

BRUNO D'AMORE (*)

«**Concetti**» e «**oggetti**» in **Matematica** (**)

In memoria di Francesco Speranza

Teorie «realiste» vs teorie «pragmatiche»

Negli anni '70, le domande sulla natura cognitiva dei concetti matematici e del significato degli oggetti matematici presero una direzione completamente diversa da tutte le precedenti⁽¹⁾. Si potrebbe far risalire questa svolta, che taluni chiamano «antropologica», a studi di Dummet:

«Una teoria del significato è una teoria della comprensione; cioè: quello di cui una teoria del significato deve rendere conto è ciò che si conosce quando si conosce il linguaggio, cioè quando si conoscono i significati delle espressioni e dei discorsi del linguaggio»,

dichiarava Dummet nel 1975 (Dummett, 1991).

Pochi anni dopo, nel 1980, Brousseau si chiedeva:

«Quali sono le componenti del significato deducibili dal comportamento matematico che si osserva nell'allievo? Quali sono le condizioni che portano alla riproduzione di un comportamento mantenendo lo stesso significato?» (Brousseau, 1981).

(*) Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università, Piazza di Porta S. Donato 5, 40126 Bologna, Italia.

(**) Ricevuto il 10 Gennaio 2000. Classificazione AMS 97 C 50, 97 D 20.

⁽¹⁾ Si veda (D'Amore, 2001) per una trattazione piuttosto vasta; il presente testo è il sunto con alcune variazioni di un paio di paragrafi di quello.

Non sarà, per caso, che esista una «varietà didattica» del concetto di senso, specifica per la matematica, mai studiata, mai evidenziata finora, in linguistica o in psicologia? (Brousseau, 1986).

L'accentuazione del bisogno di studi sui concetti centrati sui processi di apprendimento è fatta anche da Sierpinska (1990):

«Comprendere il concetto sarà (...) concepito come l'atto di acquisire il suo significato. Tale atto sarà probabilmente un atto di generalizzazione e sintesi di significati in relazione con elementi particolari della "struttura" del concetto (la "struttura" del concetto è la rete di significati degli enunciati che abbiamo considerato). Questi significati particolari devono essere acquisiti con atti di comprensione. (...) La metodologia degli atti di comprensione si preoccupa principalmente del processo di costruire il significato dei concetti».

Siamo di fronte alla necessità di far luce sulla natura del significato, confrontando due categorie distinte nelle quali le teorie epistemologiche possono essere divise: teorie realiste (o figurative) e pragmatiche (divisione già apparsa in Kutschera, 1979).

Nelle *teorie realiste* il significato è

«una relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali che esistono indipendentemente dai segni linguistici; di conseguenza suppongo un realismo concettuale» (Godino, Batanero, 1994).

Come già asseriva Kutschera (1979),

«Secondo questa concezione il significato di un'espressione linguistica non dipende dal suo uso in situazioni concrete, bensì avviene che l'uso si regga sul significato, essendo possibile una divisione netta fra semantica e pragmatica».

Nella semantica realista che ne deriva, si attribuiscono alle espressioni linguistiche funzioni puramente semantiche: il significato di un nome proprio (come «Bertrand Russell») è l'oggetto che tale nome proprio indica (in tal caso Bertrand Russell); gli enunciati atomici (come «A è un fiume») esprimono fatti che descrivono la realtà (in tal caso A è davvero il nome di un fiume); i predicati binari (come «A legge B») designano attributi, quelli indicati dalla frase che li esprime (in questo caso la persona A legge la cosa B). Dunque, ogni espressione linguistica è un attributo di certe entità: la relazione nominale che ne deriva è l'unica funzione semantica delle espressioni.

Si riconoscono qui le posizioni di Frege, di Carnap, del Wittgenstein del *Tractatus*.

