti [14]; ii) di come confrontare frazioni senza ricorrere alla rappresentazione decimale; iii) delle ragioni che stanno alla base delle definizioni generali di addizione e moltiplicazione (affrontando questioni quali l'indipendenza dalle frazioni rappresentanti, l'immergibilità dei naturali nei razionali non negativi); 4i) delle semplificazioni di calcolo prodotte dalla riduzione ai minimi termini di una frazione e, specificamente per l'addizione, dal ricorso al minimo comune multiplo dei denominatori; 5i) dell'esistenza per ogni razionale non nullo di opposto e reciproco (ritrovando attraverso tali concetti le operazioni di differenza e divisione); 6i) della densità, archimedeicità e non completezza della struttura d'ordine e delle leggi di monotonia.

---

[14] Nella migliore delle ipotesi gli allievi riescono a concettualizzare come passare da una frazione ad una ad essa equivalente, ma non sanno esprimere in generale quando due frazioni sono equivalenti. Questo si rileva anche in successivi livelli di scolarità.

Alcune attività concepite per la costruzione di frazioni equivalenti ad una data e per il confronto di frazioni sono riportate in Tavola 7. Dall'analisi delle produzioni degli allievi emergono i seguenti comportamenti. Per la determinazione di frazioni equivalenti essi generalmente operano il passaggio da una frazione ad altre equivalenti sia per moltiplicazione di numeratore e denominatore per uno stesso naturale, anche dell'ordine delle decine [15], sia, quando è possibile, per divisione dei due termini per uno stesso numero naturale. Si rilevano anche comportamenti indicativi di carenti concettualizzazioni e controllo, anche se non molto diffusi. Vi sono:

– allievi, soprattutto di seconda, che «dimenticano» la lettera nella semplificazione $\left(\text{ad esempio una scrive } \frac{5}{7} \leftarrow \frac{:2}{:2} = \frac{10\cdot b}{14} \rightarrow \frac{100\cdot b}{140}\right)$

– allievi, soprattutto di seconda, che mostrano qualche incertezza nella gestione di divisioni o moltiplicazioni dei due termini se espressi in fattori o compiono errori rivelatori di una mancanza di controllo di tale rappresentazione $\left(\text{ad esempio un'allieva di seconda scrive: } \frac{2\cdot a}{5} \leftarrow \frac{:3}{:3}\ \frac{3\cdot 2\cdot a}{15}\ \frac{\times 2}{\times 2} \rightarrow \frac{6\cdot 4\cdot a}{30}\right)$;

– allievi che nel caso di presenza di termini letterali o si bloccano (ad esempio un'allieva scrive accanto a $\frac{3\cdot a}{12}$ «non conosco a»), oppure particolarizzano il valore (ad esempio un'allieva di terza, di fascia medio bassa, accanto a $\frac{3\cdot a}{12}$ pone $a = 2$, scrive $\frac{6}{12} = \frac{12}{24}$ e aggiunge «se ci fossero numeri la cosa si potrebbe risolvere»).

Solo pochi allievi di terza, per ottenere frazioni equivalenti ad una data ne moltiplicano i termini per una stessa lettera, ma non si curano di escludere il caso che essa possa rappresentare lo zero.

I quesiti sul confronto di razionali si rivelano più difficili dei precedenti, non vi è il prevalere dei metodi nuovi (riduzione allo stesso denominatore, prodotto in croce) rispetto a metodi noti in precedenza (ricorso al confronto dei decimali corrispondenti, rappresentazioni grafiche). Sia in seconda che in terza vi sono casi di allievi che esprimono il confronto riferendosi alle differenze tra numeratore e denominatore. La problematicità dei risultati sul confronto, tuttora in discussione, è da un punto di vista della ricerca una questione aperta. Per aspetti riguardanti la definizione delle operazioni in termini generali e questioni dell'ordinamento rinviamo a Malara (1999b). Circa i suoi risultati, alcuni ancora da approfondire, va indicato principalmente il riconoscimento da parte degli insegnanti della produttività di questo nuovo modo di guardare ai razionali. In particolare essi sottolineano che:

([15]) Un allievo di terza per ottenere frazioni equivalenti ad una data moltiplica i termini di questa anche per numeri dell'ordine di 10^4 o 10^7 e anche inconsueti come 1027321.

– l'uso delle lettere consente un insegnamento di tipo metacognitivo su proprietà e algoritmi delle operazioni;

– il lavoro sulle rappresentazioni plurime del numero nell'ambio dei naturali, oltre a portare gli allievi a distinguere tra numero e sua rappresentazione, si rivela importante anche in questo ambito perché rende loro accettabile e facile il concepire frazioni equivalenti come rappresentazioni diverse dello stesso numero razionale.

