Riv. Mat. Univ. Parma (6) **3*** (2000), 123-141

CARLO MARCHINI (*)

Mito, magia, ostensioni, teoremi, definizioni (**)

In memoria di Francesco Speranza

0 - Francesco Speranza raccontava che durante un esame di Geometria per Ingegneria, uno studente, che stava interrogando da tempo, gli aveva chiesto se per favore la smetteva di farlo ragionare, in quanto avrebbe preferito dimostrargli qualcuno dei teoremi previsti dal programma! Questo aneddoto mi ha dato da pensare ed alcune delle riflessione che qui presento hanno origine da tale episodio.

1 - Dove e quando gli studenti incontrano i teoremi? O forse, meglio, dove e quando gli studenti incontrano la parola *Teorema* e quelle ad essa collegate, *Proposizione, Corollario, Lemma, Dimostrazione, Definizione,* chiamate esplicitamente per nome?

Forse il primo è il Teorema di Pitagora, visto alla scuola media. Ma si tratta di un approccio "nominale" perché a quell'età non avrebbe neppure senso cercare di entrare nel sottile gioco sintattico che porta ad un teorema. Il teorema in questione viene "dimostrato" facendo ricorso ad esempi e verifiche. Bisogna poi aspettare vario tempo passando attraverso i *Principi, Leggi o Criteri* (Principio di identità

(*) Dipartimento di Matematica, Univ. di Parma, Via D'Azeglio, 85A, 43100 Parma, Italia; e-mail: carlo.marchini@unipr.it.

(**) Ricevuto il 18 settembre 2000. Classificazione AMS 00 A 35. Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del progetto nazionale di ricerca «Ricerche di Matematica ed Informatica per la Didattica» cofinanziamento del MURST.

dei polinomi, Principi di equivalenza delle equazioni e dei sistemi di equazioni, Legge di annullamento del prodotto, Criteri di similitudine dei triangoli, a volte visti come assiomi, altre volte visti come proprietà da provare. Alcuni studenti secondari che seguono i programmi Brocca nelle sperimentazioni in atto, familiarizzano col Principio di induzione). Nelle scienze diverse dalla Matematica, le *Leggi* sono più frequenti dei Teoremi o degli Assiomi, anche se spesso il ruolo delle leggi nella presentazione didattica è proprio quello di assiomi. Questo fa dubitare che il significato di Principio o Legge nelle cosiddette Scienze della natura non sia lo stesso usato in Matematica, oppure se queste omonimie non siano cause di confusione degli studenti.

Forse è più frequente incontrare Teorema e la sua "famiglia" nell'ambito geometrico, ammesso che venga svolta quella parte della Geometria sintetica che richiede un'esplicita individuazione di termini primitivi e assiomi, trattazione che per altro pare in disuso o molto ridotta nella pratica della didattica italiana e straniera.

In Geometria analitica si dimostrano vari risultati, ma in dipendenza dallo stile espositivo del testo utilizzato, spesso non è evidenziato che sono Teoremi. Più di frequente i risultati sono visti o presentati come *regole,* da imparare a memoria: ad esempio, due rette di equazione $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$ sono parallele se e solo se $m = m'$. Anche in Algebra le "regole" sostituiscono i teoremi: ad esempio le soluzioni dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, che nel caso di discriminante positivo sono ottenute come $x_{12} = \dfrac{-a + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, usando cioè la *formula* risolutiva. Analoghe situazioni si hanno in Trigonometria con le *formule* di bisezione o di prostaferesi. In questi casi l'apparato deduttivo che porta al risultato, strumento indispensabile per riottenere le formule per chi non ha memoria, spesso non viene messo in evidenza.

Non so quanti studenti, dopo avere incontrato il Teorema di Pitagora incontrano poi altri Teoremi, forse devono attendere l'Analisi coi Teoremi di Rolle, Lagrange e forse L'Hôpital (su alcuni testi chiamato *regola*). Ho intervistato un giovane studente di superiori che non ha ancora visto l'Analisi chiedendo di nominarmi un Teorema, la sua risposta: «Pitagora», vale a dire **il** Teorema per antonomasia, poi, scavando un poco sono apparsi i risultati sui triangoli visti in Geometria. La loro permanenza nella memoria è sicuramente inferiore anche perché non hanno un nome specifico che ne aiuti il ricordo. Questa intervista mi ha dato da pensare: credo che sia un atteggiamento abbastanza diffuso, non specifico dello studente intervistato. Forse l'uso di nomi, anche di "fantasia" per i risultati che vengono via via provati, potrebbe essere un sussidio didattico per facilitare l'individuazione e l'applicazione successiva dei teoremi.

2 - Il tipo di presentazione riduttiva che preferisce principi, regole, formule e quant'altro, continua anche nei corsi universitari di Matematica, cosiddetti di servizio. Una disabitudine così prolungata rischia di portare docenti e allievi a ritenere i teoremi e le loro dimostrazioni come qualcosa al di fuori della portata degli studenti stessi. Quando l'insegnante è costretto o sceglie di utilizzare un Teorema, spesso col nome di un insigne studioso, il suo pubblico lo guarda con un certo imbarazzo sentendo estraneo l'argomento usato e non comprendendone le motivazioni.

Dovevano sentirsi così gli antichi spettatori di commedie e tragedie quando in presenza di un groviglio inestricabile di situazioni, salutavano con soddisfazione l'intervento risolutore del dio, calato sul palcoscenico da artifici scenici, la *machina.*

Questo è un ruolo mitologico che il Teorema svolge ancora oggi e i teoremi, come gli dei antichi, vengono così collocati, nell'immaginario degli allievi, in un mondo inaccessibile e forse anche "irreale".

Il fatto poi che la comunicazione tra docente e studente si svolga sul piano verbale più che su quello fattuale, aumenta, se possibile, questi aspetti mitologici. La parola *mito* deriva da un'analoga parola greca che in Omero significa "parola" o "discorso" e secondo certi esegeti avrebbe originariamente indicato la parola nel senso antico, coincidente con l'essere. Solo in età classica, *mito* ha assunto il significato di racconto attorno a dei, esseri divini, eroi discesi nell'aldilà. Nell'ambito filosofico *mito* assume il significato di discorso che non richiede o non prevede dimostrazione, contrapposto a logos, nel senso di argomentazione razionale, cfr. Vattimo, 1986.