Una conseguenza di questa posizione è l'ammissione di una osservazione scien-

tifica (all'un tempo dunque empirica e oggettiva o intersoggettiva) come potrebbe essere, ad un primo livello, una logica degli enunciati e dei predicati.

È a mio parere ovvio che analisi di questo tipo devono essere fatte unendo (e quasi confondendo) l'ambito epistemologico e quello didattico, a conferma del fatto che non esistono *due* filoni di studio e ricerca, ma un solo grande interesse di fondo, quello epistemologico, al quale quello didattico apporta contributi decisivi.

Dal punto di vista che a noi qui preme di più, se andiamo ad applicare i supposti ontologici della semantica realista alla Matematica, se ne trae necessariamente una visione platonica degli oggetti matematici: in essa nozioni, strutture etc. hanno una reale esistenza che non dipende dall'essere umano, in quanto sono appartenenti ad un dominio ideale; «conoscere» da un punto di vista matematico significa scoprire enti e loro relazioni in tale dominio. Ed è pure ovvio che tale visione comporta un assolutismo della conoscenza matematica in quanto sistema di verità sicure, eterne, non modificabili dall'esperienza umana, dato che sono ad esse precedenti o, almeno, ad esse estranee e da esse indipendenti. Posizioni di questo tipo, seppure con diverse sfumature, furono sostenute da Frege, Russell, Cantor, Bernays, Gödel, ...; e trovarono violente critiche [il convenzionalismo di Wittgenstein ed il quasi empiricismo di Lakatos: si vedano Ernest (1991) e Speranza (1997)].

Nelle *teorie pragmatiche* le espressioni linguistiche hanno significati diversi a seconda del contesto in cui si usano e quindi risulta impossibile ogni osservazione scientifica in quanto l'unica analisi possibile è «personale» o soggettiva, comunque circostanziata e non generalizzabile. Non si può far altro che esaminare i diversi «usi»: l'insieme degli «usi» determina infatti il significato degli oggetti.

Si riconoscono qui le posizioni del Wittgenstein delle *Ricerche filosofiche*, quando ammette che la significatività di una parola dipende dalla sua funzione in un «gioco linguistico», dato che in esso ha un modo d'«uso» ed un fine concreto per il quale essa è stata appunto usata: la parola, dunque, non ha di per sé un significato, e tuttavia può essere significativa.

Gli oggetti matematici sono dunque simboli di unità culturali che emergono da un sistema di utilizzazioni che caratterizzano le pragmatiche umane (o, almeno, di gruppi omogenei di individui) e che si modificano continuamente nel tempo, anche a seconda dei bisogni. Di fatto, gli oggetti matematici ed il significato di tali oggetti dipendono dai problemi che in matematica si affrontano e dai processi della loro risoluzione.

Credo si possa sintetizzare quanto sopra detto in una tabella come la seguente:

	TEORIE «REALISTE»	TEORIE «PRAGMATICHE»
significato	relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali, indipendenti dai segni linguistici	dipende dal contesto e dall'uso
semantica <i>vs</i> pragmatica	divisione netta	non divisione o divisione sfumata
obiettività o intersoggettività	totale	mancante o discutibile
semantica	le espressioni linguistiche hanno funzioni puramente semantiche	le espressioni linguistiche e le parole hanno significati «personali», sono significative in opportuni contesti, ma non hanno significati assoluti, di per sé
analisi	possibile e lecita: la logica, per esempio	possibile solo un'analisi «personale» o soggettiva, non generalizzabile, non assoluta
conseguente visione epistemologica	concezione platonica degli oggetti matematici	concezione problematica degli oggetti matematici
conoscere	scoprire	usare in opportuni contesti
conoscenza	è un assoluto	è relativa alla circostanza ed all'uso specifico
esempi	il Wittgenstein del <i>Tractatus</i> , Frege, Carnap [Russell, Cantor, Bernays, Gödel]	il Wittgenstein delle <i>Ricerche Filosofiche</i> [Lakatos]