– il dare spazio agli aspetti strutturali facilita l'approccio a due aspetti didatticamente molto delicati: a) l'ampliamento del concetto di numero; b) l'ampliamento dell'ambito numerico.

Particolarmente significativo ed efficace si rivela il lavoro sulla costruzione delle classi di frazioni equivalenti ai fini di:

– confrontare razionali (associando al confronto dei decimali corrispondenti, il metodo di riduzione allo stesso denominatore e, seppure in termini ancora da approfondire, anche quello del prodotto in croce);

– di indagare sulla possibile definizione delle operazioni di addizione [moltiplicazione] in modo che i risultati non dipendano dalle frazioni che si usano e che si ottengano frazioni equivalenti quando si cambia la rappresentazione di un addendo [fattore];

– di osservare la coerenza con le corrispondenti operazioni sui naturali, favorendo la visione dell'ampliamento di ambito numerico.

Nonostante i problemi aperti ciò che appare sicuramente come un risultato positivo riguarda la consapevolezza dell'insegnante su due punti importanti: a) l'usuale didattica dei razionali è riduttiva sia dal punto di vista culturale che delle possibilità degli allievi; b) il porre l'attenzione sugli aspetti strutturali rende agevole il devolvere agli allievi problemi importanti quali la costruzione delle operazioni aritmetiche nel nuovo e più ampio ambito numerico.

Approccio al concetto di funzione

Come è noto, i programmi ministeriali per la scuola media contemplano una introduzione alle funzioni come rappresentazione di fenomeni tratti dal reale, ed anche un loro approccio come oggetto matematico. Estremamente varie e complesse sono le problematiche didattiche connesse all'introduzione di tale concetto, in particolare, si pone necessaria una scelta didattica, e prima ancora culturale, riguardo al ruolo del grafico. Di fronte alla molteplicità di registri di rappresentazione possibili per una funzione (verbale, algebrico, tabulare e grafico), un ruolo fondamentale ha sicuramente quello grafico, ma se non gestito sapientemente, questo può costituire un ostacolo epistemologico per la costruzione del concetto di funzione nella sua più moderna accezione ([16]). Nell'ambito del nostro gruppo si pone il problema di progettare un piano di innovazione sul tema per l'intero triennio, con sequenze didattiche mirate a sviluppare ciascuna di tali rappresentazioni ed in particolare a favorirne il coordinamento, nell'ottica di gettare le basi per un'algebra delle funzioni. Questo segmento del progetto è sviluppato essenzialmente nelle classi di R. Iaderosa ([17]), tuttavia quanto da lei realizzato è apprezzato e preso in considerazione per la futura sperimentazione nelle proprie classi da altri afferenti al gruppo, inizialmente riluttanti per la difficoltà intraviste.

Il piano didattico di innovazione è così articolato:

Classe prima: evidenziazione delle difficoltà che hanno mediamente all'inizio della scuola media allievi della fascia medio-bassa nelle seguenti prestazioni, relativamente al tema in esame; lettura e utilizzo di simboli letterali (lettera come generalizzazione del numero), individuazione di relazioni tra numeri, esplicitazione in termini verbali; coordinamento registri numerico/letterale e verbale nei due sensi; interpretazione verbale e lettura di dati da grafici rappresentanti leggi non codificate.

Classe seconda: individuazione ed esplicitazione di relazioni nel registro verbale e numerico/algebrico; riconoscimento ed interpretazione di grafici per quello che esprimono rispetto alla variabilità delle grandezze in esame, senza leggi formalizzate; coordinamento tra il registro verbale e algebrico e quello grafico: rappresentazione di relazioni, espresse in varie forme (passaggio forma implicita-esplicita; diretta-inversa, ecc.); analisi e confronto di rappresentazioni grafiche provenienti da diverse formulazioni della stessa relazione algebrica; primi tentativi di formalizzare relazioni in chiave algebrica attraverso l'osservazione di dati numerici; abbinamento grafico-legge in maniera intuitiva, non formalizzata; interpretazione di grafici che rappresentino prevalentemente fenomeni fisici.

Classe terza: trasformazione algebrica di funzioni matematiche nelle tre forme possibili, le due esplicite e quella implicita; riconoscimento di alcune forme fondamentali di funzioni (da un punto di vista strutturale): rapporto costante, somma costante, prodotto costante, e abbinamento di ciascuna di queste forme con un particolare grafico; analisi di ciascuna di queste classi di funzioni dal punto di vista algebrico; interpretazione in chiave geometrica di ciascun elemento della formula (il coefficiente numerico, il suo segno, ecc.).

