Riv. Mat. Univ. Parma (6) **3*** (2000), 91-122

ACHILLE MAFFINI (*)

Un'indagine sul concetto di funzione nella scuola secondaria (**)

In memoria di Francesco Speranza

0 - Perché un'indagine sul concetto di funzione

L'idea di fondo che ha sorretto il lavoro risiede nel ritenere che il concetto di funzione, visto come portante nell'approccio didattico della matematica nella scuola italiana, sia tutt'altro che chiaro e definito e soprattutto non sia trattato con continuità nelle varie tappe in cui viene presentato.

In un articolo del Prof. Youschkevitch [Y] «Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX^{e} siècle» apparso in «Archive for History of Exact Sciences» (1976) si esamina come si è evoluto il concetto di funzione nei secoli. Nel lavoro si è voluto altresì vedere come tali concezioni si siano radicate, al di là dell'evoluzione storica, nell'attività didattica.

Si è così partiti dall'esame di 23 libri di testo (1) tra i più diffusi (12 del triennio e 11 del biennio) per vedere come in essi vengano presentate le funzioni; a questo proposito si sono evidenziati approcci anche molto diversi. Di seguito verranno elencate le presentazioni dei testi analizzati mentre alla fine del paragrafo saranno sintetizzati i risultati in una scheda riassuntiva.

(*) ULRD (Unità Locale Ricerca Didattica) c/o Dipartimento di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 10 Febbraio 2000. Classificazione AMS 97 C 30, 97 U 20.

(1) Le tabelle riassuntive dei testi esaminati sono riportate alla fine del paragrafo. La numerazione a sinistra rimanda all'elenco dei libri di testo riportato in bibliografia.

LIBRI BIENNIO

	DEFINIZIONE RELAZIONE	DEFINIZIONE FUNZIONE	DOMINIO CODOMINIO	UGUAGLIANZA FUNZIONI	NOTE E OSSERVAZIONI
1	*Si chiama relazione binaria tra due insiemi A e B ogni corrispondenza (o legge) che associa ad un* $x \in A$ *un* $y \in B$ *se e solo se x e y rendono vera una certa proposizione p(x, y), caratteristica della relazione stessa.*	*Una relazione o corrispondenza R tra due insiemi A e B è chiamata funzione da A verso B se e solo se valgono le seguenti proprietà:* *1) il dominio è tutto A* *2) la corrispondenza è univoca, ossia ad ogni elemento di A corrisponde un unico elemento di B.*	Dominio: A Cod.: f(A) Suriet.: f(A)=B	*Si dice che due funzioni* $f_1 : A \to B$ $f_2 : A \to B$ *sono uguali se e solo se* $f_1(x) = f_2(x)\ \forall x \in A$	Visione **euleriana** di funzione «ereditata» dalla definizione di relazione. Dizione: *da A verso B* (contrapposta a tra A e B delle relazioni)
2	*Dati due insiemi A e B, si chiama grafo un qualsiasi sottoinsieme di* $A \times B$*. Tra due insiemi è data una relazione quando è dato un grafo* $G \subseteq A \times B$*. A è detto dominio e B codominio della relazione.*	*Diremo funzioni le relazioni ovunque definite e funzionali*	Dominio: A Cod.: B Suriet.: f(A)=B	Non è data. Implicitamente poiché la relazione è data da A, B e G, due relazioni coincidono se coincidono questi tre elementi	Visione **insiemistica**. Dizione: tra A e B
3	*Una relazione di un insieme A verso un insieme B è un insieme di coppie ordinate, ciascuna delle quali ha la prima componente in A e la seconda in B.*	*Un'applicazione o funzione di A in B è una relazione tra gli elementi di A e quelli di B, che ad ogni elemento* $x \in A$ *associa uno ed un solo elemento* $y \in B$	Dominio: A Cod.: f(A) Suriet.: f(A)=B	Non è data. Una eventuale def. di uguaglianza sembra dover coinvolgere gli insiemi e le coppie	Visione **insiemistica**. Dizione: di A in B (più o meno come per la relazione)

	DEFINIZIONE RELAZIONE	DEFINIZIONE FUNZIONE	DOMINIO CODOMINIO	UGUAGLIANZA FUNZIONI	NOTE E OSSERVAZIONI
4	*Dati due insiemi A e B, quando esiste un «criterio» per associare elementi di A con elementi di B, cioè una «proprietà» che indicheremo con R, verificata da certe coppie (x,y), con* $x \in A$ *e* $y \in B$*, si dice che è data una relazione «binaria» di A in B.* Più avanti: *Relazione di A in B ogni sottoinsieme di* $A \times B$	*Dati due insiemi non vuoti A e B, si chiama applicazione o funzione (univoca) di A in B una relazione che fa corrispondere ad ogni elemento x di A, uno ed un solo elemento y di B.*	Dominio: A Codom.: f(A) Suriet: f(A)=B	Non è data. A proposito delle relazioni viene però detto che «Dal punto di vista logico non vi è però differenza tra *conoscere la relazione R* e *conoscere l'insieme* $G \subseteq A \times B$ *delle coppie che verificano R.*» essendo R la proprietà che definisce la relazione	L'uso delle numerose virgolette nella definizione di relazione la rende poco chiara, (non essendo definite *proprietà* e *criterio*). Nella successiva osservazione (riportata nella casella precedente) il ruolo di A e B viene messo in secondo piano rispetto alla proprietà R e questo fa propendere per una visione **euleriana**. Dizione: di A in B.
5	*Relazione come termine primitivo (!), specificata dal predicato R che definisce la relazione*	*Data la relazione funzionale R di X verso Y, si dice applicazione di X in (o su) Y l'operazione che associa l'elemento* $y \in Y$ *all'elemento* $x \in X$ *secondo R*	Dominio: X Cod.: f(X) Suriet.: f(X)=Y	Non è data. Dalle definizioni, però, si evince un ruolo marginale svolto dagli insiemi, a discapito del predicato	Visione **euleriana** (?) Dizione: di X verso Y
6	*Si parla di relazione tra A e B ogni volta che a qualche elemento di un insieme A si associa qualche elemento di un insieme B.*	*Una relazione tra due insiemi A e B che ad ogni elemento di A associa un solo elemento di B viene detta funzione di A in B.*	Dominio: A Codom.: B Suriet.: f(A)=B	Non è data. Con la precisazione successiva sembra che una eventuale def. di uguaglianza debba coinvolgere gli insiemi e le coppie	La def. risente pesantemente dell'ambiguità del verbo *associare* che fa pensare ad una visione **euleriana**. Solo successivamente si parla di sottoinsieme di un prodotto cartesiano. Dizione: tra A e B (stessa rel.)

	DEFINIZIONE RELAZIONE	DEFINIZIONE FUNZIONE	DOMINIO CODOMINIO	UGUAGLIANZA FUNZIONI	NOTE E OSSERVAZIONI
7	*Si dice che fra due insiemi non vuoti A e B è definita una relazione quando è data una proprietà (chiamiamola R) tale che presi due elementi qualsiasi $x \in A$ e $y \in B$ è valida una ed una sola delle due affermazioni:* 1) *La coppia (x, y) soddisfa la proprietà R* 2) *La coppia (x, y) non soddisfa la proprietà R*	*Dati due insiemi non vuoti A e B si chiama funzione di A in B una qualunque relazione tra A e B che associa a ogni elemento $x \in A$ uno ed un solo elemento $y \in B$*	Dominio: A Codom.: f(A) Suriett.: f(A)=B	Non è data. Il fatto di definire la relazione con la proprietà R fa comunque pensare che due relazioni (e quindi due funzioni) siano uguali se coincidono le coppie degli elementi corrispondenti, lasciando un ruolo marginale agli insiemi.	*Visione* **euleriana**. Dizione: di A in B. (diversa da relazione: fra A e B)
8	*Una relazione binaria tra due insiemi A e B è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ le cui coppie hanno gli elementi che si corrispondono secondo una regola p(a, b) di associazione*	*Dati due insiemi A e B si dice funzione da A a B una relazione che ad ogni elemento di A fa corrispondere uno ed un solo elemento di B*	Dominio: A Codom.: f(A) Suriet.:f(A)=B	Non è data. L'impostazione insiemistica fa comunque pensare che nell'uguaglianza delle relazioni si debba tener conto anche degli insiemi su cui la relazione è definita	Visione **euleriana**. Dizione: da A a B (diversa da relazione: tra A e B)
9	*Relazione (binaria) tra A e B ogni sottoinsieme del prodotto cartesiano di due insiemi A e B.*	*Funzione tra A e B una relazione R tra A e B tale che ogni elemento di A è in relazione con uno ed un solo elemento di B.*	Dominio: A Codominio: B Suriet.: f(A)=B	Non è data. Una eventuale def. di uguaglianza sembra dover coinvolgere gli insiemi e le coppie	Visione **insiemistica** (viene fatto notare che l'insieme di verità di un predicato binario individua una relazione). Dizione: tra A e B