La svolta «antropologica»: significato istituzionale e personale degli oggetti matematici

È nella direzione pragmatista, che si inserisce la definizione di Chevallard (1991) di oggetto matematico: un oggetto matematico è

«un emergente da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali che si scompongono in differenti registri semiotici: registro orale, delle parole o delle espressioni pronunciate; registro gestuale; dominio delle iscrizioni, ovvero ciò che si scrive o si disegna (grafici, formule, calcoli, ...), vale a dire, registro della scrittura»;

essendo il «praxema» un oggetto materiale legato alla prassi, l'oggetto è allora un «emergente da un sistema di praxema». In questa accezione, non ha più molto interesse la nozione di significato di un oggetto quanto piuttosto quella di *rappor*t à l'*objet*, rapporto, relazione all'oggetto. Su tale idea poggia la costruzione che Chevallard fa della sua «teoria della conoscenza», o meglio di una sua «antropologia cognitiva», all'interno della quale si può situare la didattica.

Ma allora è centrale la persona (o l'istituzione, come insieme di persone) che si mette in relazione all'oggetto, e non l'oggetto in sé:

«Un oggetto esiste dal momento in cui una persona X (o una istituzione I) riconosce questo oggetto come esistente (per essa). Più esattamente, si dirà che l'oggetto O esiste per X (rispettivamente per I) se esiste un oggetto, rappresentato da $R(X, O)$ (rispettivamente $R(I, O)$) e detto relazione personale da X ad O (rispettivamente relazione istituzionale da I ad O)» (Chevallard, 1992).

Questa posizione ha segnato una svolta interessante all'interno delle cornici teoriche nelle quali si situa ogni ricerca in Didattica della Matematica, tanto più se si sottolineano i successivi studi compiuti da più Autori, per chiarire e rendere operative le nozioni di Chevallard, creando strumenti concettuali adeguati e paragonandoli a quelli messi in campo da altre posizioni al riguardo.

Per esempio, una chiarezza esemplare proviene dagli studi di Godino e Batanero (1994) perché in essi si definiscono in maniera rigorosa tutti i termini della questione: che cosa significa «pratica», che cosa è una «pratica personale», che cosa è un'istituzione, che cosa una pratica istituzionale, che differenza c'è tra oggetti personali ed istituzionali e come si definisce ciascuno di essi, che cosa sono i significati di un oggetto personale e di un oggetto istituzionale, che legami ci sono tra significato e comprensione, ... Uno dei meriti di questo lavoro, al quale rinvio, consiste sia nell'aver fatto chiarezza terminologica, sia nell'aver fornito esempi adeguati, sia infine nell'aver messo in evidenza somiglianze e differenze tra varie teorie del significato.

Per voler dare, in un colpo solo, una caratteristica di tale posizione, nella formulazione di Chevallard-Godino-Batanero l'essenziale è l'attività delle persone messe di fronte alla risoluzione di campi di problemi (fenomenologie), dalla quale emergono gli oggetti (concetti, termini, enunciati, relazioni, teorie etc.), i quali sono relativi ai contesti istituzionali e personali. Tali contesti restano definiti secondo i campi di problemi che si hanno di fronte e gli strumenti semiotici disponibili.

Per spiegare l'enfasi con la quale si trattano i fenomeni tipici della cognizione umana nel lavoro di Godino e Batanero (1994), è bene evidenziare che, mentre nel testo di Chevallard (1992) si dà maggior peso al contesto istituzionale rispetto al personale, Godino e Batanero tendono a privilegiare la «sfera del mentale», del

soggetto umano, per tentare un equilibrio tra i due contesti e per evitare che la sfera del personale sia occultata dal campo istituzionale.

Concetti e oggetti

In questo paragrafo, proporrò alcune precisazioni terminologiche, considerazioni complementari e note cautelative.