([16]) Al riguardo concordiamo con Duval (1994) sulla estrema importanza della distinzione tra concetti matematici e loro rappresentazioni e sul fatto che è solo dalla coordinazione dei diversi registri che si può arrivare ad una reale concettualizzazione.

([17]) Importante al riguardo è stato lo studio del progetto inglese «*NMP Mathematics for Secondary School*» curato da Harper (1987) nelle parti dedicate a questo tema.

In Iaderosa & Malara (1999) sono riportate in dettaglio le concezioni rilevate negli allievi e le difficoltà da loro incontrate in alcune sequenze sperimentate in seconda e terza. Per la classe seconda queste riguardano il coordinamento tra la rappresentazione grafica di un fenomeno e l'analisi di questo fenomeno espressa verbalmente ed in particolare il riconoscimento di ciò che dati grafici esprimono rispetto alla variabilità delle grandezze in esame, senza leggi formalizzate.

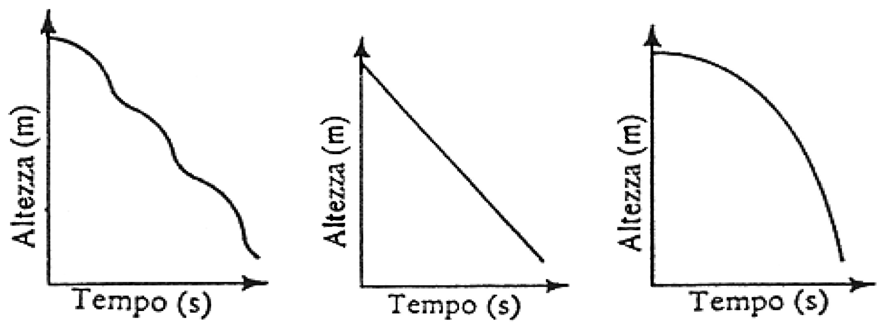
TAVOLA 8

Quesito (classe seconda)

Questa tabella si riferisce ad un lancio in caduta libera di un paracadutista da un aereo:

tempo (s)	0	5	10	15	20
altezza (m)	3000	2875	2500	1875	1000

a) quanto è alto l'aereo da terra nel momento in cui inizia la caduta?
b) di quanti metri è sceso il saltatore nei primi 5 secondi?
c) uno di questi grafici descrive il salto. Quale? Perché?



(a) (b) (c)

Per la classe terza riguardano: i) il coordinamento tra le varie rappresentazioni in chiave algebrica, verbale, grafica, tabulare; ii) l'utilizzo del grafico per concretizzare il concetto di famiglia di curve e mettere così in luce il ruolo di variabile - parametro; iii) l'interpretazione in termini grafici dei vari elementi algebrici presenti nella formula (segni, coefficienti numerici, operazioni, lettere, ecc.); 4i) la rilettura di una formula a partire dal grafico ed evidenziazione delle differenze di significato tra formule «analoghe» (es. $y = 3/x$; $y = x/3$); 5i) trasformazione algebrica di funzioni matematiche nelle tre forme possibili, le due esplicite e quella implicita (nella classe terza).

A titolo esemplificativo riportiamo in tavola 8 un esempio di problema proposto in classe seconda e una sintesi delle varie interpretazioni degli allievi.

In riferimento al quesito riportato, il grafico n. 3 viene riconosciuto come quello corrispondente al moto del paracadutista da 16 allievi su 23. Quelle che seguono sono alcune delle giustificazioni più significative date:

– *perchè con l'aumentare dei secondi aumenta la velocità anche perchè secondo me si muove in modo rettilineo* (Ivan)

– *perchè fa vedere tutto il volo precipitoso* (Vincenzo)

– *il grafico che descrive il salto è il 3° perchè in caduta un oggetto cade molto velocemente, quindi man mano che vanno avanti i secondi il paracadutista scende molto velocemente, si può dire che scende quasi in picchiata* (Alessia)

– *Il grafico giusto è il 3° perchè il paracadutista parte da in alto e va in basso costantemente* (Sara).

Ivan, Vincenzo e Alessia leggono evidentemente la traiettoria del moto, mentre Sara attribuisce una velocità costante al moto di caduta. Altri allievi invece cadono in errore perchè, pur costruendo direttamente il grafico a partire dai valori della tabella, rappresentano in maniera scorretta le quote (non rispettando la scala), ponendo tutti i valori a distanza costante come i tempi, e quindi ottengono come grafico una retta.

I risultati ottenuti in classe terza, seppure incoraggianti per gli aspetti di coordinamento tra i registri grafico e algebrico, sono per alcune questioni problematici e, soprattutto per l'aspetto di coordinamento funzione/funzione inversa, richiedono un approfondimento, anche per la scelta metodologica fatta dall'insegnante riguardo il sistema di riferimento.