	DEFINIZIONE RELAZIONE	DEFINIZIONE FUNZIONE	DOMINIO CODOMINIO	UGUAGLIANZA FUNZIONI	NOTE E OSSERVAZIONI
10	*Si dice relazione binaria fra due insiemi A e B un sottoinsieme del prodotto cartesiano* $A \times B$.	*Si dice applicazione o funzione di A in B una relazione che fa corrispondere a ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B.*	Dominio: A Codominio: B Suriet.: f(A)=B	*Due funzioni f e g aventi lo stesso dominio si dicono uguali se e solo se per ogni elemento a di A si ha f(a)=g(a)*	Visione **insiemistica** Dizione: di A in B (diversa da relazione fra A e B). È interessante osservare che nell'edizione del 1992 (in cui tra l'altro si forniscono anche le espressioni formali dei concetti, come ad esempio del dominio) il codominio di una funzione, come di una relazione, viene definito come l'insieme delle immagini.
11	*Relazione fra A e B è un sottoinsieme di* $A \times B$	*Applicazione o mappa di A in B ogni relazione fra A e B tale che a ogni* $x \in A$ *sia associato uno ed un solo* $y \in B$. Nel volume T gli autori indicano col termine di funzione una relazione più «operativa» (posizione più euleriana), proponendo la seguente definizione: *Una funzione definita in A e a valori in B è una relazione che associa a ogni elemento* $x \in A$ *un solo elemento* $y \in B$ *oppure nulla*	Dominio: A Codom.: f(A) Dominio: elementi di A che hanno immagine Cod.: insieme immagini	Non è data. Una eventuale def. di uguaglianza sembra dover coinvolgere gli insiemi e le coppie	Visione insiemistica Dizione: di A in B (diversa da relazione: fra A e B)

LIBRI TRIENNIO 1 (senza definizione di relazione)

	DEFINIZIONE FUNZIONE	DOM. e COD.	UGUAGLIANZA	NOTE E OSSERVAZIONI
12	*Diremo applicazione o funzione tra un insieme A e un insieme B, entrambi non vuoti, una corrispondenza, di qualunque natura, che ad ogni elemento* $x \in A$ *associa uno ed un solo elemento* $y \in B$.	Dominio: A Cod.: f(A)	Non è detto. Più avanti però si mette in guardia il lettore dall'errore di confondere la funzione con la sua espressione analitica. Questo sembra porre l'accento anche sul ruolo degli insiemi	Dal testo non è dato sapere cosa si intenda per «corrispondenza di qualunque natura». La visione sembra di tipo **euleriano**, anche se dal testo non è chiaro cosa si intende per *associare.* Dizione: tra A e B
13	*Dati due insiemi A e B che chiameremo rispettivamente «insieme di partenza» e «insieme di arrivo», si dice funzione o applicazione f di A in B una legge che associ a ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B.*	Dominio: A Cod.: f(A) Suriet.: f(A)=B	Non è data. Dalla definizione si dovrebbe avere che due funzioni sono uguali se e solo se espresse dalla stessa legge con gli insiemi che svolgono un ruolo marginale.	Visione **euleriana**. Dizione: di A in B
14	*Dati due insiemi non vuoti A e B, si chiama funzione o applicazione (univoca) di A in B una qualsiasi legge che fa corrispondere ad ogni elemento x di A un solo elemento y di B*	Dominio: A Codom.: f(A) Suriet: f(A)=B	Non è data. Dalla definizione si dovrebbe avere che due funzioni sono uguali se e solo se espresse dalla stessa legge con gli insiemi che svolgono un ruolo marginale.	Rispetto alla definizione data sul testo del biennio, il termine relazione è stato sostituito con legge; ci si è spostati più marcatamente verso una visione **euleriana**. Dizione: di A in B
15	*Consideriamo due insiemi qualsiasi A e B e due elementi* $x \in A$ *e* $y \in B$. *Si chiama funzione f di A in B una legge che fa corrispondere ad ogni elemento* $x \in A$ *uno ed un solo* $y \in B$; *x è detta variabile indipendente, y variabile dipendente.*	Dominio: A Cod.: f(A) Suriet.: f(A)=B	Non è data. Dalla definizione si dovrebbe avere che due funzioni sono uguali se e solo se espresse dalla stessa legge con gli insiemi che svolgono un ruolo marginale.	Rispetto alla definizione del biennio, il termine operazione è diventato legge. Visione **euleriana**. Dizione: di A in B.

	DEFINIZIONE FUNZIONE	DOM. e COD.	UGUAGLIANZA	NOTE E OSSERVAZIONI
16	*Se A e B sono due insiemi (non vuoti) si chiama applicazione o funzione da A a B una qualsiasi legge che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B.*	Dominio: A Codom.: B Suriet.: f(A)=B	Non è data. Dalla definizione si dovrebbe avere che due funzioni sono uguali se e solo se espresse dalla stessa legge con gli insiemi che svolgono un ruolo marginale.	Visione **euleriana**. Nel testo si pone l'accento anche sul carattere di dipendenza del concetto di funzione, indicandolo equivalente al concetto di corrispondenza univoca. Dizione: da A a B.
17	*Dati due insiemi X e Y una funzione f da X a Y è una relazione fra X e Y tale che ad ogni elemento di X corrisponde uno ed un solo elemento di Y*	Dominio: X Codom.: Y Suriett.: f(X)=Y	Non è data. Vedi biennio	Visione **insiemistica** (la definizione di relazione è quella data sul testo del biennio). Dizione: da X a Y.
18	*Dati due insiemi A e B, diremo che f è una funzione con dominio A e codominio B se è possibile associare ad ogni elemento di A un solo elemento di B.*	Dominio: A Cod.: B	Non è data. Difficile darla, vista l'ambiguità della definizione	La visione sembra di tipo **euleriano**, anche se nel testo non è chiaro cosa si intenda per *associare.*
19	*Dicesi funzione una quantità variabile che dipende da un'altra quantità variabile* Più avanti (definizione ritenuta alternativa): *Dicesi funzione una relazione fra due o più variabili*	Dominio → Codominio: →	*insieme valori var. indip. x a cui corrispondono valori della var. dip. y* *insieme di tutti i valori che può assumere la y*	L'autore parla, nel cotesto in cui fornisce la definizione, di funzione reale a variabile reale. Ma chi è la funzione? Detta così sembrerebbe la variabile dipendente. Si può immaginare che intendano la legge con cui si ottiene il valore di tale variabile, ma che sia chiaro...

LIBRI TRIENNIO 2 (con definizione di relazione)

	DEFINIZIONE RELAZIONE	DEFINIZIONE FUNZIONE	DOM COD.	UG. FUNZIONI	NOTE E OSSERVAZIONI
20	*Si dice relazione binaria fra due insiemi A e B un sottoinsieme del prodotto cartesiano* $A \times B$	*Dati due insiemi A e B si dice funzione f da A in B una relazione che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B.*	*Dom.: insieme degli elementi su cui opera f* *Cod.: l'insieme B a cui appartengono gli elementi ottenuti tramite f* Suriet.: f(A)=B	*Due funzioni f e g si dicono equivalenti se* 1) *hanno lo stesso dominio;* 2) *hanno lo stesso cod.;* 3) *per ogni elemento x del dominio* $f(x)=g(x)$ È opportuno osservare come il concetto di uguaglianza del biennio (che non coinvolgeva il codominio) si sia mutato in quello di equivalenza (che lo coinvolge)	Piuttosto ambigua e comunque non chiara la definizione di codominio: sembra che B venga costruito dopo la determinazione delle immagini, contro la definizione di funzione data. Visione: **insiemistica** Dizione: da A in B (diversa da relazione: tra A e B).
21	*Relazione tra A e B un sottoinsieme del prodotto cartesiano di A e B.*	*Quando accade che ad ogni elemento del dominio è associato un solo elemento del codominio la relazione prende il nome di funzione* *Funzione (reale) una relazione le cui coppie di numeri reali hanno i secondi elementi distinti solo se lo sono i primi* Più avanti: *Ciò significa che la legge associa ad ogni valore della variabile indipendente un solo valore della dipendente*	Dominio: A Codominio: f(A)	Non è data. Dalla definizione di relazione, l'uguaglianza di funzioni dovrebbe essere data sull'uguaglianza delle coppie, indipendentemente dalla «forma» della legge.	È interessante notare la differenza tra la definizione data in terza e quella data in quinta, molto meno intuitiva (a parte la successiva precisazione). E' inoltre opportuno osservare che la definizione passa da un piano sostanzialmente **insiemistico** ad uno **euleriano** e che nella def. del triennio manca il quantificatore universale sugli elementi. Dizione: tra A e B