Se questo è il "contratto" che si instaura tra disciplina e studente, l'insegnante dovrebbe avere le stesse doti di affabulatore che avevano gli antichi bardi e non so quanti insegnanti siano "attrezzati" per svolgere questa funzione.

Una riprova di questa dimensione mitologica si ha quando un docente "affascina" l'uditorio in incontri di orientamento per la scelta dell'Università, trattando di idee e non di risultati espliciti e dimostrati in modo rigoroso. Nell'animo degli studenti è dunque presente un'aspettativa classificabile nella barocca teoria degli affetti come "meraviglia". È basandosi su tale aspettativa che a volte si invogliano gli studenti ad iscriversi ad un corso di laurea. La stessa "meraviglia" è usata talora dai divulgatori di risultati e discipline scientifiche.

3 - Ma c'è anche una magia dei Teoremi, se per magia si intendono gli atteggiamenti mentali e le pratiche rituali tendenti a dominare e a controllare la realtà quando ciò non è possibile farlo concretamente, o nei confronti di "potenze" non note, cfr. Vattimo, 1986. Il giovane vede l'insegnante destreggiarsi tra le difficoltà di risoluzione di problemi, muovendosi con disinvoltura e attingendo da insospettati "cassetti" della sua scrivania mentale, risultati vari e apparentemente non correlati tra loro per comporli poi in una trattazione che intuisce organica, anche se non giunge immediatamente ad apprezzarla. Di fronte a ciò lo studente prova nei confronti del docente una sorta di rispetto o timore analoghi a quelli che possono provare "clienti" di fattucchiere e maghi. E non per nulla si parla di *formula magica.*

Sia che i Teoremi vengano visti nella dimensione mitologica, sia che ottengano timore e rispetto come riti magici, il risultato è lo stesso: lo studente non può imporre a queste entità al di fuori di se stesso alcun controllo. I teoremi si accettano, ma non si costruiscono e tantomeno si dimostrano.

4 - Anzi in certi casi si rifiutano o si rimuovono. Sì, perché i Teoremi possono essere visti come una sorta di imposizione autoritaria che non tiene conto di attese o aspettative del giovane, cfr. Hanna, 1997. Anzi è raro, ma talora avviene, vedere che anche se un Teorema ha provato che una certa relazione tra enti matematici non può sussistere, lo stesso si fanno prove e verifiche per determinare improbabili controesempi. È per questo che ci sono tuttora alcuni che dimostrano il postulato delle parallele a partire dagli altri assiomi euclidei, altri prediligono la quadratura del cerchio con riga e compasso, e così via.

In questa ottica il docente è il braccio della autorità che impone i propri standard ai giovani. Ne conseguono manifestazioni di insofferenza reciproca e, come si diceva sopra, di rifiuto sul piano dei contenuti, rifiuto che può anche estendersi sul piano personale. In questo caso i teoremi vengono appresi a memoria, destino che spesso hanno anche le dimostrazioni che li accompagnano. La macchietta del professore (o meglio della professoressa) di Matematica come un non più giovane, occhialuto e arcigno giudice delle prestazioni, risente di questi aspetti, ed è assai diffusa nell'immaginario collettivo.

5 - Vediamo quando e come sono nati i Teoremi. Si diceva prima del Teorema di Pitagora (570-490 a.C.). Forse ancora più antico potrebbe essere il Teorema di Talete (VII-VI sec. a.C.). Non è però sicuro che possa essere così: ci sono papiri egiziani, che riportano esempi di applicazione del Teorema di Pitagora, non visto come Teorema, ma come proprietà di alcune figure. Lo sviluppo storico della matematica greca è bene narrata dal cosiddetto *Riassunto* o *Elenco dei geometri,* che si trova nel *Commento al I libro degli Elementi di Euclide* di Proclo (410-485). Qui se ne riportano brani, nella traduzione di Frajese, 1963:

«Poiché conviene considerare gli inizi delle arti e delle scienze nel periodo attuale, diciamo che molti narrano che la geometria sia stata trovata dapprima dagli Egiziani, prendendo origine dalla misura dei terreni. Era infatti necessario ciò, a causa della piena del Nilo, che cancellava i confini spettanti a ciascuno. E non vi è da meravigliarsi se dalla necessità (pratica) sorse l'invenzione di questa scienza e delle altre, poiché tutto ciò che "diviene" procede dall'imperfetto verso il perfetto: è verosimile dunque che il passaggio sia avvenuto dalla sensazione al ragionamento, e da questo all'intelligenza (pura). Dunque, come presso i Fenici per il commercio e le relazioni di affari ebbe principio l'esatta conoscenza dei numeri, così presso gli Egiziani sorse la geometria per la causa suddetta».

Segue una elencazione di nomi, alcuni ancora "famosi" oggi, anche a studenti di scuola superiore, altri meno noti ed altri ancora noti solo a specialisti di storia, e di cui purtroppo non sono rimaste opere. Riprendendo Proclo,

«Talete, per primo, essendo andato in Egitto, portò in Grecia questa scienza (la geometria), ed egli stesso trovò molte cose, e di molte indicò i princìpi a coloro che vennero dopo di lui, di alcune cose trattando in modo più generale, di altre in modo più sensibile».

In queste parole è indicato un modo di procedere nell'ambito geometrico: *trovare,* non *inventare,* ma (se la traduzione è corretta) da Proclo, filosofo neoplatonico sarebbe ben strano ritenere che la Matematica si costruisca (1). Da notare il fatto che alcuni risultati di Geometria vengano proposti in forma generale, altri in forma sensibile, vale a dire alcuni "dimostrati", altri "ostensi". Segue un elenco, in ordine quasi cronologico di nomi:

«Mamerco, [...] ricordato per il suo amore per la geometria e Ippia di Elide [che] si procurò fama in questa Scienza. Dopo di loro Pitagora trasformò questo studio in una forma di insegnamento liberale, investigando dall'alto i suoi principi, e indagando i teoremi astrattamente e intellettualmente: egli scoprì il fatto degli irrazionali e la costruzione delle figure cosmiche. [...] Anassagora di Clazomene si occupò di molte questioni di geometria, [...] Enopide di Chio, [...] dei quali Platone fece menzione [...] come di persone aventi (buona) fama in queste scienze. Dopo di lui Ippocrate di Chio, che scoprì la quadratura della lunula, e Teodoro di Cirene divennero celebri nella geometria. Ed anzi Ippocrate [...] fu il primo che scrisse gli *Elementi.* Platone, venuto dopo di costoro, fece prendere il massimo incremento alle altre scienze (matematiche) ed alla geometria, il (suo) grande amore verso di esse: ciò è manifesto poiché riempì i suoi scritti di considerazioni matematiche e dovunque destò ammirazione per questa scienza in coloro che studiano filosofia. In questo tempo vissero Leodamante di Taso, Archita di Taranto e Teeteto di Atene, dai quali furono accresciuti i teoremi e fatti progredire verso un insieme più scientifico.