Un'altra questione problematica emersa su cui occorrerà tornare riguarda l'armonizzazione tra i tempi ottimali sul versante didattico e della ricerca ([18]).

Contributi degli insegnanti al progetto di ricerca

Il contributo degli insegnanti allo sviluppo del progetto è notevole e differenziato. Una volta che le ipotesi di ricerca sono chiarite e le linee di intervento nella classe sono concordate in relazione a specifici obiettivi essi spesso elaborano autonoma-

([18]) Una interessante analisi sulle influenze reciproche delle diverse variabili temporali che intervengono nella attuazione delle ricerche italiane di innovazione si trova in Arzarello (1999).

mente i quesiti che intendono sottoporre agli allievi. Prima della somministrazione tali quesiti vengono discussi all'interno del gruppo per valutarne apriori potenzialità e difficoltà; l'intervento del direttore di ricerca in questi casi può essere quello di evidenziare aspetti carenti delle prove proponendone raffinamenti o viceversa di approvazione e apprezzamento per la loro qualità. Ad esempio alcune interessanti prove finalizzate a promuovere l'argomentazione in aritmetica (riportate in Malara & Gherpelli 1996) e le prove sui razionali riportate in tavola 7 sono concepite da L. Gherpelli, e subito apprezzate per la loro originalità ed efficacia. Ancora, i quesiti riportati in tavola 6, sulla generazione di espressioni a partire da date per trasferimento analogico dalla notazione additivo-moltiplicativa alla moltiplicativa-esponenziale e viceversa, sono concepiti da R. Iaderosa e, come già detto, considerati dagli insegnanti in modo diverso: alcuni li apprezzano principalmente come strumento di ricerca, altri li considerano addirittura improponibili per la loro poca significatività agli occhi degli allievi e per la loro opzionalità in quadro didattico generale sullo sviluppo del pensiero algebrico ([19]).

In generale tuttavia la maggior parte dei quesiti da porre in sperimentazione sono selezionati tra una serie di proposte portate nel gruppo dai diversi afferenti dopo aver svolto un'attenta analisi sulle possibilità e difficoltà che offrono agli allievi, ad esempio ciò avviene nel caso delle prove riguardanti l'approccio alla dimostrazione, dove si è in particolare discusso delle difficoltà di elaborazione sintattica delle espressioni nate dalla traduzione delle ipotesi e di interpretazione delle loro trasformate ai fini di giungere alla tesi, o nel caso della risoluzione dei problemi algebrici.

Particolare attenzione si pone nella formulazione dei quesiti, privilegiando più l'immediatezza della comunicazione che la perfezione linguistica. A volte alcuni quesiti vengono formulati (o riformulati) utilizzando il gergo dei ragazzi o particolari codici di classe. Un esempio di ciò si rileva nei quesiti 1 e 5 di tavola 3 dove l'insegnante utilizza il termine «calcolare» impropriamente per il tipo di produzione che si vuole promuovere (verbalmente concordata con gli studenti) ma che ritiene neutro ai fini delle difficoltà rispetto ad altri termini più appropriati ([20]). Analogamente nei quesiti di tavola 7 l'insegnante utilizza un codice grafico inusuale, specificamente da lei concepito per far operare simultaneamente gli allievi sulla semplificazione

([19]) Questa diversità di giudizi dipende dal retroterra culturale degli insegnanti e dalle conseguenti loro concezioni sul particolare argomento in esame. Questo pone in luce l'autenticità del dibattito culturale in seno al gruppo stesso e l'autonomia con cui i singoli partecipanti vivono all'interno del gruppo il loro ruolo.

([20]) L'uso di questo termine è stato oggetto di discussione in seno al gruppo ma difeso e mantenuto dall'insegnante per i motivi su esposti.

di frazioni e sulla generazione di frazioni equivalenti, con l'obiettivo di unificare attività solitamente vissute come separate.

Anche quesiti proposti dal direttore della ricerca sono sottoposti a vaglio stretto, spesso quando accettati, sono rimaneggiati nel testo, nel senso sopradetto, per renderlo più agibile agli allievi. Accade anche che sue proposte vengano rifiutate perché considerate troppo avanzate e anche lontane dallo stile di attività solitamente affrontate nelle classi; questo avviene, per esempio, in riferimento ad alcune interessanti schede di lavoro, tratte dal progetto inglese NMP, finalizzate a confrontare tra loro grafici riguardanti uno stesso fenomeno fisico studiato da punti di vista diversi, considerando la relazione tra varie coppie di grandezze in gioco. Ancora nell'affrontare la costruzione del concetto di numero razionale, il direttore di ricerca sottolinea l'opportunità di caratterizzare le classi di frazioni equivalenti affrontando con gli allievi, a partire da casi particolari, la dimostrazione del seguente enunciato «se *la frazione c/d* è equivalente alla *frazione ridotta a/b* allora c/d è ottenibile da a/b per moltiplicazione dei suoi termini per uno stesso numero naturale non nullo» ([21]). Questa proposta è scartata dagli insegnanti, perché considerata difficile persino limitatamente a casi particolari, nonostante la semplicità dei concetti in gioco e le esperienze degli allievi nell'uso delle lettere e nell'applicazione del principio di sostituzione.