	DEFINIZIONE RELAZIONE	DEFINIZIONE FUNZIONE	DOM COD.	UG. FUNZIONI	NOTE E OSSERVAZIONI
22	*Siano A e B due insiemi non vuoti e P(x,y) una proposizione aperta definita su $A \times B$. Si dice che P(x,y) individua una relazione da A in B (o da A a B)* Più avanti la biezione tra le relazioni su due insiemi e i relativi grafi, fa affermare agli autori che *Una relazione è un sottoinsieme di $A \times B$.*	*Dati due insiemi (non vuoti) A e B, si dice applicazione (o funzione) da A in B una relazione che associa ad ogni elemento $x \in A$ uno ed un solo elemento $y \in B$.*	Dominio: A Imm.: f(A) (non viene usato il termine cod.) Suriet.: f(A)=B	Non è data. La definizione richiede per l'uguaglianza tra le funzioni la coincidenza del predicato e degli insiemi tra cui opera	La «partenza» è **euleriana**, anche se la considerazione finale a proposito delle relazioni cerca (credo senza riuscirci: un insieme di coppie non è dato sempre da un predicato) di spostarla su un piano insiemistico. Dizione: da A a B
23	*Si dice corrispondenza fra un primo insieme A e un secondo insieme B ogni relazione (proprietà o legge) che a certi elementi di A associa taluni elementi di B.* Più rigorosamente: *Si dice corrispondenza fra un primo insieme A un secondo insieme B ogni sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$*	*Si dice funzione o applicazione una corrispondenza da un insieme A ad un insieme B nella quale a «ciascun» elemento da A corrisponde «uno ed un solo» elemento di B*	Dominio: A Codom.: f(A)	Non è data. La definizione richiede per l'uguaglianza tra le funzioni la coincidenza del predicato e degli insiemi tra cui opera	Visione **euleriana**. Dizione: da A a B (diverso da relazione: fra A e B)

Riassumendo:

1) Nei libri del triennio, 9/12 forniscono una visione del concetto di funzione di tipo euleriano (2) , mentre 2/12 forniscono una visione insiemistica (3) (uno non si sa...). Questi rapporti mutano decisamente al biennio (6/11 euleriana, 5/11 insiemistica), ma meno di quello che forse ci si potrebbe aspettare.

2) A livello terminologico, nei libri del triennio 8/12 presentano la funzione in modo dinamico (*da A a B* oppure *di A in B*), mentre 2/12 in modo statico, anche se non c'è corrispondenza tra la visione insiemistica e la presentazione statica. Due testi cambiano dizione dal concetto di relazione a quello di funzione. Nei testi del biennio 8/11 presentano la funzione in modo dinamico e 3/11 in modo statico; ben 5 testi cambiano dizione dalla definizione di relazione a quella di funzione. In due testi c'è corrispondenza tra la visione insiemistica e la dizione statica.

3) I testi che usano le variabile x ed y per indicare rispettivamente gli elementi del dominio e del codominio sono 6/11 al biennio e 4/12 al triennio. Forse erano più attesi rapporti contrari, ma rimane il fatto che circa la metà dei testi esaminati usi solo quelle variabili.

4) Nei testi del triennio 9/12 indicano con il termine «codominio» l'insieme delle immagini mentre nei testi del biennio questo succede in 7/11.

Da qui si è cercato di capire, attraverso un questionario (riportato in appendice alla fine del presente lavoro), quali aspetti venissero più evidenziati da parte dei ragazzi (o quali aspetti risultavano più radicati nei ragazzi), anche al di là dell'effettiva intenzione della presentazione didattica del concetto. Così, rispetto ad altri studi classici sul concetto di funzione (come [V] e [VD]), si è ad esempio voluto vedere quale ruolo giochi la continuità nell'interiorizzazione del concetto di funzione, se viene recepita la differenza tra funzione e grafico (soprattutto di carattere empirico, contrapponendolo quindi al concetto più strettamente matematico), come viene visto il dominio di una funzione, quali scritture posso ricondurre a fun-

(2) La definizione di Eulero, riportata da [Y], ricalca quella proposta dal suo maestro J. Bernoulli nell'articolo «Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solution des problèmes sur les isopérimètres» del 1718 (*Définition. On appelle fonction d'une grandeur variable une quantitè composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes*). Eulero fornisce la sua definizione nel cap. 1 del vol. 1 del suo «Introductio in analysis infinitorum» del 1748: «*Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée de quelque manière que ce soit, de cette quantitè et de nombres ou de quantités constantes*».

In sostanza la definizione euleriana tende a vedere la funzione come legge (o espressione) che lega due variabili.

(3) La definizione insiemistica si riallaccia chiaramente alla tradizione bourbakista.

zioni e il ruolo delle variabili in tali scritture, come viene visto il concetto di uguaglianza tra funzioni ed infine come vengono sentiti gli aspetti più specificatamente logici (sintattici, semantici e morfologici) coinvolti dal concetto di funzione (al riguarda si veda [M]). L'aspetto logico è stato ritenuto particolarmente importante perché, oltre alla visione che si porta «dentro» risulta anche quello più trascurato o trattato meno correttamente dai libri di testo.

Non ci si è invece preoccupati delle proprietà delle funzioni, ritenendo questo un passo successivo e meno importante per la loro comprensione.

1 - Il questionario

In relazione agli obiettivi sopra espressi, la costruzione degli items del questionario è stata fatta fissandone le finalità, i problemi associati, gli aspetti logici e le relazioni con gli altri items. La sintesi di questo lavoro è riportata nella tabella allegata.

Il questionario è stato successivamente somministrato a 99 studenti così suddivisi ([4]):

Sigla	I	II	IV	Va	Vs
Classe	1ª Liceo Scientifico PNI	2ª ITC	4ª ITG	5ª Liceo Artististico	5ª Liceo Linguistico
N° alunni	28	22	19	16	14

Il questionario è citato in appendice, mentre di seguito verranno riportate le tabelle con le presentazioni dei vari items, le finalità, i problemi sottesi, gli aspetti logici specifici, i legami con gli altri items.

Successivemante verranno riportate le frequenze delle risposte ai vari items. Le risposte sono state elaborate con Excel. Inoltre sono stati messi in luce gli aspetti logici relativi alle varie risposte (sintattici, semantici e morfologici) per una loro analisi successiva.

([4]) Si ringraziano i docenti Patrizia Bonifazi, Silvia Dalla Noce, Romano Superchi e Cristina Valenti per la collaborazione nella somministrazione del questionario.

TABELLA costruzione degli Items del questionario

	TIPO DEFINIZIONE	FINALITÀ	PROBLEMI SOTTOSTANTI	ASPETTI LOGICI	LEGAMI CON ALTRI QUESITI
1	Funzione come tabella	L'approccio, già presente in Tolomeo, è tipico del lavoro che viene fatto in fisica e statistica quando si costruiscono tabelle di dati. Si volevano evidenziare sostanzialmente tre aspetti: 1) quanto poteva disturbare l'uso di variabili non canoniche; 2) se c'era da parte dei ragazzi l'esigenza di trovare una legge che legasse i valori; 3) come venivano visti dominio e codominio, cioè se venivano pensati come intervalli o come insiemi discreti.	In funzione delle finalità, i problemi sottostanti al quesito riguardano il problema di ipostatizzazione delle variabili, l'idea di continuità (espressa da dominio e codominio come intervalli) e se all'idea di funzione è comunque associata quella di legge o se prevale un approccio insiemistico.	Alcune risposte avrebbero potuto evidenziare alcuni caratteri logici peculiari; in particolare rispondere **sì** presuppone una visione semantica della tabella (vista come dati legati ad un contesto), mentre un **sì motivato** con l'idea di una legge presuppone una visione sintattica.	Le risposte su dominio e codominio sono state legate a 2, 3.c) e 3.d) per valutare quanto fosse forte l'idea di continuità associata al concetto di funzione.
2	Funzione come grafico	In questo quesito l'aspetto più evidente riguarda la continuità (o non continuità) del grafico proposto. Ciò che si voleva vedere era se l'idea di continuità influisca sul fatto che un grafico rappresenti o no una funzione. C'è inoltre un problema legato al dominio. Tutti i libri di testo consultati parlano del dominio come dell'insieme dei valori che hanno una ed una sola immagine; in questo caso si voleva vedere se 'naturalmente' gli alunni restringevano il dominio all'intervallo in cui il grafico era definito.	Come evidenziato in precedenza, i problemi sono sostanzialmente di due tipi: 1) il ruolo svolto dalla continuità; 2) la restrizione o no del dominio 3) una concezione intrafigurale di spazio	Si è individuato in **no** e **no motivato dalla discontinuità** due risposte di tipo semantico, mentre un **no motivato da discontinuità di segmenti di retta** come una risposta di tipo sintattico. Questo approccio risiede nel fatto che il no o il no dovuto alla discontinuità fanno pensare al grafico come interpretato nell'ambiente delle funzioni reali a variabile reale dell'analisi; nel caso delle rette invece si pensa all'ente (o all'ente geometrico) in sé.	Oltre al legame messo in evidenza in precedenza, c'è anche quello con 4.e) in cui viene riportata l'equazione del grafico rappresentato.