Neoclide, più giovane di Leodamante, e il suo allievo Leone, aggiunsero molte nozioni a

(1) Ma d'allora non molto è cambiato: in una intervista di M. Emmer, E. De Giorgi affermava che i teoremi si scoprono, le dimostrazioni si inventano!

quelle (possedute prima di loro: così Leone compose *Elementi* migliori per quantità e necessità delle cose dimostrate e trovò i *diorismi,* cioè quando il problema in questione è possibile e quando è impossibile. Eudosso di Cnido, [...] per primo aumentò il numero dei teoremi detti generali e alle tre proporzioni ne aggiunse altre tre: fece inoltre progredire gli studi sulla sezione [...]. Poi Amicla di Eraclea [...] e Menecmo e [...] Dinostrato, ancora perfezionarono l'insieme della geometria. Teudia di Magnesia [...] compose anche buoni *Elementi*; rese inoltre più generali alcune cose (particolari). Così pure Ateneo di Cizico, [...] divenne celebre per la Matematica in generale e specialmente nella geometria. [...] Ermotimo di Colofone [...] trovò molte cose degli Elementi, e scrisse intorno ai *luoghi.* Filippo di Mende [...] fece ricerche [...].»

Questo lungo brano, una sorta di bibliografia ragionata sull'argomento, presenta, oltre all'interesse storico, una possibile risposta al quesito posto sulla nascita dei teoremi e delle dimostrazioni. È strana l'esclusione di Democrito che avrebbe scritto un testo sugli *Elementi,* circa un secolo prima di Euclide (cfr. Enriques, 1987). Forse il primo teorema degno di tal nome è quello di Pitagora. Nell'elenco di Proclo, almeno nella traduzione di Frajese, è assai interessante il passo relativo a Pitagora che per primo si pose il problema dell'insegnamento ed è forse a tale esigenza che si deve il tentativo di rendere accessibile anche ad altri la comprensione delle proprietà geometriche mediante la dimostrazione. Ad esempio Platone nell'*Eutidemo* dice

«Nessun'arte cacciatrice va oltre il cacciare e il prendere, e dopo che i cacciatori e i pescatori hanno preso ciò che hanno cacciato (o pescato), non possono servirsene, ma lo consegnano ai cuochi. Così i geometri, gli astronomi e i calcolatori sono anch'essi cacciatori: non creano essi le figure, ma trovano quelle esistenti. E poiché non sanno servirsene, ma soltanto scovarle, le consegnano ai dialettici perché si servano di ciò che essi han trovato: almeno quelli tra loro che non son del tutto privi di senno.» cfr. Frajese, 1963.

6 - Come visto prima si deve alla cultura greca la "invenzione" dei Teoremi e il *Riassunto* di Proclo fa ben comprendere come tale nozione si sia evoluta nel tempo, e nell'ambito di applicabilità, evoluzione che continua, si può dire, fino ad oggi. Nei *Dialoghi* di Platone si trovano esempi di complessi ragionamenti, sia in ambito puramente logico sia in contesti aritmetici o geometrici. Se tali tipi di argomentazione sono lo specchio di ciò che veniva provato dagli studiosi citati da Proclo, si può dire che la parola Teorema e quella collegata Dimostrazione vanno intesi in modi diversi da quelli intesi oggi.

Nel *Menone* di Platone si presenta la costruzione di un quadrato di area doppia di quello dato. Nel *Carmide* si ha un esempio di ragionamento per assurdo basato su una relazione d'ordine, nel *Teeteto* la presenza delle radici quadrate e cubiche, nell'*Ippia maggiore* il risultato della somma di due numeri irrazionali.

La forma più matura di queste argomentazioni si trova negli *Elementi* di Euclide. Lo stile espositivo di questo famoso testo, a lungo ritenuto un capolavoro di rigore, ha condizionato la presentazione dei risultati della Matematica.

Ma anche in questo caso forse è bene distogliere un attimo l'attenzione dai risultati matematici per cercarne le fonti. Sulle "origini" matematiche è assai esplicito Proclo, pur dimenticando Democrito, attribuendo alcuni risultati contenuti negli *Elementi* di Euclide a Ermotimo di Colofone, senza con questo sminuire l'importanza di Euclide, sia pure come sistematore di una gran mole di materiale in un *corpus* organico.

Si può confrontare la presentazione dell'opera di Euclide con gli *Analitici secondi* di Aristotele (cfr. Beth, 1959). Secondo lo stagirita una *Scienza deduttiva* è costituita da un insieme S di enunciati tale che:

I) Postulato di realtà. Ogni enunciato di S deve riferirsi ad uno specifico dominio di enti reali.

II) Postulato di verità. Ogni enunciato deve essere vero.

III) Postulato di deduttività. Se certi enunciati appartengono ad S, ogni conseguenza logica di questi enunciati deve appartenere a S.

IV) Postulato di evidenza (per termini). Ci sono in S un numero (finito) di termini tali che

(a) il significato di questi termini è ovvio e non richiede ulteriori spiegazioni (termini primitivi);

(b) ogni altro termine è definibile per mezzo di questi termini.

V) Postulato di evidenza (per assiomi). Ci sono in S un numero (finito) di enunciati tali che

(a) la verità di questi enunciati è ovvia e non richiede ulteriori dimostrazioni (assiomi);

(b) la verità di ogni altro enunciato appartenente ad S deve essere stabilita mediante l'inferenza dagli enunciati dati (teoremi).

Le scritte tra parentesi sono una mia interpolazione. È abbastanza chiaro che lo stile espositivo di Euclide, seppure con differenze anche notevoli, si è conformato alle prescrizioni aristoteliche. Secondo Clairaut l'adozione dello stile aristotelico è dovuto all'esigenza di Euclide di convincere sofisti ostinati che si facevano una gloria di rifiutare le verità più evidenti, cfr. Enriques, 1987. Val la pena di ricordare che Aristotele nacque nel 384 e morì nel 322 a.C., mentre Euclide fu attivo in Alessandria d'Egitto attorno al 300 a.C.; ciò mostra come lo strumento prescelto da Euclide fosse, per i tempi, assai aggiornato sulle ultime "novità" filosofiche. L'opera di Euclide ci è pervenuta in gran parte attraverso la redazione di Teone di Alessandria, padre della matematica Ipazia (morta nel 415 d.C.), ed anche da altri manoscritti quali un Codice Vaticano che secondo alcuni esegeti fa riferimento ad una fonte anteriore alla redazione di Teone, cfr. Enriques, 1923.