C'è da rilevare tuttavia che la nostra eperienza mostra che proposte inizialmente rifiutate con il passare del tempo sono riconsiderate dagli insegnanti e poste in sperimentazione nelle classi.

Va poi considerato il grande ruolo di questi ultimi nello sviluppo delle discussioni di classe (di avvio, di costruzione, di bilancio ed istituzionalizzazione), nel delineare le personalità dei singoli allievi e nel valutare l'incidenza del contributo da loro dato nelle attività collettive, anche in riferimento al loro carattere. Nella conduzione di tale lavoro questi sono in grado di svolgere con buon controllo il doppio ruolo di partecipante ed osservatore (Eisenhart 1988) riuscendo generalmente ad esercitare la separazione tra soggetto osservante e soggetti osservati nella loro relazione

---

([21]) Questi sarebbero i passi dimostrativi da sviluppare con gli allievi:

Passo 1: partire da una frazione particolare, ad esempio 3/7, supporre che 3/7=c/d e tradurre in attività collettiva, la condizione in 3d=7c. Provare poi che esiste un numero mediante il quale c e d sono esprimibili rispettivamente come multipli di 3 e 7. Ciò che occorre utilizzare al riguardo è che: i) se 3 è divisore del prodotto 7c, poiché non lo è di 7, deve essere divisore di c; ii) è possibile esprimere c come 3 per qualche altro numero, indicatolo con q, si ha c=3q; iii) sostituendo nell'uguaglianza 3d=7c si ottiene 3d=7x3q e per cancellazione si ottiene d=7q.

Passo 2. Generalizzare il risultato sostituendo 3/7 con una frazione ridotta qualsiasi a/b ripercorrendo il ragionamento fatto.

dialogica (Arzarello 1997). Tuttavia le documentazioni di queste attività, non sempre sono esaustive, ad esempio, come precisato in Malara (1999b), spesso la loro autonomia li porta a dare poca attenzione alla pianificazione comune dei cannovacci di discussione, a limitare la registrazione delle discussioni (spesso preferiscono documentarle attraverso loro diari, a volte ricostruiti sul ricordo, piuttosto che attraverso la loro registrazione audio); a rifiutare l'intervento di un osservatore muto (che viene visto come elemento di inibizione e/o disturbo); ad evitare una analisi globale congiunta dei protocolli (solitamente, anche a causa della loro numerosità, li preselezionano e predispongono all'analisi congiunta solo dei prototipi).

Circa la valutazione degli elaborati tuttavia il loro contributo è prezioso e insostituibile per la diretta conoscenza di chi lo produce ed in particolare dello stato in cui a quel momento si trova, al di là della valenza dell'analisi svolta dal direttore della ricerca. Un interessante esempio sui diversi punti di vista con cui un medesimo protocollo può essere valutato e dell'importaza di valutazioni congiunte è riportato in Malara & Iaderosa (1999a). Al riguardo ci sembra interessante riportare qui quanto scritto da Iaderosa in Garuti & Iaderosa (1999)

> «*sottolineiamo, in quanto lo abbiamo verificato direttamente, quanto sia necessario integrare più strumenti valutativi, ai fini della lettura e interpretazione dei risultati in attività di ricerca, quanto sia importante la complementarietà tra la lettura, esterna e certamente più oggettiva del ricercatore e quella non spersonalizzata dell'insegnante, che conosce e ha vissuto in prima persona le dinamiche che si sono create nella classe e che possiede la capacità di leggere tra le righe il percorso del suo allievo, di andare al di là dei termini, a volte impropri che egli usa, per intuire e valutare, in corrispondenza delle sue difficoltà e potenzialità, il percorso mentale che egli sta compiendo. Tutto ciò, se integrato equilibratamente con strumenti e letture oggettive dei risultati, riteniamo che aggiunga maggiore scientificità alla valutazione.*

Non va trascurato infine il loro contributo al momento iniziale, nella valutazione e circoscrizione di specifici problemi di ricerca, nella formulazione delle ipotesi da verificare ecc., e soprattutto al momento finale, nella stessa redazione di parti importanti dei report di ricerca.