	TIPO DEFINIZIONE	FINALITÀ	PROBLEMI SOTTOSTANTI	ASPETTI LOGICI	LEGAMI CON ALTRI QUESITI
3	Funzione come grafico	Questi artefatti culturali sono frequenti su quotidiani e televisione per cui fanno parte della realtà anche di chi non si occupa di matematica. Inoltre il rappresentare un grafico discreto come se fosse continuo può condizionarne la concezione. A partire da questo si voleva vedere 1) quanto influisca la continuità (in questo caso indotta dalla rappresentazione, ma non da ciò che il grafico rappresenta); 2) se la rappresentazione impedisce di individuare gli elementi della funzione; 3) se l'idea di funzione comporta necessariamente quella di legge; 4) come poteva essere introdotto un concetto di indipendenza del grafico dalla sua forma	Il problema principale è dovuto all'esigenza (da parte di chi usa questi grafici) di rappresentare valori discreti legati tra di loro e, per parte nostra, vedere quindi come tale rappresentazione condizioni il concetto di funzione. In un certo senso il problema è complementare rispetto a quello dell'item precedente. Oltre ai problemi legati alla continuità (che si esprime anche nell'indicazione del dominio e del codominio), c'è un problema di rappresentazione, che passa attraverso il riconoscimento degli elementi della funzione. In questo senso abbiamo ritenuto che le domande più ambigue e di più difficile interpretazione fossero le 3.e) e 3.f).	Gli aspetti logici legati al questionario sono piuttosto complessi perché strettamente connessi tra di loro. A tale proposito, per la loro lettura, si rimanda al grafico (A).	Oltre ai legami con 1 e 2 già evidenziati, si segnala quello con l'item 1 per quanto riguarda la rappresentazione tabulare e la rappresentazione grafica. Rispetto agli aspetti logici le condizioni espresse sono state confrontate con i risultati emersi dagli item 5-8
4	a) regola b) formula c) regola d) f. implicita e) regola	La finalità di questo item è quella di vedere quanto una scrittura fosse riconosciuta come rappresentante una funzione; in particolare in a) e in c) si voleva vedere 1) se variabili chiamate con nomi diversi da quelli canonici (x,y) potevano costituire un ostacolo alla comprensione; 2) quanto influisce l'interpretazione semantica delle scritture come formule per il calcolo di aree di figure geometriche nella risposta In b) si voleva mettere in luce se era evidente la distinzione tra polinomio e funzione polinomiale, mentre in d) se la presenza delle due variabili «canoniche» era sufficiente per individuare una funzione. Infine in e) si è voluto vedere come vengono considerate le funzioni a tratti, soprattutto rispetto al dominio e al fatto che una funzione potesse essere espressa da più leggi.	I problemi collegati sono quelli dell'ipostatizzazione delle variabili, oltre al riconoscimento esplicito di una legge associata ad una funzione e alla presenza di funzioni in più variabili.	Ipostatizzazione delle variabili e aspetti semantici relativi all'espressione delle aree delle figure geometriche.	4.e) è l'equazione del grafico di 2.

	TIPO DEFINIZIONE	FINALITÀ	PROBLEMI SOTTOSTANTI	ASPETTI LOGICI	LEGAMI CON ALTRI QUESITI
5-6	Regola	Le finalità dei due item sono relative all'interpretazione di formule che definiscono una funzione nel modo «classico» dell'analisi. In particolare si vuole vedere quanto venga «sentito» o «letto» l'insieme su cui la funzione è definita e se il nome delle variabili influisce sulla lettura che se ne fornisce. Si inizia inoltre in chiave analitica il percorso relativo all'uguaglianza di funzioni.	Il problema dell'uguaglianza	Sul piano logico le questioni sono di carattere semantico (insieme di definizione della funzione), sintattico (espressione della funzione) e morfologico (nome delle variabili). Per un quadro più completo dell'esame degli aspetti logici, si veda prospetto (B)	Si sono collegati tra loro gli item 5, 6, 7 e 8 per un'analisi degli aspetti sintattici e semantici e valutarne conseguentemente la visione che ne usciva, rapportandoli anche ai risultati dell'item 3.
7	Regola	In questo caso si voleva vedere quanto la scrittura diversa (e quindi quanto l'aspetto sintattico-morfologico) potesse influire sul concetto di uguaglianza di funzioni.	Problema uguaglianza e rappresentazione funzioni.	Sintattici (uguaglianza delle funzioni), semantici (grafico e dominio) e morfologici ('scritture' diverse).	Vedi sopra
8	Regola	In questo item si fa esplicito riferimento ai domini, avendo indicato solo le leggi e non l'insieme in cui sono definite. Ciò che soprattutto si voleva vedere era se, in mancanza di esplicite indicazioni, vi era una naturale interpretazione in R.	Differenza tra legge e funzione; dominio.	Sintattici (uguaglianza dei domini: si guarda solo alla regola), semantici (domini diversi: si pensa la regola come interpretata)	Vedi sopra
9	Regola	In questo caso l'attenzione era tutta rivolta al ruolo svolto dalle variabili nel riconoscere due funzioni come uguali	Uguaglianza di funzioni e dei rispettivi grafici	Semantici (grafici diversi) e morfologici (funzioni diverse a cause delle variabili diverse)	Per gli aspetti legati al cambio di variabile, si lega a 5 e 6; in particolare se si hanno molte risposte a , sono da ritenere le risposte negative a 5 e 6 poco influenzate dal cambio di variabile

Griglia di valutazione del questionario

Nelle tabelle seguenti sono riportati le risposte ai vari items con le loro frequenze. Si sono volute evidenziare le risposte che indicavano specifici aspetti logici; in particolare in corsivo sono evidenziati gli aspetti *sintattici*, in grassetto quelli **semantici** e in grassetto corsivo quelli ***morfologici.***
Risposte agli items 1 e 2:

1.a È una funzione?		1.b Dominio / Codominio		Risposte a 2	
Cambio variabili	3	Dominio aut codominio		Nessuna risposta	11
Nessuna risposta	37	+variabili	0	**No**	**5**
No	0	+intervallo	1	No motivato	50
No motivato	2	+insieme	0	**No motiv.+discontinuità** (+*discontinuità con rette*)	**11** *5*
Sì	**36**	Dominio e Codominio		Sì	7
Sì motiv. (prop. inv.)	*9*	+variabili	31	Sì motivato	11
Sì motiv. con funzionalità	12	+intervallo	16	Sì motiv.+discontinuità	4
		+insieme	3		

Risposte all'item 3 (i numeri riportati accanto alle risposte f serviranno per la valutazione successiva degli aspetti sintattici e semantici)

	a	b	g	h	c		d		e		f	
Non risponde	9	16	42	6	Non risp.	21	Non risp.	30	Non risp.	37	**0. Non risp.**	84
No	24	14	*20*	60	Interv. giorni asse x	10	Intervallo, asse y	19	Mesi e valori	25	**1. Coppie o tabularmente**	4
No motivato	4	1	*3*	30	Mesi	51	Valori segnati	1	**Punti**	**22**	2. altro	4
Sì	**51**	*66*	33	3	altro	17	Valori, numeri, punti Mib.	18	**Coppie**	**2**	*3. legge*	*7*
Sì motivato	**6**	*2*	1	0			Indice	4	Mesi o valori	9		
							Altro	26	Altro	4		

Risposte agli items 4-9

	4					5				6			
	a	b	c	d	e	*a*	**b**	**c**	*d*	*a*	**b**	**c**	*d*
no	35	77	43	61	38								
no motiv	0	4	2	3	0	*0*	**0**	**1**	*0*	*0*	**0**	**0**	*0*
sì	29	11	30	21	30	*25*	**14**	**16**	*34*	*14*	**23**	**35**	*26*
sì motiv	39	7	24	14	31	*3*	**0**	**3**	*4*	*0*	**1**	**4**	*3*

	7				8				9			
	a	**b**	**c**	*d*	*a*	**b**	c	**d**	a	*b*	**c**	d
no												
no motiv	*0*	**0**	**0**	*0*	*0*	**0**	0	**0**	0	*0*	**0**	0
sì	*62*	**35**	**11**	*6*	*26*	**32**	3	**39**	73	*4*	**4**	1
sì motiv	*3*	**0**	**0**	*0*	*1*	**3**	0	**2**	9	*0*	**0**	0

2 - Valutazione del questionario

Le analisi delle tabelle precedenti verranno proposte relativamente agli aspetti specifici presi in considerazione. Può essere interessante leggere tali risultati alla luce di quelle delle proprie aspettative di risposte da parte degli alunni di fronte alle varie questioni.