È sicuramente assai interessante osservare come negli *Elementi* si approdi ad un'importante sintesi tra aspetti di ascendenza platonica e aristotelica. In Euclide si può riscontrare quello che Enriques, 1987, chiama un «ingenuo realismo» di ascendenza platonica, da cui discende una manchevolezza nella teoria della definizione, soprattutto nelle celate pretese ontologiche che sono presupposte nel significato dei termini. D'altra parte l'impianto, si ribadisce, è quello di Aristotele, dato che

> «Anzitutto è da dire il soggetto e lo scopo di questo studio: il soggetto è la dimostrazione e lo scopo è la scienza dimostrativa» (Aristotele, *Analitici primi,* citato in Enriques, 1987).

In questo Euclide è un precursore, visto che la fusione esplicita di Accademia e Liceo avverrà solo molto più tardi nell'opera dei neoplatonici: Ammonio Sacca (prima metà del III sec. d.C.) e soprattutto Plotino (205-270). La sintesi euclidea è ancora oggi operante. Molti matematici sono realisti in senso platonico, ma la presentazione dei loro risultati di natura deduttiva si conforma alla impostazione aristotelica, facendo convivere così due tesi filosofiche che al tempo della loro formulazione parevano inconciliabili. Ma come per Pitagora anche per Aristotele l'aspetto didattico è essenziale. Secondo Barnes, 1975, citato in Cellucci, 1991:

> «la teoria non viene mai intesa come uno strumento per guidare o formalizzare la ricerca scientifica: riguardava solo l'insegnamento di fatti già acclarati.»

Questa conclusione può essere confermata da un passo degli *Analitici secondi* in cui Aristotele afferma:

> «Ogni conoscenza razionale, sia insegnata, sia acquistata, deriva sempre da conoscenze anteriori.» cfr. Enriques, 1987.

Tale interpretazione rafforza l'ipotesi che lo strumento dimostrativo sia un habitus prescelto per scopi di comunicazioni dai *dialettici,* sia ciò uno strumento didattico.

È facile criticare oggi la presentazione di Aristotele, per la confusione tra linguaggio e metalinguaggio, per la mancata differenza tra aspetti semantici e sintattici, per le ipotesi ontologiche sottintese e per il privilegio dato al linguaggio, visto come strumento di conoscenza con funzione universale. A ben guardare sotto alla presentazione degli *Analitici secondi* è nascosta quella che potrebbe essere la vera ragione dell'opera di Aristotele: il bisogno di "evitare" l'infinito, tenendo conto che l'accettazione dell'infinito stesso è causa di paradossi, da Zenone in poi. I termini primitivi (come gli assiomi) sono posti per evitare un regresso all'infinito che toglierebbe valore conoscitivo alla scienza; altrimenti per comprendere ciò di cui si parla si deve interpretare correttamente tutto ciò che serve per giungere alla sua definizione (dimostrazione), ma è impossibile in via di principio perché si dovrebbe avere una conoscenza infinita, mentre il compito delle definizioni e dei teoremi, in tale visione, è quella di servire come strumento per articolare una conoscenza *già posseduta,* per porre ordine ad una realtà che per altre strade è nota. È per questo che l'impianto dimostrativo e quello definitorio vengono ad essere fondati su una "realtà" esterna alla teoria, conoscibile con strumenti quali il buon senso o l'evidenza. In tal modo la costruzione assiomatica porta in sé una componente esperienziale. Questo ricorso all'empiria ha notevoli connotati didattici, e viene tuttora utilizzato nelle aule scolastiche.

Spesso persino nella formulazione dei teoremi si cerca di nascondere l'infinito: ad esempio il Teorema di Pitagora si trova su molti testi espresso come «In un triangolo rettangolo...» invece che «In ogni triangolo rettangolo...». Sembra forse una forma solo diversa nell'apparato linguistico, ma bisogna chiedersi se lo studente della scuola media interpreta «In un... » come in uno *generico* invece che in uno *specifico,* visto che poi il testo mostra spesso un solo triangolo rettangolo. Alcuni manuali presentano (forse per motivi di semplicità tipografica) un solo triangolo rettangolo isoscele! È chiaro che di fronte all'affermazione che una certa proprietà vale in ogni triangolo, ben presto ci si rende conto che non è possibile una verifica dei singoli casi. Lo stesso avviene per relazioni aritmetiche che andrebbero provate per infiniti esempi numerici. Credo che questo ruolo dei teoremi andrebbe messo in ampio risalto didattico.

D'altra parte anche le definizioni svolgono in questo contesto un ruolo ben preciso. Tralasciando il problema se le definizioni siano motivate *quid rei* o *quid nominis,* cfr. Borga e Palladino, 1997, esse vengono "costruite" dal basso partendo dai termini primitivi e se dal punto di vista logico sono non creative ed eliminabili, dal punto di vista epistemologico son creative e ineliminabili, cfr. Marchini, 1992.

Non è però vero che tutte le dimostrazioni "nascondano" l'infinito. In certi casi sarebbe possibile una dimostrazione ottenuta come verifica su un numero finito di casi. Ma quando tale numero è elevato (si pensi al teorema dei quattro colori) la ricerca di una dimostrazione che esprima in termini finiti, oppure dominabili intellettivamente, piuttosto che la verifica, viene preferita. Per meglio chiarire si consideri il gruppo D_5 delle isometrie del piano che lasciano fisso un pentagono regolare, con la composizione di isometrie, e si voglia provare che comunque presi x, y, z, t elementi di tale gruppo, si ha $(x \circ y) \circ (z \circ t) = (x \circ (y \circ z)) \circ t$. Il gruppo

D_5 ha 10 elementi; è quindi possibile provare l'asserto verificando 10^4 eguaglianze, oppure dimostrandola sfruttando la proprietà associativa dell'operazione che è "parte integrante" della definizione di gruppo.