Accanto ai contributi positivi andrebbero però anche considerati i limiti che essi pongono allo sviluppo del progetto. Come sottolineato in Malara & Iaderosa (1999a) una volta messe a fuoco e concordate nel gruppo le linee guida per la sua realizzazione, nell'attuazione pratica, al di là delle difficoltà di tipo organizzativo vengono alla luce questioni nodali, quali: la formazione culturale degli insegnanti (alcuni dotati la laurea in matematica, altri in discipline scientifiche diverse), le loro radicate convinzioni sul piano didattico (tradizione di insegnamento, scansione nella programmazione, spazi diversi dati alle attività ecc.), gusti personali, e cosa più importante, il diverso modo di concepire il loro ruolo (chi più insegnante, chi più ricercatore, chi in bilico fra i due ruoli). Tutte queste questioni vengono ad incidere sia sulla scelta e condivisione delle attività oggetto di sperimentazione sia sulle modalità di realizzazione della ricerca stessa (gestione della discussione di classe, raccolta analisi e classificazione dei protocolli, categorizzazione dei comportamenti degli allievi, ecc.).

Ad esempio, per quanto riguarda gli aspetti disciplinari non risulta possibile pianificare interventi didattici in classe prima (allievi di 11-12 anni) coinvolgenti gli interi relativi per la convinzione di alcuni docenti dell'importanza di ripercorrere nell'insegnamento lo sviluppo storico dei concetti, riflesso dalla tradizione d'insegnamento.

Ancora, non è possibile con alcuni insegnanti affrontare certe questioni di tipo sintattico e strutturale, quali quelle studiate in Malara & Iaderosa (1999b), per la poca sensibilità di alcuni verso problematiche inerenti questioni strutturali in algebra e nella convinzione di una loro elevata difficoltà per il livello medio degli allievi.

Analogamente, per questioni legate prevalentemente alla nostra matrice culturale, non è ancora possibile dare spazio ad attività di modellizzazione matematica rivolte allo studio delle funzioni lineari e quadratiche e della loro rappresentazione grafica, come ormai molte delle ricerche di area anglossasone suggeriscono, ricerche che aprono interessanti scenari di studio nella classe sia per la rivisitazione dell'algebra elementare (con, ad esempio, la visione della risoluzione di una equazione come ricerca degli zeri della funzione differenza delle due costituenti i membri della equazione e la visione dell'incognita come caso particolare della variabile), sia per aspetti culturalmente più avanzati, concernenti la struttura algebrica dell'insieme di tali funzioni, grazie anche all'uso delle calcolatrici grafiche che consentono una visione coordinata tra operazioni sulle funzioni e composizioni dei rispettivi grafici. Tra gli insegnanti del gruppo soltanto una (R. Iaderosa) dichiara di privilegiare questo secondo approccio proprio perché, venendo a focalizzarsi l'attenzione sul concetto di funzione, concetto difficile da conquistare nella sua complessità, ne favorisce nel lungo tempo una migliore acquisizione. Gli altri, ancora una volta, sottolineano l'importanza del ripercorrere il processo storico, privilegiando lo studio dei problemi verbali algebrici, importanti sia per gli aspetti di traduzione formale, sia per l'aspetto logico proprio dell'analisi e concatenamento delle informazioni, centrale nella più generale attività di problem solving.

Questo comporta, come si è visto, delle divaricazioni nell'ambito del progetto stesso e lo sviluppo di ricerche autonome da parte di alcuni insegnanti.

Pertanto, per quanto buoni i risultati raggiunti possano apparire, va considerato che essi sono strettamente dipendenti dalla personalità e sensibilità, culturale e umana, del singolo insegnante-ricercatore, e che non sono sempre comparabili tra loro anche se realizzati in classi parallele da insegnanti afferenti allo stesso gruppo.

Considerazioni conclusive

Quanto esposto, seppure per grandi linee, dà un'immagine della portata del lavoro sin qui realizzato ed anche della complessità di conduzione di una ricerca di innovazione secondo queste modalità, tipiche di molti nuclei di ricerca italiani, tanto da configurarsi all'estero come il modello italiano di ricerca.

Innanzi tutto lo sviluppo di un tale genere di ricerche richiede tempi lunghi di confronto tra le parti e non è esente da mediazioni culturali e didattiche con gli insegnanti (non va dimenticato che ciò che è oggetto di ricerca oltre essere gestito in prima persona dall'insegnante fa parte di una specifica programmazione di classe che deve aderire ad un quadro più generale riguardante l'insegnamento di tutte le aree della disciplina e deve tenere conto dei tempi didattici globali). Molto spesso poi ci si trova ad operare «senza rete», essendo l'oggetto di studio proprio i comportamenti di insegnanti ed allievi di fronte alle innovazioni e questo richiede a volte il ritorno sugli studi svolti per mettere a fuoco ed affinare questioni rimaste in ombra o risultate problematiche.