A volte, in Matematica, si parla di «concetti» a volta di «oggetti». Che differenza c'è? Potrebbe essere il risultato di un vezzo dei matematici, ma si tratta invece di un motivo ben fondato, dato che si basa sui seguenti tre punti:

- ogni concetto matematico ha rinvii a «non-oggetti», dal punto di vista del realismo ingenuo; dunque la concettualizzazione non è e non può essere basata su significati che poggiano sulla realtà concreta dato che, in matematica, non sono possibili rinvii ostensivi;
- ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono «oggetti» da esibire in loro vece o a loro evocazione⁽²⁾; dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che, per vari motivi, soprattutto se sono a carattere linguistico, non possono essere univoci: dunque, in matematica, non c'è accesso sensibile (vista, tatto, ...) diretto agli «oggetti» ma solo a loro rappresentazioni semiotiche in diversi registri linguistici;
- si parla più spesso in matematica di «oggetti matematici» che non di concetti matematici in quanto in matematica si studiano *preferibilmente* oggetti piuttosto che concetti: «la nozione di oggetto è una nozione che non si può non utilizzare dal momento in cui ci si interroga sulla natura, sulle condizioni di validità o sul valore della conoscenza» (Duval, 1998).

Si aprono qui, allora, prospettive di analisi che mettono in relazione concetti, oggetti e registri semiotici, per le quali rinvio a D'Amore (2001).

⁽²⁾ Qui «oggetto» è ingenuamente inteso nel senso di «oggetto reale» o di «cosa». Quale sia il significato di questa parola («cosa») è espresso nella *Metafisica* di Aristotele, quando afferma che la «cosa», in quanto parte del reale, è ciò che presenta le tre caratteristiche seguenti: tridimensionalità; accessibilità sensoriale multipla (cioè di più sensi contemporaneamente) indipendente dalle rappresentazioni semiotiche; possibilità di separazione materiale e da altre parti della realtà, da altre «cose».

Conclusioni

Una riflessione matura mostra che è essenziale l'attività delle singole persone messe di fronte alle problematiche che fanno scaturire interpretazioni possibili di concetti come rapporti personali al sapere; in questo senso, una supposta scala gerarchica perde, a mio avviso, di senso; gli «oggetti» emergono dall'attività delle persone messe di fronte alla soluzione di problemi, addirittura indipendentemente da ogni contesto istituzionale; anzi, in un certo senso, privilegiando proprio i significati personali rispetto a quelli istituzionali.

Da questo punto di vista, non sembra aver senso parlare, per esempio, dell'«oggetto retta» (o dell'«idea di retta», o del «concetto di retta») come normalmente si fa: siamo evidentemente piuttosto costretti a parlare di «pluralità di oggetti»; non tanto dunque si tratta di una «scalata» verso un vertice, quanto di una pluralità di «oggetti» *diversi*, che hanno banalmente in comune un nome proprio, il quale però non identifica una sola entità, come nella visione che abbiamo chiamato «teoria realista», bensì il cui significato dipende dal contesto di uso, nella visione che abbiamo chiamato «teoria pragmatica».

Dunque, ogni concezione personale è, in questa visione, un «oggetto retta» (probabilmente, ad una più accurata analisi, si potrebbe scoprire che, in realtà, esso stesso è, a sua volta, una pluralità, diacronica o d'altro tipo, ...).

Ogni concezione raggiunta, provvisoria, è il risultato di un rapporto personale all'oggetto, ma, come abbiamo visto in Chevallard ed in Godino-Batanero, *l'oggetto è questo stesso rapporto personale*, non un supposto «oggetto in sé».

D'altra parte, lo stesso Wittgenstein insiste sul fatto che non si deve parlare di idee matematiche nel senso in cui, invece, si è soliti farlo, cioè come del risultato di un processo di astrazione, dato che questo è origine di gravi confusioni filosofiche, psicologiche [e didattiche, come mi suggerisce Juan Godino (in una lettera privata)]. Il Wittgenstein delle *Ricerche Filosofiche* insiste nel parlare di diversità di uso, o di usi diversi del «termine».