Val la pena di soffermarsi sulle risposte alla domanda 3.e), per certi aspetti la più ambigua del questionario. Accanto ad un buon numero di risposte non date (circa un terzo) si nota che il maggior numero di risposte sono **mesi e valori** (25, di cui 8/V, 4/IV, 2/II e 9/I; quindi equamente distribuite tra biennio e triennio) e **punti** (22, che diventano 24 se si considera anche **coppie**, di cui ben 18 in II). Il primo tipo di risposta, che è stato definito di tipo procedurale, fa pensare ad una procedura che leghi i mesi ai valori, a prescindere da questioni di carattere empirico che un grafico come questo farebbe pensare. Per contro chi risponde «punti» sembra legato più ad una visione empirica. A parte questo, ciò che preme evidenziare è come nella prima risposta si dia risalto agli insiemi come elementi della funzione, mentre nel secondo alle coppie di valori corrispondenti. L'ambiguità della domanda poteva indubbiamente generare una confusione tra il concetto di **ele-**

mento e quello di **componente** (se si vede la funzione come terna ordinata), cosa che non è successa. Questo comunque non autorizza a pensare che i ragazzi si siano accorti di questa distinzione, quanto piuttosto che probabilmente l'aspetto procedurale o quello grafico sono più immediati relativamente al problema «elemento di una funzione» rispetto all'idea di terna.

Come detto, la valutazione del questionario è stata fatta utilizzando Excel ed esaminando soprattutto alcune caratteristiche ritenute peculiari, quali la continuità e gli aspetti logici connessi alle varie questioni.

2.1 - *Valutazione continuità*

Sono stati considerati 4 punti:

a) il dominio e il codominio della domanda 1 (il concetto di continuità viene visto espresso dagli intervalli), a cui è stato assegnato un punto

b) la motivazione per non rappresentare una funzione il grafico dell'es. 2 motivato con la non continuità, a cui è stato assegnato 1,5 punti in quanto più marcato come concetto

c) le risposte alle domande c) e d) del quesito 3, a cui sono stati assegnati 2 punti (1+1) nel caso siano stati indicati intervalli.

In fase di presentazione degli items uno degli obiettivi era vedere quanto il concetto di continuità di una funzione sia presente nei ragazzi. Così nel triennio 27 ragazzi su 49 hanno ottenuto almeno un punto (di cui 11 almeno 2 punti) rispetto ad un ipotetico «zero» visto come punteggio di equilibrio nel caso in cui le risposte fossero date secondo la normale prassi, mentre al biennio hanno ottenuto almeno un punto 13 ragazzi su 50 (di cui 3 almeno 2 punti). Forse il risultato più sorprendente è proprio quello del biennio. In effetti nel triennio è più diffusa la tendenza a considerare le funzioni in modo euleriano, identificandole con la legge che le esprime o addirittura vedendole solo attraverso una legge. In quest'ottica non dovrebbe stupire come il concetto di continuità (non in senso locale, ma intuitivamente globale, vedi [N] ([5])) si vada sempre più radicando negli anni risultando strettamente legato a quello di funzione, anche perché nel triennio, quando si passa al piano cartesiano, si studiano funzioni «quasi ovunque continue». Più sorprendente,

([5]) «Le continu au sens courant, non tecnique du terme, rèleve des perceptions immédiates, naturelles, liées au temps et a l'espace. C'est une sensation tellement familiare que c'est une propriété des choses à laquelle on ne prête pas attention; ce que l'on remarque, ce sont plutôt les ruptures, les points de discontinuité.»

si diceva, il risultato del biennio in cui a parte l'introduzione dei numeri reali non c'è un contatto diretto con la continuità.

Questa presenza della continuità non in senso tecnico come proprietà locale, ma nel senso di cui parla Nordon [N] è dimostrato da alcune risposte del questionario: in prima superiore, quando la continuità non è stata introdotta, su 28 studenti 7 forniscono risposte «continue» nell'item 1, 2 nell'item 3.c) e 6 nell'item 3.d); nella seconda superiore in cui i programmi prevedono l'introduzione dei numeri reali, su 23 studenti, 1 nell'item 1, 1 in 3.c) e 3 in 3.d). A tale continuità «intuitiva» fanno riferimento anche i media quando presentano grafici di interesse economico o sociale in modo «continuo» (item 3), anche quando tali grafici si riferiscono a dati discreti. L'abitudine al continuo sembra ostacolare le risposte nel caso dell'item 1 a studenti di IV e V superiore: su 49 studenti, rispondono solo in 24, per 12 dei quali la tabella è la tabella di una funzione con dominio e codominio dati da intervalli; solo 1 non utilizza la continuità. La difficoltà dei ragazzi del triennio nel vederla come una funzione è riscontrabile anche nel numero delle risposte negative o mancate: 12/V, 13/IV, 5/II, 9/I. In questo senso non sono da trascurare le motivazioni alle risposte date nell'item 2: 2/Vs, 1/Va e 13/IV giustificano la risposta negativa con la discontinuità. Tutto ciò fa pensare che la continuità nel senso di Nordon possa rappresentare un ostacolo epistemologico alla definizione strutturale del concetto di funzione (vedi anche [G]). Questo fa ritenere il concetto di continuità come «naturale».

2.2 - *Valutazione aspetti sintattici, semantici e morfologici*

2.2.1 - Criteri valutativi

La valutazione è stata effettuata seguendo due strade d'indagine: le condizioni legate al quesito 3 e quelle relative ai quesiti 5-8.

Per il quesito 3 la valutazione è presentata mediante un diagramma ad albero in fasi successive, partendo dalle risposte alle domande a) e b).

Nella prima fase sono state prese in considerazione le coppie di risposte (motivate e non)

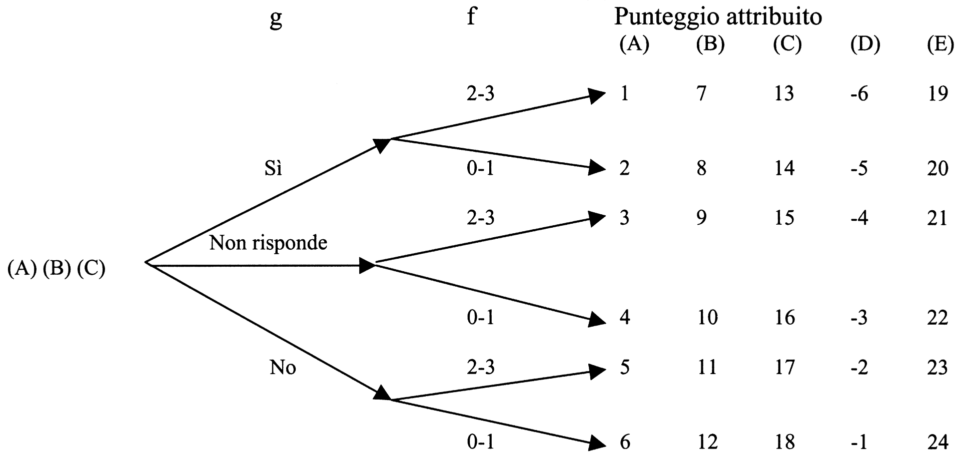
(A) No-Sì (sintattica)

(B) Sì-Sì (semantico-sintattico)

(C) Sì-No (semantico).

A partire da queste si sono valutate le risposte di g) ed f) (nell'ordine) secondo un grado decrescente di «sintatticità» e crescente di «semanticità» seguendo lo schema ad albero sotto proposto (per le risposte 0, 1, 2, 3 relative alla f) si rimanda alla Griglia di valutazione del questionario)

PROSPETTO (A)



Come detto, il punteggio attribuito segue una scala crescente di semanticità e decrescente di sintatticità. A parte sono stati considerati i casi

(D) Non risponde-Sì (massima sintatticità)

(E) Sì-Non risponde (massimo semanticità)

a cui sono stati attribuiti i valori espressi nel grafico.

Ai casi

(F) No-No

(G) Non risponde-Non risponde

È stato attribuito il valore 0 indipendentemente dalle risposte di g) e f)

La valutazione sulla visione semantica o sintattica del concetto di funzione è stata esaminata anche relativamente agli aspetti di questo tipo che emergono dai quesiti 5-8 e che sono evidenziati nella Griglia di Valutazione.

In particolare si sono esaminati i punti 5 a, b, c; 6 a, b, c; 7 a, b, c; 8 a, b, d assegnando 1 ad ogni risposta «semantica» e -1 ad ogni risposta sintattica e successivamente sommandoli tra di loro. Visto che l'equilibrio dovrebbe essere 1 (sempre rispetto all'usuale prassi didattica), ogni punteggio inferiore o superiore a tale valore fa propendere più verso una visione che rispetto all'altra. Tale risultato è stato poi confrontato con quello ottenuto in precedenza.