7 - Sotto questa luce andrebbe chiarito che la presentazione occasionale di risultati matematici sotto il nome di teoremi, non inseriti però in un tutto organico, cambia sostanzialmente il ruolo dei teoremi stessi e delle relative dimostrazioni ed è proprio l'occasionalità che rende difficile accettare momenti di "rigore" inseriti in contesti per altro lasciati all'intuizione ed all'ostensione. Inoltre venendo spesso a mancare definizioni precise non risulta ben chiaro di quali oggetti e relazioni si stia parlando. D'altra parte sono le definizioni stesse che hanno bisogno di un ambito sintattico e teorico, cfr. Marchini, 1992.

Mi rendo conto che una presentazione dei risultati matematici che servono ad un giovane (sulla base dei programmi scolastici) non può svolgersi solo in ambito di una impostazione ipotetico-deduttiva, ma spesso si avvale di procedimenti semantici che forniscono talvolta l'occasione di "abbreviare" mediante l'evidenza i passaggi. Ciò deve fare riflettere che il ruolo didattico dei risultati dimostrati non è quello di fissare alcuni capisaldi conoscitivi, ma quello di presentare esempi di un processo sintattico che, per forza di cose, non chiarisce appieno i suoi punti di partenza. Si può parlare di teoremi locali in un duplice significato, anche se forse è più corretto attribuire loro il significato di argomentazioni. I teoremi presentati sono locali, perché non inseriti in modo coerente ed organico all'interno di una teoria deduttiva. Si parla però di teoremi locali anche per indicare momenti e fasi sintattiche nell'apprendimento. In ogni caso non è sempre ben chiaro il ruolo dei processi semantici e di quelli sintattici, visto che non c'è nella tradizione scolastica italiana attenzione a questi due ambiti. Il processo deduttivo è tipico anche delle argomentazioni, una volta chiariti gli strumenti inferenziali utilizzati. Alcuni di questi aspetti sono trattati in Marchini, 1987.

Costruire definizioni, dimostrare teoremi, spiegare le dimostrazioni e fare apprendere come dimostrare teoremi e in base a quali criteri dare delle definizioni, sono problemi diversi che hanno tempi e modi differenti. Credo comunque che il primo passo sia quello di fare comprendere l'esigenza di definizioni e dimostrazioni. Si potrebbe dire che questa esigenza è la natura stessa della Matematica. Solo con un'azione didattica di questo tipo si possono togliere i teoremi dall'ambito magico o mitologico e le definizioni dalla "pignoleria" matematica, per farli divenire una attività tipicamente umana. Se non si chiarisce questo rapporto tra la conoscenza e il discente ci sono poche speranze che si instauri un vero apprendimento. L'ipotesi che invogliando gli studenti a "creare" prima congetture e poi teoremi sia una strada per fare apprendere questa modalità è ancora sotto il vaglio della sperimentazione, anche se i risultati paiono incoraggianti, ma richiede forse una nuova e più ampia definizione di dimostrazione. Infatti i protocolli mostrati da Garuti (cfr. Garuti, 1998) nella sessione del Seminario nazionale di ricerca in didattica della Matematica tenutasi a Pisa nel dicembre 1998, difficilmente sarebbero accettati da quelli che Griffiths, 1998 chiama TPM (Theorem-proving Mathematicians) come effettive dimostrazioni: alla congettura (suggerita) che intende analizzare se due bastoni possono avere ombre parallele, uno studente dopo averla elaborata, giunge alla seguente "dimostrazione"

> «Se il sole vede il bastone diritto e quello inclinato paralleli è come se ci fosse un altro bastone verticale alla base del bastone inclinato. Se questo bastone è davanti al bastone inclinato la sua ombra copre quella del bastone inclinato. Queste ombre sono sulla stessa linea, quindi le ombre del bastone inclinato e di quello verticale sono parallele».

Credo che a partire da questi risultati che mostrano la presenza di un ragionamento spaziale anche evoluto, resti comunque strada da fare per giungere agli standard dimostrativi dei TPM e non è detto che il cammino venga facilitato, dato che è abbastanza invalsa l'abitudine degli studenti ad accontentarsi di esiti anche se solo parzialmente positivi.

Non so se l'ambito geometrico che per altro ha una lunga tradizione, sia il migliore e se non basti quello aritmetico, una volta precisata una teoria dei numeri (naturali o razionali), comprensiva delle definizioni, in cui muoversi. Un piccolo (e ben noto, ma non a chi lo prova) risultato provato in modo originale da uno studente sicuramente è più motivante dell'apprendimento a memoria di un risultato più famoso. La comprensione dell'importanza di una costruzione che avviene con la proposta di una definizione, e l'analisi se la definizione proposta è adeguata al concetto da definire, è un momento importante di crescita intellettuale. Le "ovvie" proprietà dell'eguaglianza fornirebbero ampio spazio per dimostrazioni di semplici risultati. E se le tecniche non sono "perfette" egualmente la cosa è importante sul versante della soddisfazione personale.

In questo senso si favorisce l'apprendimento della Matematica come processo. Più spesso nelle aule scolastiche si privilegia la Matematica come strumento e mancando spesso l'applicazione immediata, può venire a mancare la comprensione delle ragioni di certe scelte; non basta infatti la "garanzia" del docente che prima o poi si applicheranno le cose da lui esposte. In un certo senso si opera così un'espropriazione del contenuto della matematica, evitando la precisazione delle definizioni, l'enunciazione dei teoremi e soprattutto le loro dimostrazioni. Come dice Fischbein 1998, l'evidenza (eventualmente acquisita con l'esperienza matematica) spinge ad accettare senza una dimostrazione certe affermazioni sulla base dell'intuizione. Ma vi sono forti ragioni per non trascurare la parte dimostrativa anche in quelle situazioni intuitivamente evidenti: il fatto che in matematica ogni proprietà, ogni affermazione deve essere assunta o come assioma o come proprietà dimostrata dato che la Matematica è un sistema formale e che l'evidenza non è utilizzabile come giustificazione matematica.

8 - La Matematica classica ha privilegiato l'approccio ipotetico-deduttivo, desunto da e modellato sull'opera di Euclide, privilegiando quindi l'aspetto razionale. Tale presentazione si basa sull'evidenza, come fonte ultima di validazione delle scelte di termini primitivi, assiomi e postulati, come nei Postulati IV e V della *Scienza deduttiva* di Aristotele. In un certo senso tale scelta è basata sulla esperienza e l'opportunità. Tuttavia è presente nelle teorie ipotetico-deduttive un costante richiamo al contenuto, senza porre mai il problema della esistenza degli enti di cui si parla. Raramente poi il problema dell'esistenza si pone in ambito scolastico come se valesse un postulato sottaciuto che esiste tutto ciò di cui si parla in classe, sulla base forse del fatto che l'insegnante non "imbrogli".