Nella posizione di Godino-Batanero, all'oggetto matematico Ox si propone di associare l'entità teorica «significato di Ox » (in realtà una classe di significati): si passa così dall'accentuazione posta sul «concetto», sulle sue definizioni e sulle regole d'uso, ad una nuova accentuazione posta invece sui campi di problemi, di pratiche, di tecniche, dalle quali emergono queste entità intensionali.

Mi pare di poter affermare che negli studi teorici di Educazione Matematica, nella ricerca in questo settore, nella pratica didattica, sia di fondamentale importanza identificare quali siano i problemi specifici, le attività pratiche, le attività tecniche etc. che, anche storicamente, hanno portato a far emergere ogni «concezione», ogni «oggetto», ogni «regola»; così come ha somma importanza stabilire la

sua reale o presunta dipendenza da contesti istituzionali (potrebbe aversi una ragione storica, o educativa, o strumentale etc., o tutte queste insieme).

Voglio esprimere i ringraziamenti più profondi all'amico e collega Juan Godino, dell'Università di Granada, che mi ha aiutato suggerendomi alcuni testi e accettando di leggere criticamente alcune precedenti versioni di questo lavoro.

E voglio dedicare il lavoro a Francesco Speranza che ne discusse con me alcuni punti nodali.

Bibliografia

- [1] G. BROUSSEAU, *Address of members of the G.R.D.M.*, (France) at the ICME IV, August 1980, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 2, 1 (1981), 130-135.
- [2] G. BROUSSEAU, *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7, 2 (1986), 33-115.
- [3] Y. CHEVALLARD, *Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique*, Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble, LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble 1991.
- [4] Y. CHEVALLARD, *Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par un approche anthropologique*, *Recherches en Didactique de la Mathématique* 12, 1 (1992), 73-112.
- [5] B. D'AMORE, *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora, Bologna 1999.
- [6] B. D'AMORE, *Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione «ingenua» in una teoria «realista» vs il modello «antropologico» in una teoria «pragmatica»*, *La Matematica e la sua didattica* 1 (2001), in corso di stampa.
- [7] A. A. E. DUMMETT, *Qué es una teoría del significado?* In: Valdés L. M. ed., *La búsqueda del significado*, Tecnos, Madrid 1991. (Si noti però che l'originale di questo lavoro è del 1975).
- [8] R. DUVAL, *Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet*, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 6 (1998), 139-163.
- [9] P. ERNEST, *The philosophy of mathematics education*, Falmer Press, London 1991.
- [10] J. GODINO e C. BATANERO, *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14, 3 (1994), 325-355. Traduz. italiana, Pitagora, Bologna 1999, come libro nella collana: Bologna-Querétaro.

- [11] J. GODINO e C. BATANERO, *The dialectic relationships among theory, development and practice in Mathematics Education: a meta-analysis of three investigations*, in: Malara N.A., ed. 1998, *An international view on didactics of mathematics as a scientific discipline*. Proceedings of WG 25 ICME 8, Sevilla July, Modena 1996, CNR-MURST-University of Modena. 13-22, Tr. it. *La matematica e la sua didattica* 4 (1998).
- [12] F. VON KUTSCHERA, *Filosofía del lenguaje*, Gredos, Madrid 1979.
- [13] A. SIERPINSKA, *Some remarks on understanding in mathematics*, *For the Learning of Mathematics* 10, 3 (1990), 24-36.
- [14] F. SPERANZA, *Scritti di Epistemologia della Matematica*, Pitagora, Bologna 1997.

Summary

In this article various interpretations of the terms «concept» and «object» in Mathematics are analysed, using the recent «anthropological» perspective, demonstrating how it could be useful to enter into a «pragmatic» theory.

* * *