Per gli aspetti morfologici sono state considerate le domande 5d, 6d, 7d e 9b a cui è stato attribuito 1 punto per ogni risposta affermativa. I valori sono stati poi sommati per un punteggio complessivo compreso tra 0 e 4 (inclusi).

2.2.2 - Analisi

Per quanto riguarda gli aspetti sintattici e semantici coinvolti dal questionario, si sono volute tenere distinte le due questioni poiché le richieste partono da contesti diversi: in 3 da un grafico, in 5-8 da leggi, anche se l'idea di fondo passa per il confronto dei risultati ottenuti nei due percorsi.

Per l'item 3 l'equilibrio può essere visto intorno ai punteggi 9-10. Dall'analisi dei risultati emerge come non sembri prevalere una visione rispetto all'altra: 45/99 propendono per una visione sintattica mentre 40/99 per una visione semantica, senza sostanziali differenze tra le risposte del biennio e quelle del triennio. Questo equilibrio tra le risposte muta drasticamente se si tolgono i risultati della classe Va in cui 11/16 hanno dato una lettura semantica dell'item: in questo caso i rapporti diventano 41/83 e 29/83 facendo aumentare così in modo significativo la forbice.

Il risultato è interessante e per certi aspetti sorprendente. Grafici come quello proposto costituiscono forse il legame più forte tra il concetto matematico di funzione e la quotidianità di chi, con le funzioni, ha apparentemente poco a che fare. Com'è noto il maggior costo (ad esempio in termini di bit) di un'immagine (grafico) rispetto ad uno scritto (legge) viene ripagato dal maggior numero di informazioni che l'immagine porta con sé, purché correttamente lette. Il fatto che sia prevalsa una visione sintattica comporta un rafforzamento dell'idea che sotto al grafico «ci sia qualcosa» o meglio che il grafico sia «regolato» da qualcosa. In questo senso risulta significativo il dato relativo alla classe I (13/28 «semantici» e 7/28 «sintattici») in cui l'insegnamento della fisica comporta nei ragazzi l'abitudine a rappresentare dati sperimentali sotto forma di grafico, senza un'eccessiva preoccupazione della loro provenienza. Questa visione trova conferma se si va ad analizzare il numero dei ragazzi che hanno risposto nello stesso modo (positivamente o negativamente) agli item 2 e 4.e) che in prima sono solo 10/28, contro i 21/30 riscontrabili nelle due quinte ([6]).

Questo non comporta che il salto epistemologico che soggiace al passaggio dal grafico di una funzione alla sua legge sia stato fatto in quinta rispetto alle classi del biennio. Dei 38/99 ragazzi che hanno escluso che 4.e) sia una funzione, nessuno ha motivato la sua risposta; in particolare nessuno ha citato la discontinuità, come

---

([6]) Non si è tenuto conto delle risposte delle classi II e IV in quanto un problema nella fotocopia poteva far sembrare la relazione non funzionale (i due pallini in corrispondenza del 2 sembravano entrambi pieni). Volendo tener conto di tali risposte si dovrebbe quindi invertirne la lettura.

era invece stato fatto, per l'item 2. In Va, poi, 2 alunni classificano il grafico dell'item 2 come quello di una funzione a tratti, mentre 3, distinti dai precedenti, classificano 4.e) come funzione a tratti. Il significato stesso di una dizione come «funzione a tratti» è ambiguo e fuorviante e si ricollega ad un concetto di continuità euleriana (7) (si veda anche [ML]). D'altro canto la «scrittura» 4.e) è l'unica tra quelle proposte che ha una valenza semantica per quanto riguarda gli insiemi numerici coinvolti. Così se alle formule che esprimono le aree è possibile associare un'interpretazione geometrica, nulla viene obiettato rispetto ai possibili insiemi in cui possono variare le indeterminate coinvolte.

L'analisi degli item 5-8 ha invece creato un divario significativo tra biennio e triennio. In effetti su 50 studenti del biennio 29 hanno fornito risposte orientate verso una visione sintattica, mentre 10 sono verso una visione semantica. Le percentuali si capovolgono al triennio: 26/49 «semantici» e 9/49 «sintattici» (addirittura 22/30 «semantici» e 1/30 «sintattici» se si considerano solo le classi quinte). Questo fa pensare che nei ragazzi del biennio sia ancora forte il ruolo svolto dal calcolo letterale e non sia, per contro, ben chiara la distinzione tra frazione algebrica e funzione razionale fratta (evidenziabile anche nelle risposte a 4.b dove su 18 ragazzi che la classificano come funzione 10 appartengono alla classe prima); ben diverso il discorso relativamente ai ragazzi del triennio, i quali tendono naturalmente ad interpretare la legge in R (vedi [G]) e a trascurare gli aspetti morfologici a scapito del «risultato» ottenuto.

Questo fatto trova riscontro nella valutazione morfologica effettuata sugli item 5.d), 6.d), 7.d) e 9.b) in cui, assegnando un punto ad ogni risposta positiva e posto uguale a 1 l'equilibrio (in base alle risposte che avrebbero dovuto dare secondo l'usuale prassi didattica), i ragazzi di quinta che hanno ottenuto un punteggio inferiore a 1 sono 14/30 contro i 7/30 che hanno ottenuto un punteggio superiore a 1 (nel complesso del triennio 19/49 e 12/49), anche se questo risultato non è molto diverso da quello ot-

---

(7) «Nel senso di Eulero, continuità significa invariabilità, immutabilità della legge dell'equazione determinante la funzione su tutto il dominio dei valori della variabile, mentre la discontinuità di una funzione significa un cambiamento della legge analitica, l'esistenza di leggi differenti su due o più intervalli del suo dominio. Le «curve discontinue», spiega Eulero, sono composte da parti «continue» e, giustamente per questa ragione, chiamate «miste o irregolari»; così chiama qualche volta tali curve «meccaniche». In geometria, secondo Eulero, sono le «curve continue» ad essere principalmente studiate. Le funzioni e curve «discontinue» o «miste» del volume 2 di l'Introductio corrispondono alle nostre funzioni a tratti; è per questo che il loro inserimento nell'analisi matematica non ha apportato delle estensioni essenziali al concetto di funzione». Traduzione da [Y].

tenuto dai ragazzi del biennio dove 23/50 hanno ottenuto un punteggio inferiore a 1 contro i 7/50 che hanno ottenuto un punteggio superiore.

Passando infine ad un raffronto fra le risposte a 3 e a 5-8 si conferma una tendenza alla semanticità nel triennio e ad una sintatticità al biennio. Per rendere i risultati di più facile lettura sono stati sintetizzati nella seguente tabella, in cui in ogni cella è indicato (per classe) il numero di alunni che hanno evidenziato

	Sint	Sint-N	Sem	Sem-N	N
I	4	8	3	2	11
II	9	2	3	3	5
IV	4	7	2	3	3
Va	0	0	8	3	5
Vs	1	2	2	4	5
Tot	18	19	18	15	29

Sint: entrambi risultati sintattici;
Sem: entrambi risultati semantici
Sint-N: un risultato sintattico ed uno neutro
Sem-N: un risultato semantico ed uno neutro
N: entrambi risultati neutri (raro) oppure uno sintattico ed uno semantico (non è prevalsa una visione sull'altra).

Come si può osservare, a fronte di un equilibrio sostanziale tra le due «visioni» (confermato anche dal terzo circa che ha una posizione complessivamente neutra) ci sono sensibili differenze tra il biennio ed il triennio, a conferma di un'abitudine (che tende a consolidarsi soprattutto in quinta) all'identificazione di una legge che definisce una funzione con il grafico della stessa.

Questo fatto è confermato anche da alcune risposte dell'item 1. Infatti 9 alunni (tutti del triennio) giustificano l'essere una funzione quella rappresentata dalla tabella col fatto che i valori corrispondenti sono legati da una proporzionalità inversa (senza osservare che uno dei valori della prima colonna è zero). Questo probabilmente dipende dal fatto che la legge della proporzionalità inversa intesa (in modo errato) come legge che lega due variabili che procedono con monotonie opposte, è fortemente radicato nel substrato culturale degli alunni, ma probabilmente dipende anche dalla marcata esigenza che hanno i ragazzi soprattutto del triennio di cercare una legge, vista la loro abitudine a trattare funzioni analitiche.

Le domande che richiedevano delle motivazioni sono sicuramente le più interessanti, in quanto più espressive della visione degli alunni, anche se sono stati relativamente pochi coloro che hanno fornito delle giustificazioni. Si riportano, con le relative frequenze, le più significative e «gettonate» dell'item 4.