La presentazione di Hilbert della Geometria muta completamente il punto di vista. Per il matematico tedesco il problema dell'esistenza degli enti è centrale; egli lo risolve rinviandolo alla coerenza del sistema. Il problema dell'esistenza non è presente nei manuali scolastici che sembrano poco interessati anche alla questione della coerenza.

L'esigenza della coerenza ha dato origine ad un chiarimento approfondito del significato degli strumenti usati da sempre: teoremi e formule deducibili da altre, dimostrazioni, deduzioni ([2]) definizioni. La necessità di precisare questi aspetti ha portato alla nozione di linguaggio formale che ha recuperato diverse problematiche del logicismo secondo Frege; è nata così la Logica matematica, (Borga e Palladino, 1997), almeno nella sua accezione moderna.

Hilbert propone uno studio della coerenza interno alla teoria stessa, senza riferimenti alla "realtà" o ai "modelli"; così facendo trasforma i teoremi da strumenti

([2]) L'uso dei termini teorema e dimostrazione, invece che formula deducibile e deduzione nasconde un fatto importante: le conoscenze ottenute con un teorema e la sua dimostrazione sembrano dipendere meno da ipotesi di quanto non avvenga con una deduzione di una formula deducibile da premesse che svolgono appunto il ruolo delle ipotesi. Si comunica in questo modo che la Matematica fornisce un sapere certo, invece che una conoscenza ipotetica. Duemila e più anni di storia, cioè da Euclide in poi, sono difficili da scalzare, anche se ormai sono note sia le Geometrie non euclidee, sia le incompletezze dei sistemi assiomatici (sufficientemente potenti).

logici in oggetti matematici da studiare essi stessi ancora con strumenti matematici. Il ricorso all'esperienza quindi può perdere di significato dato che il criterio di evidenza perde la sua efficacia. Se si privilegia la coerenza, la scelta delle definizioni non può più essere basata sulla comprensione immediata, ma deve essere giustificata su altre basi.

In queste considerazioni, però, si parla di teoremi dal punto di vista del matematico interessato alla loro scoperta o costruzione. Nella ricerca didattica i teoremi hanno avuto alterne "fortune". Oggi si riconosce loro importanza formativa e si pongono problemi relativi alle modalità di insegnamento-apprendimento del sapere teorico che essi sottintendono. I teoremi sono tuttavia un argomento complesso da giustificare e ancor più le loro dimostrazioni sono difficili da comunicare e da fare apprendere. Questa constatazione, pur nella sua banalità, può essere una controprova dell'inesistenza di una logica della mente, come afferma Johnson-Laird, 1980; ma forse può essere una riprova che il processo dimostrativo elaborato nei secoli non è perfettamente adeguato a quello mentale, oppure è solo frutto di convenzione socialmente condivisa. Certamente se il procedere matematico fosse l'esplicitazione della logica mentale, l'apprendimento ne sarebbe facilitato. Invece lo studente si trova nella fase di apprendimento in una situazione di conflitto tra la "realtà" e la "astrazione". Tale conflitto ha una lunga storia potendolo far risalire a Parmenide ed alla corrente razionalista del pensiero occidentale. È però importante osservare che questa esigenza di razionalità non è una esclusiva della cultura originatasi dalla matrice greca. Anche altre culture hanno elaborato indipendentemente l'attenzione verso i procedimenti razionali. È nota, ad esempio, una «dimostrazione» cinese del Teorema di Pitagora e nella cultura indiana è stata elaborata una complessa e raffinata teoria del sillogismo, nyāya (I sec. d.C.), a riprova di un'esigenza dell'intero genere umano e quindi in parte contrastando la tesi di Johnson-Laird, 1980.

Per i teoremi e le dimostrazioni vale una sorta di Tesi di Church: ciò che può essere "provato" argomentando in vario modo (l'analogo della computabilità) deve avere una dimostrazione (l'analogo di una derivazione ricorsiva).

Le idee di Hilbert sono entrate poco o nulla nella scuola odierna e il problema della coerenza, messo al centro della ricerca da parte dello studioso tedesco, non ha oggi adeguato risalto didattico. Anzi si è avuta una sorta di rifiuto a considerare i Teoremi come strumenti per apprendere, ritenendoli solo oggetti conoscitivi. Motivo di ciò può essere il grande numero di risultati che sono stati dimostrati partendo dall'antichità greca, cioè dai Teoremi di Talete e di Pitagora in poi. Di fronte a tanta ricchezza non è facile, soprattutto per l'"apprendista" muoversi con facilità.

Questa è una caratteristica tipica della Matematica: la ricchezza di risultati non serve per "scartare" teorie "vecchie" in favore di risultati "nuovi", ma "vecchio" e "nuovo" convivono. Ciò avviene sia in ambiti di ricerca avanzata, sia in ricerche di carattere fondazionale. Verrebbe da dire che la conoscenza matematica procede in due direzioni, rispetto al punto di vista dell'osservatore: avanti e indietro (dipende ovviamente da che parte si guardano i processi di crescita). Se era relativamente semplice per gli antichi greci avere uno sguardo d'assieme della Matematica, oggi è di fatto impossibile. A riprova di ciò ci sono le numerose voci (e pagine) in cui vengono recensiti gli articoli di Matematica sui volumi più recenti di Mathematical Reviews. Muoversi in questo "albero" ramificato e radicato non è semplice oggi, né per uno studente, né per un ricercatore.

Le scelte fatte dai programmi scolastici sono indicazione di percorsi motivati per le valenze formative o applicative degli argomenti, ma un giovane preparato oggi spazia su un numero di argomenti, forse meno approfonditi, ma incomparabilmente maggiore rispetto a quelli noti ai matematici greci.

D'altra parte anche nella recente epistemologia il ruolo di teoremi e definizioni ed i loro rapporti con la conoscenza sono assai modificati. La presenza di risultati che per loro natura richiedono dimostrazioni così lunghe da non poter essere gestite se non con l'uso di calcolatori, ha portato problemi su diversi aspetti, introducendo anche una variabile «costi» della dimostrazione, sicuramente assente nella Matematica greca, cfr. Hanna 1997 e la bibliografia ivi citata. Vopenka, 1979 afferma che il potere di convincere di un teorema decresce all'aumentare della lunghezza della sua dimostrazione.