Da un punto di vista più generale, per le dinamiche di realizzazione e le variabili coinvolte le ricerche non possono certo considerarsi riproducibili in senso classico. Esse di fatto sono prototipi utili per dare nuove visioni ed indicare nuovi indirizzi alla gran parte degli insegnanti e sono interessanti come riferimento per chi senta l'esigenza di un approccio diverso e più appropriato a certi temi; la loro fruibilità tuttavia è legata alla capacità degli insegnanti di valutare ed apprezzare le questioni in gioco e, come sottolineato da Zan (1999) investe un aspetto quanto mai delicato: la questione della loro formazione.

Bibliografia

[1] F. Arzarello, *Assessing Long Term Processes in the Class of Mathematics: the Role of the Teacher as a Participant Observer*, Proc. SEMT 97, Praga 1997, 5-10.

[2] F. Arzarello, *Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia: un quadro di riferimento teorico*, Atti della I Scuola Estiva di Ricerca in Didattica della Matematica Italo-Portoghese-Spagnola (Santarem, Portogallo, luglio 1999) in corso di stampa .

[3] F. ARZARELLO, L. BAZZINI e G. CHIAPPINI, *L'Algebra come strumento di pensiero*, report al Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica (Pisa, 1992) ora in Collana TID-CNR, serie IDM, n. 6, 1994.

[4] N. BERNARDZ and L. JANVIER, *Emergence and Development of Algebra as a Problem Solving Tool: to ol: Continuities and Discontinuities with Arithmetic*, in Bernardz et al. (a cura di) *Approaches to Algebra, perspectives for research and teaching*, Kluver 1996.

[5] A. W. BELL, J. A. MALONE and P. C. TAYLOR, *Algebra-An exploratory teaching experiment,* Shell Centre, Nottingham, UK 1987.

[6] H. BOEDY-VINNER, *Analgebraic interpretations of algebraic expression. Functions or predicates?*, Proc. PME 19, **2** (1995), 42-49.

[7] Y. CHEVALLARD, *Le passage de l'aritmetique a l'algebre dans l'enseignement des mathematiques au college, second and third parts*, Petit X, **19** (1989-1990), 43-72; **23**, 5-38.

[8] R. DUVAL, *Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leurs apprentissage*, Proc. CIEAEM 46 **1** (1994), 222-233.

[9] J. P. DROUHARD and C. SACKUR, *Triple approach: a teoretical frame to interpret students' activity in algebra*, Proc. PME 21, **2** (1997), 225-232.

[10] M. A. EISENHART, *The Ethnographic Research tradition and the Mathematics Education Research*, Journal for Research in Mathematics Education **19** (2) (1988), 99-114.

[11] E. FISHBEIN, *The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity*, in Biehler R. et al. (a cura di) Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, Kluwer, Dordrecht, NL 1994, 231-245.

[12] E. FISHBEIN and A. BARACH, *Algorithmic models and their misuse in solving algebraic problems*, Proc. PME 17, **1** (1993), 162-172.

[13] E. FILLOY and T. ROJANO, *Solving Equations: The transition from arithmetic to algebra*, For the Learning of Mathematics **9** (1989), 19-25.

[14] R. GARUTI e R. IADEROSA, *Rilevanza della ricerca in didattica della matematica sulla qualità dell'apprendimento*, in Da Ponte J.P. & Serrasina, L. (a cura di) Educaçao Matemática em Portugal, Esphana e Italia, SPCE, Lisbona 1999, 313-322.

[15] L. GHERPELLI e N. A. MALARA, *Argomentazione in Aritmetica* in Basso et al. (a cura di) Numeri e Proprietà, CSU Parma, Parma 1994, 55-60.

[16] L. GHERPELLI e N. A. MALARA, *Il problema del passaggio aritmetica-algebra nella scuola media: Scene da una classe osservata nell'intero triennio*, Atti Conv. Naz. «Incontri con la Matematica», Castel S. Pietro Bologna 1998, 135-137.

[17] E. HARPER, (a cura di) NMP *Mathematics for Secondary school*, Longman, Essex, England 1987-88.

[18] R. IADEROSA e N. A. MALARA, *Analisi e valutazione delle difficoltà in un percorso di apprendimento nella scuola media finalizzato alla conquista del concetto di funzione nei suoi vari aspetti*, Atti del 3° Internuclei Scuola dell'obbligo, Vico Equense, Napoli, marzo 1999, in corso di stampa.

[19] K. KIERAN, *The Early Learning of Algebra: a Sctructurale Perspective*, in Wagner S. and Kieran K. (a cura di), Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, LEA, Reston Virginia 1989, 33-56.