Giustificazioni delle risposte all'es. 4 (con frequenze)
Risposte positive

1) Perché hanno una variabile dipendente
2) Hanno una variabile dipendente ed una indipendente
   (Perché ho due variabili)
3) Esiste almeno una variabile
4) Perché uguaglio due relazioni
5) Stabilisce una relazione tra gli elementi di insiemi
   secondo un rapporto preciso
6) Perché al variare delle variabili cambia il risultato
7) Perché esplicita l'andamento
8) Perché A dipende dal raggio
9) Perché sono uguali a qualcosa e non a 0
10) Si riferiscono al modello $y=mx+q$
11) Perché mi danno delle conoscenze
12) Ad ogni x si associa solo una y
13) È una scrittura ad una sola variabile
14) Sono legate ad un valore
15) È come $y=f(x)$
    (Perché y è posta uguale a qualcosa)
16) A dipende da base e altezza
    (A dipende da altezza)
    [A dipende da base]

Risposte negative

A) No, è un polinomio
B) No perché ci sono 3 variabili
C) No perché x e y non sono specificate
D) No perché in varie coppie possono coincidere risultati di coppie diverse
E) Non si fanno associazioni
F) No, è un'equazione

Tabella riassuntiva delle risposte

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
1	0	0	0	1	1
2	4 (1)	1	1	3 (1)	3
3	2	0	2	2	2
4	1	0	0	0	0
5	1	0	1	1	1
6	1	0	1	0	0
7	1	0	1	0	1
8	12	0	0	0	0
9	1	0	1	1	0
10	0	0	0	0	2
11	1	0	1	1	0
12	1	2	1	1	6
13	1	2	0	0	1
14	1	0	1	1	1
15	1	0	0	0	1 (1)
16	0	0	10(1)[1]	0	0
A	0	1	0	0	0
B	0	0	1	0	0
C	0	1	0	0	0
D	0	0	1	1	0
E	0	1	0	0	0
F	0	0	0	1	0

Rispetto alle risposte precedenti, risultano opportune alcune considerazioni:

1) il numero di risposte che coinvolge il termine «**variabile**» è in assoluto il più numeroso (1, 2, 3, 6, 12, 13) ; queste risposte ricordano molto, ed in modo sorprendente la definizione euleriana di funzione (vedi nota 1). Questa «visione» delle funzioni si ritrova anche in [ML];

2) il termine «**relazione**», presente nelle risposte 4, 5 e 9, rimanda ad una concezione insiemistica del concetto di funzione, anche se non è da escludere che qui relazione sia da intendere come «legame» o «legge», come è implicitamente espresso da 7 e 11;

3) riprendendo 7 e 11, si può notare una «semanticità» nel tipo di risposta riscontrabile anche in 10 e 15 in cui si fa un esplicito riferimento ad un modello;

4) a proposito di modelli, un discorso a parte meritano le risposte 8 e 16 in cui è opportuno sottolineare come non si deve escludere la possibilità di riconoscere le formule delle aree proposte in item 4.a) e 4.c) come funzioni proprio grazie all'interpretazione (semantica) che tali formule richiamano, strettamente legate come sono agli enti geometrici (suggeriti anche dal nome delle variabili) cui fanno riferimento. In assoluto, queste sono le risposte che sono state date con maggior frequenza.

Negli ultimi 4 items del questionario, oltre agli aspetti logici precedentemente evidenziati, si sono trattate questioni quali il concetto di dominio di una funzione e quello di uguaglianza di due funzioni.

Soffermiamoci innanzi tutto sul primo.

Come si è già osservato a proposito dei libri di testo consultati, la definizione insiemistica di funzione è molto meno presente di quanto ci si potrebbe aspettare e di quanto poteva succedere qualche anno fa quando l'influenza bourbakista era più marcata. A fronte quindi di una impostazione «statica» (che presenta degli indubbi vantaggi sul piano formale, ma coinvolge questioni delicate della teoria degli insiemi, quali il concetto di coppia ordinata, di prodotto cartesiano, l'uso di quantificatori, ecc., tutte cose che richiedono un livello di astrazione non sempre maturato negli alunni), sembrano prevalere visioni di tipo «dinamico», come è riscontrabile anche nella terminologia usata dai libri stessi e dal modo sagittale che spesso si usa per rappresentare le funzioni. Tutti i testi indicano comunque nel primo insieme il dominio della funzione, per cui tutti gli elementi del primo insieme hanno uno ed un solo corrispondente nel secondo insieme. Com'è noto, il concetto di dominio, soprattutto quando si parte da funzioni definite da una legge di cui si vuole trovare il dominio, è un concetto semantico. Dal questionario emerge una visione «mediata» dalla vista di tale concetto quando questo è affrontato rispetto a questioni grafiche. Così nell'item 2, alla domanda se il grafico proposto è quello di una funzione, 4/I, 1/Vs, 1/Va giustificano la risposta positiva con la sola funzionalità, «dimenticando» ovunque definita, come se il dominio del grafico fosse naturalmente ristretto all'intervallo $[-1{,}8[$ (solo un ragazzo di prima fa questa precisazione); a conferma di ciò 7/Va giustificano esplicitamente la risposta positiva con funzionalità e ovunque definita e non è da escludere che chi non lo sostiene lo supponga implicitamente.

Al di là quindi della definizione di dominio che si ritrova, come detto, in pressoché tutti i libri di testo, rimane nei ragazzi l'ambiguità di fondo che si esplicita poi in analisi quando si chiede di trovare il dominio di una funzione. In fondo, ciò che importa è che la relazione sia funzionale, poiché il dominio «si adegua». In tutto questo sembra evidente come la legge diventi preminente sulle considerazioni di carattere insiemistico, anche per chi, come i ragazzi di prima, ha visto solo quelle.

Un problema analogo lo si riscontra nell'item 8 in cui solo 3 alunni dicono che non si può rispondere, mentre la maggioranza sostiene che i domini sono diversi (35/99) o, sorprendentemente che $D_g \subseteq D_f$ (41/99); non è da trascurare neppure il numero di coloro che afferma che i domini delle due funzioni sono uguali (27/99). In queste risposte si ritrovano tutte le difficoltà legate agli ambiti tipiche del concetto di funzione. Chi risponde che sono uguali pensa soprattutto in ottica sintattica; non sorprende allora che 25 delle 27 risposte siano state date da ragazzi del biennio (12/I e 13/II), abituati al concetto di frazione algebrica. Nei ragazzi del triennio prevale invece una visione semantica della legge che definisce la funzione per cui l'ambito naturale in cui va studiata è R, ambito a cui, implicitamente, vanno poi riferite le questioni riguardanti il dominio in analisi. In effetti 27 delle 35 risposte che parlano di domini diversi per le due funzioni provengono dal triennio. Si può quindi ritenere che l'attenzione al calcolo letterale porti gli studenti del biennio a sviluppare un approccio sintattico, come del resto è emerso anche in precedenza, al contrario dei ragazzi del triennio che privilegiano un approccio semantico (magari sbagliandolo), approccio intrinsecamente legato al concetto di dominio. Del resto, sin dalle prime classi del biennio viene richiesta la determinazione del dominio di una funzione e questa richiesta, che porta alla risoluzione di equazioni o disequazioni, fa muovere gli alunni in ambiti semantici.

Il problema degli ambiti logici entro cui ci si muove si ritrova ovviamente nel concetto di uguaglianza. Quando si parla di uguaglianza tra insiemi l'ambito è sintattico o semantico? Sotto l'aspetto estensionale l'ambito è semantico, mentre sotto l'aspetto intensionale l'ambito è sintattico. Parlando di funzioni la cosa si complica ulteriormente: due funzioni «uguali» possono avere espressioni diverse? In questa direzione vanno soprattutto gli items 5, 7 e 9 ed il fatto che le risposte d) positive non siano nulle evidenzia come anche gli aspetti sintattico-morfologici condizionino negli alunni il concetto di uguaglianza. In termini più raffinati, si potrebbe osservare come in Z_2 le due leggi $y = x^3 + 1$ e $y = x^2 + 1$ individuino le stesse coppie di valori.

3 - Conclusioni

Il questionario è stato proposto non per vedere se gli studenti «conoscano» il concetto di funzione, ma quale idea ne abbiano, a prescindere per certi aspetti dalla prassi didattica. D'altronde, questo lavoro è ben lungi dal voler dare una risposta alla domanda di cosa sia una funzione, cosciente del fatto che il concetto è tuttora in evoluzione [8] e che l'impostazione bourbakista, che meglio di altre risolve

---

[8] Il concetto di funzione compare per la prima volta in modo ufficiale nel 1906, nel programma specifico di una sola scuola: l'Istituto Tecnico di Bergamo.

alcuni problemi di carattere logico, forse non aiuta ad entrare nel merito del significato profondo del concetto. In effetti la definizione bourbakista coinvolge concetti insiemistici tutt'altro che banali: su tutti il concetto di coppia e terna ordinata (9). Storicamente sono state date diverse definizioni di tale concetto, a riprova del fatto che la sua formalizzazione non è affatto banale. A titolo di esempio si riportano le seguenti:

a) coppia come concetto primitivo: Peano [P] (1911), Whitehead-Russell [WR] (1910), Bourbaki [B] (1939);
b) $(a, b) = \{\{a, 1\}, \{b, 2\}\}$: Hausdorff [H] (1914);
c) $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$: Wiener [W] (1914);
d) $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$: Kuratowski [K] (1921).