9 - La sessione del seminario nazionale di ricerca in didattica della Matematica tenutasi a Pisa nei giorni 3-5 dicembre 1998 ha affrontato la problematica dell'insegnamento-apprendimento dei teoremi. In tale sessione hanno presentato lavori Boero e Bartolini Bussi e loro collaboratori (cfr. Bartolini Bussi e Boero 1998, Garuti, 1998, Bartolini Bussi et al., 1998, Parenti et al., 1998) trattando per lo più esempi geometrici che fanno riferimento a esperienze svolte nella scuola dell'obbligo. Sono stati mostrati anche esempi in campo aritmetico con studenti di vari segmenti scolastici, fino all'università. Punti caratteristici della ricerca proposta sono l'importanza assegnata alla dimostrazione e la sua valorizzazione nell'ambito dell'insegnamento e questo è un aspetto qualificante, dato che in Mammana e Villani 1998, vengono presentate, relativamente alla Geometria, posizioni diverse ed anche variamente differenziate, cfr. ad esempio Griffiths 1998.

Altro punto di forza della proposta di Boero e Bussi è che nello studio dei teoremi è importante la mediazione dell'insegnante. Non si può pretendere cioè che questo tipo di presentazione delle conoscenze evolva naturalmente. Si tratta quindi di un apprendimento che ha connotati culturali innegabili, ed altrettante innegabili difficoltà. Resta il problema di come fare a motivare gli studenti; la proposta è quella di procedere dai problemi alle congetture e di qui ai teoremi. Interessante il tentativo di individuare lo snodo dalla produzione di una congettura e la costruzione (tentata) di una sua dimostrazione, snodo chiamato col nome di *unità cognitiva*. Si tratta cioè di verificare la presenza di continuità o discontinuità nel passaggio tra congettura ed argomentazione, per renderla convincente, alla dimostrazione. Viene inoltre prestata attenzione alla forma della consegna. Si avanza l'ipotesi che una presentazione procedurale piuttosto che relazionale, dovrebbe facilitare l'innesco della ricerca della dimostrazione. Come esempio di questi tipi di consegne, viene presentato lo stesso quesito nella forma

Un numero e il suo successivo non hanno divisori comuni eccetto 1 (enunciato relazionale).

Se tu aggiungi 1 a un numero, tutti i suoi divisori cambiano, eccetto 1 (enunciato procedurale).

Altra tesi ritenuta importante da Bussi e Boero è che la forma della congettura rende facile la riflessione produttiva se viene messa in luce la struttura condizionale della frase, mediante il connettivo *se..., allora.* Ma andrebbe approfondita l'influenza della forma retorica e le sue interazioni con la "logica mentale", sulla base anche di quanto affermato in Johnson-Laird, 1980.

Un breve commento a queste posizioni. Mi sembra che negli esempi mostrati l'insegnante non è solo un mediatore della conoscenza, ma anche colui che fornisce o indirizza fortemente alla proposizione di congetture con la consegna. Forse questo dipende dal materiale esibito. In esso il gioco dell'insegnante diviene scoperto, anche se forse è inevitabile che sia così. Nel contratto didattico stabilito in classe gli studenti sanno che anche se la forma linguistica proposta è "aperta", in realtà sotto si nasconde un unico e ben preciso risultato che l'insegnante stesso vuole sia raggiunto. Avendo esperienza con le classi forse ci si convince che questa è l'unica via didatticamente efficace. Viene però a mancare una fase esplorativa personale, dettata dalla curiosità, che porti alla produzione spontanea di congetture. In questo forse ha buon gioco la fase induttiva che pare avere una rilevanza anche tra studenti della scuola dell'obbligo come procedimento che facilita la generalizzazione.

Pure su questo tema mi pare ci sia da prestare attenzione ad un fatto secondo me sottovalutato, la rilevanza personale o storica del risultato. Mi spiego con un esempio. Nell'ambito scientifico, quello dei TPM, una delle caratteristiche richieste per la pubblicazione di un articolo contenente un teorema è che esso sia "nuovo" cioè non presente nella letteratura scientifica o che sia una "nuova" dimostrazione di un risultato già noto. Ma non credo che verrà mai pubblicato un articolo che rechi il risultato della divisione tra duemilasettecentodiciassette e duecentonove, pur essendo quasi certo che questo risultato (o un altro analogo) manchi nella letteratura, e neppure verrà pubblicato il risultato della divisione fra gli stessi numeri scritti usando le cifre arabiche e la scrittura posizionale. Ciò perché tali teoremi aritmetici mancano di *rilevanza*, cioè una caratteristica che non è facile chiarire, ma è lasciata al consenso sociale dei TPM, in base alla quale certi risultati sono rilevanti ed altri no.

Il grado di rilevanza cambia con l'età personale e storica. Ad esempio per uno scolaro elementare oggi può essere indispensabile conoscere il risultato della divisione tra 2717 e 209 e questo per due motivi: uno pratico che è quello di rispondere ad un quesito di un problema, l'altro per mettere alla prova il procedimento standard per il calcolo della divisione, quando il divisore ha tre cifre, una delle quali è 0. Il risultato della divisione tra MMDCCXVII e CCIX, meglio ancora il procedimento per ottenerlo, avrebbe potuto essere di grande rilevanza nell'anno 1000 dato che la tecnica di divisione non era ben consolidata e forse anche oggi avrebbe un qualche interesse storico.

Nella produzione di congetture c'è quindi una fase preliminare che consiste nello scartare a priori le "banalità" cioè quei risultati che non soddisfano il criterio di rilevanza, perché basati su processi o algoritmi ben consolidati. Ma, come mostrato sopra e come si può riscontrare dai libri universitari, il livello di banalità è variabile anche a livello personale e, per la stessa persona, nel tempo.

Un altro aspetto che mi sembra significativo della ricerca presentata a Pisa ed anche dei contributi di Mammana e Villani 1998, è la non chiara distinzione tra i livelli morfologico, sintattico e semantico. Vedere il teorema (e la congettura) come un enunciato vero (in un contesto spesso non ben precisato) non mette in evidenza il ruolo della dimostrazione basata su regole corrette come l'individuazione delle ragioni della verità, come detto in Harel e Sowder, 1998 o come detto da Lakatos, 1985, la retro-trasmissione della falsità. D'altra parte i fondamentali risultati di Gödel e di Tarski degli anni '30 del secolo XX mettono in luce che la confusione tra verità e dimostrabilità è da evitare, viste le polemiche sorte all'inizio del secolo sui criteri di esistenza degli enti ed anche per il significato generale che la dimostrazione permette di raggiungere.