[20] K. KIERAN, *Cognitive Processes involved in Learning School Algebra*, in Nesher P. & Kilpatrik J. (a cura di), Mathematics and Cognition, ICMI Study Series, Cambridge University Press 1990, 96-112.

[21] K. KIERAN, *The Learning and Teaching of School Algebra*, in Grouws D.A. (a cura di), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan, NY 1992, 390-419.

[22] K. KIERAN, *A functional approch to the introduction of algebra, some pros and cons*, Proc. PME 18, **1** (1994), 157-176.

[23] K. KIERAN, *The changing face of school algebra*, in Alsina C. et al. (a cura di), Proc ICME 8: selected Lectures, S.A.E.M. Thales 1998, 271-286.

[24] D. E. KUCHEMANN, *Algebra*, in Hart K. (a cura di) Children Understanding Mathematics: 11-16, Murray, London 1981.

[25] F. LOPEZ REAL, *Students'reasoning on qualitative changes in ratio: a comparison of fraction and division representations*, Proc. PME 22, **3** (1998), 224-230.

[26] M. MAC GREGOR, *Making Sense of Algebra, Cognitive Processes Influencing Comprehension*, Deakin University Press, Geelong, Victoria, Australia 1991.

[27] N. A. MALARA, *Il problema come mezzo per promuovere il ragionamento ipotetico e la metaconoscenza*, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate **16** (1993), 928-954.

[28] N. A. MALARA, *Mediating Theory and Practice: a case study*, in Bazzini L. (a cura di) Theory and Practice in Mathematics Education, ISDAF, Pavia 1995, 157-169.

[29] N. A. MALARA, *Algebraic thinking: how can it be promoted in compulsory schooling whilst limiting its difficulty?*, L'Educazione Matematica **XVIII** (V) **1** (1996), 80-99.

[30] N. A. MALARA, *Problemi nel passaggio Aritmetica-Algebra*, La Matematica e la sua Didattica **2** (1997),176-186.

[31] N. A. MALARA, *An aspect of a long term research on algebra: the solution of verbal problems*, Proc. PME 23, Haifa, Israel **3** (1999), 257-264.

[32] N. A. MALARA, *Il passaggio frazioni, frazioni algebriche, razionali: potenzialità e difficoltà nella messa in atto di un percorso innovativo di intreccio tra aritmetica ed algebra*, Atti del 3° Internuclei Scuola dell'obbligo, Vico Equense, Napoli 1999, in corso di stampa.

[33] N. A. MALARA and L. GHERPELLI, *Argumentation and proof in the Elementary Number Theory in the triennium of middle school*, L'Educazione Matematica , **XVIII**, (V) **2** (1996), 82-102.

[34] N. A. MALARA and R. IADEROSA, *Theory and Practice: a case of fruitful relationship for the Renewal of the Teaching and Learning of Algebra*, in Jaquet F. (a cura di) Proc. CIEAEM 50 -Relationship between Classroom Practice and Research in Mathematics Education, (1999), 38-54.

[35] N. A. MALARA AND R. IADEROSA, *The Interweaving of Arithmetic and Algebra: Some Questions About Syntactic, Relational and Structural Aspects and their Teaching and Learning*, in Schwank, I. (a cura di) European Research in Mathematics Education 1, **2** (1999), 159-160.

[36] G. Navarra, *Percorsi esplorativi di avvio al pensiero algebrico attraverso problemi*, Atti del 3° Internuclei Scuola dell'obbligo, Vico Equense, Napoli 1999, in corso di stampa.

[37] G. Navarra e S. De Plano, *Gli insegnanti ricercatori in didattica della Matematica: alcune note informative su un isola forse poco conosciuta dell'oceano scuola*, Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate **14** (1992), 791-794.

[38] A. Sfard, *On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin*, Educational Studies in Mathematics **22** (1991), 1-36.

[39] A. Sfard, *The Gains and Pitfalls of reification: The case of Algebra*, Educational Studies in Mathematics **26** (1994), 191-228.

[40] M. Yerushalmy, *Emergence of new schemes for solving algebra word problems: The impact of technology and the function approach*, Proc. PME 21, **1** (1997), 165-178.

[41] R. Zan, *La qualità della ricerca*, in Zan, R.: 2000, in Actas I Escola de Verão de Educação Matematica, Santarem, Portugal 1999, 281-292.

Abstract

We trace an overview on our project for the renewal of the teaching and learning of algebra in middle school, aimed at an approach of algebraic language for the modelization and at giving meaning and motivation to the study of the objects of Algebra. Particularly we scketch the main results of the studies realized either from the teachers' point of view or from the pupils' one. Moreover we recall the role of the teachers in the development of the project and we finish with some considerations on its fruibility at large.

* * *