Un punto delicato che si aggancia a quanto detto prima è la differenza tra ruoli e funzioni del connettivo di implicazione, della relazione di deducibilità e dell'operatore di conseguenza logica che non possono essere confusi dall'insegnante, se non rischiando di compromettere la comprensione dell'allievo.

Si viene così a mettere in evidenza uno dei ruoli proposti da Duval, 1998, cfr. anche Hershkowitz 1998, quello del ragionamento visto come strumento di esplorazione, dato che quanto provato con il ragionamento, un teorema suggerito da caso particolare (un modello) lo si può estendere a tutti i modelli, anche a quelli più impensati.

Alle altre funzioni che Duval riconosce al ragionamento, cioè quello di provare e di spiegare, bisogna aggiungere una funzione di risparmio concettuale.

Non so se questo tipo di osservazione si incontra anche nella scuola dell'obbligo con la stessa frequenza che capita di rilevare all'Università. Quando vengono assegnati esercizi che richiedono di applicare teoremi già provati, alcuni studenti che non padroneggiano bene l'argomento, cercano di risolvere quello che per loro è un problema mettendo in atto strategie che li portano ad argomentazioni assai lunghe o a calcoli complessi, laddove l'applicazione dei teoremi richiesti condurrebbe alla conclusione con pochi passaggi e con eleganza. In altri casi gli allievi non si rendono conto che la dimostrazione di un certo risultato offre loro uno strumento applicabile e quindi non è necessario inventare un nuovo algoritmo per la risoluzione di un'ampia classe di problemi. In questo senso il ragionamento su aspetti generali offre uno strumento di economia di pensiero che quando viene compreso dagli studenti, viene anche da essi largamente apprezzato. Ad esempio nella scuola media, in connessione col Teorema di Pitagora si potrebbe svolgere un'attività preliminare di misurazioni effettive e di calcolo di lunghezze dei lati ed aree dei quadrati per preparare il terreno alla scoperta che questi aspetti sperimentali vengono tutti assorbiti dal risultato e mettendo così in luce che la dimostrazione evita il calcolo effettivo.

Probabilmente questo tipo di attività sarebbe più indicata con altri risultati, ad esempio il Teorema di Talete, per restare alla Geometria.

Bibliografia

[1] J. Barnes, *Aristotle's Theory of Demonstration*, in Barnes J., Schofield M., Sorabji R. (a cura di) *Articles on Aristotle, 1. Sciences*, Duckworth, London 1975.

[2] M. Bartolini Bussi e P. Boero, *Quadro teorico per una ricerca didattica sull'approccio ai teoremi*, 16° Seminario nazionale di Ricerca in didattica della Matematica, preprint, Pisa 1998.

[3] M. Bartolini Bussi, M. Boni, F. Ferri and R. Garuti, *Early approach to theoretical thinking gears in primary school,* 16° Seminario nazionale di Ricerca in didattica della Matematica, preprint, Pisa 1998.

[4] E. W. Beth, *The foundations of Mathematics*, North Holland, Amsterdam 1959.

[5] C. CELLUCCI, *La Logica fra Filosofia, Matematica e Informatica*, Notizie di Logica, **X 2/3** (1991), 13-23.

[6] M. BORGA e F. PALLADINO, *Oltre il mito della crisi-Fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo*, La Scuola ed., Brescia 1997.

[7] R. DUVAL, *Geometry from a cognitive point of view*, in Mammana C. & Villani V. (a cura di): *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1998.

[8] F. ENRIQUES, *Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna,* I, Zanichelli, Bologna 1923.

[9] F. ENRIQUES, *Per la Storia della Logica,* ristampa anastatica del testo del 1922, Zanichelli, Bologna 1987.

[10] E. FISCHBEIN, *Conoscenza intuitiva e conoscenza logica nell'attività matematica,* La Matematica e la sua Didattica (1998), 365-401.

[11] A. FRAJESE, *Platone e la Matematica nel mondo antico*, Editrice Studium, 1963.

[12] R. GARUTI, *Unità cognitiva nei teoremi*, 16° Seminario nazionale di Ricerca in didattica della Matematica, preprint, Pisa 1968.

[13] H. B. GRIFFITHS, *The British experience*, in Mammana C. & Villani V. (a cura di): *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1998, 194-204.

[14] G. HANNA, *Il valore permanente della dimostrazione*, La Matematica e la sua Didattica **236** (1997), 236-252.

[15] G. HAREL and L. SOWDER, *Student's Proof Schemes*, preprint, 1998.

[16] R. HERSHKOWITZ, *About Reasonning in Geometry,* in Mammana C. & Villani V. (a cura di): *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1998, 29-37.

[17] P. N. JOHNSON-LAIRD, *Modelli mentali,* Il Mulino, Bologna 1980.

[18] I. LAKATOS, *Matematica, Scienza e Epistemologia,* Il Saggiatore, Milano 1985.

[19] C. MAMMANA e V. VILLANI (a cura di): *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1998.

[20] C. MARCHINI, *Argomentazione e Dimostrazione - Alcune riflessioni sugli aspetti didattici,* L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate **10** (1987), 121-140.

[21] C. MARCHINI, *Le definizioni e le notazioni, un problema didattico,* 1, 1 Quaderni Dip. Mat. Univ. Lecce, Seminari di Didattica A.A. 1990/91 e 1991/92, 125-143.

[22] L. PARENTI, M. T. BARBERIS, M. PASTORINO e P. VIGLIENZONE, *Dall'esplorazione dinamica a teoria e teoremi,* 16° Seminario nazionale di Ricerca in didattica della Matematica, preprint Pisa 1998.

[23] G. VATTIMO (a cura di), *Enciclopedia di Filosofia,* Garzanti, Milano 1986.

[24] P. VOPĚNKA, *Mathematics in the alternative set theory*, Teubner Texte, Liepzig 1986.

Abstract

The word "theorem" is introduced in school for 13 years old students, often without important details, the same happens for "definition". In this way the word assumes a sort of magical meaning. The paper sketches a short history of the concept starting from Greek philosophers and mathematicians arriving to XX-century. Some points of view of mathematics education for the theorems learning are treated.

* * *