Dalle definizioni precedenti emerge come nel concetto di coppia ordinata cambi di due unità il tipo (inteso nel senso di complessità dal punto di vista insiemistico) della coppia rispetto a quello delle sue componenti (cioè se le componenti sono di tipo n, la coppia è di tipo $n+2$), mentre la funzione, come insieme di coppie, aumenta ulteriormente di uno (in sostanza diventa di tipo $n+3$). Parlare di funzione quindi vuol dire muoversi in un ambiente del tipo $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)))$, avendo indicato con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A.

È indubbio che questa complessità non aiuta la comprensione sul piano prettamente epistemologico, ma soprattutto fa perdere il senso di relazione tra oggetti e di cambiamento degli oggetti che un'idea dinamica di funzione si porta dietro (con ovviamente tutti i rischi annessi, come si è evidenziato a proposito dei problemi legati al concetto di continuità).

D'altra parte una visione troppo «euleriana» induce a pensare che ogni funzione, rappresentata ad esempio attraverso un grafico, sia sempre individuata da una legge (come del resto evidenziano le 34 risposte positive all'item 3g), perdendo così il carattere di «descrittore» anche di fenomeni empirici. È però indubbio che nella prassi didattica (soprattutto del triennio) la funzione venga di fatto identificata con la legge che la rappresenta, facendo anche pensare, come corollario, che tale legge ci sia sempre. Basta leggere il testo della maggior parte dei problemi di quinta (anche della maturità scientifica) per rendersene conto: se, come dicono tutti i libri di testo, una funzione è di fatto una relazione funzionale e ovunque definita, la dizione «Considera la funzione reale di variabile reale $y = f(x)$; trovane il dominio...» è ovviamente scorretta a meno che

(9) Ricordiamo che nella definizione insiemistica una funzione è una terna ordinata (f, A, B) in cui A e B sono insiemi mentre f è un sottoinsieme di A × B (quindi un insieme di coppie) con le note proprietà di ovunque definitezza e funzionalità.

non si identifichi appunto la funzione con la legge. A dire il vero la dizione corretta sarebbe estremamente pesante, ma forse non si sottolinea abbastanza il fatto che quella proposta è una comoda esemplificazione.

D'altronde l'uso stesso della terminologia che viene spesso usata anche a livello «alto» è discutibile (nella maturità scientifica 1998/99 veniva chiesto di «...studiare la funzione $f(x)$...», come del resto fanno i 18 studenti che considerano 4.b una funzione) soprattutto perché rischia di produrre negli alunni, come visto, un'idea limitativa del concetto di funzione.

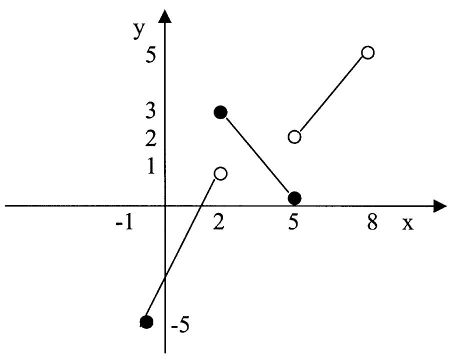
Le riflessioni che come insegnati dovremmo fare sono comunque altre: il concetto di funzione è visto allo stesso modo da tutti i matematici (analisti, logici, geometri, ecc., si veda anche [ML])?. La risposta è ovviamente negativa: per gli analisti ad esempio l'importanza della continuità (della derivabilità e in generale della legge) è diversa rispetto ad un logico, così come è diverso l'aspetto grafico per un geometra e un logico. Noi, come insegnanti, a quale modello pensiamo nel corso dell'attività didattica? E, soprattutto, gli alunni a quale idea, mediata da noi, giungono? L'indubbio salto da una visione sintattica ad una semantica nel passare dal biennio al triennio è voluto in modo cosciente (dagli insegnanti) o diventa una inconscia conseguenza della presentazione dei programmi? Credo che siano queste le domande a cui cercare di rispondere, al di là delle definizioni che possiamo scegliere di dare.

Questionario

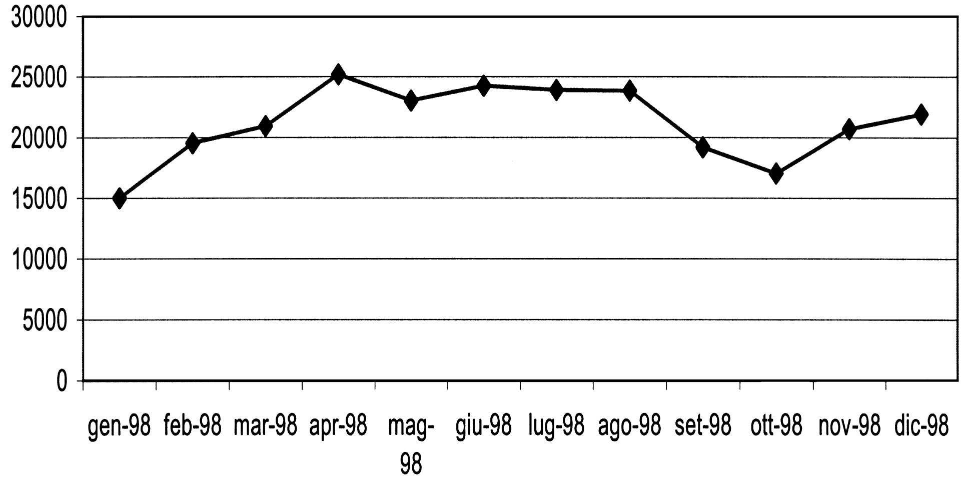
1) La tabella sottostante si usa in statistica. Stabilisci se si tratta di una funzione specificando dominio e codominio

t	z
0,0	0,3989
0,1	0,3970
0,2	0,3910
0,3	0,3814
0,4	0,3983
0,5	0,3521
0,6	0,3332
0,7	0,3123
0,8	0,2897
0,9	0,2661
1,0	0,2420
1,1	0,2179
1,2	0,1942
1,3	0,1714
1,4	0,1497

2) Il seguente grafico rappresenta il grafico di una funzione? Motiva la risposta.

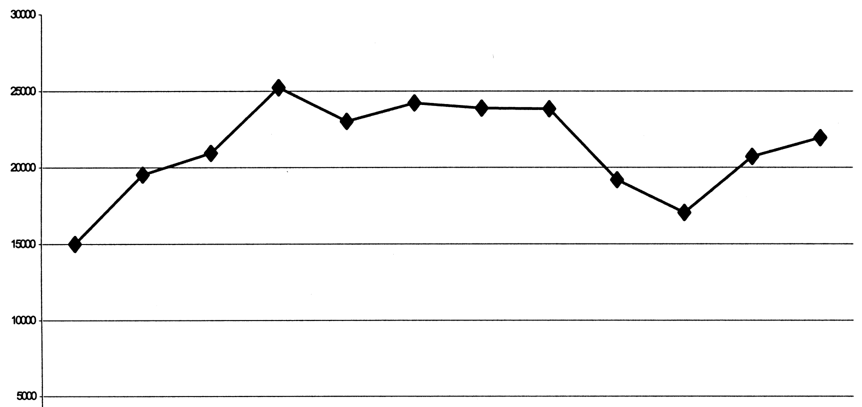


1) Il grafico in figura evidenzia l'andamento dell'indice Mibtel della borsa italiana nel 1998.



Rispondi alle seguenti domande:

a) È una funzione?
b) Rappresenta una funzione?
c) Quali sono gli elementi del dominio?
d) Quali sono gli elementi del codominio?
e) Nel grafico, quali sono gli elementi della funzione?
f) Come è possibile rappresentare la funzione associata al grafico?
g) Esiste una legge che lega le variabili coinvolte?
h) il grafico precedente ed il seguente mostrano cose diverse?



2) Indica, motivando la risposta, quali tra le seguenti «scritture» possono indicare delle funzioni:

a) $A = \pi \bullet r^2$
b) $3x^3 + 2x^2 - 1$
c) $A = \dfrac{b \bullet h}{2}$
d) $x^2 + y^2 = 4$

e) $y = \begin{cases} 2x - 3 & -1 \leqslant x < 2 \\ -x + 5 & 2 \leqslant x \leqslant 5 \\ x - 3 & 5 < x < 8\,. \end{cases}$

Relativamente a ciascuna delle questioni proposte da 5) a 9) indica quali tra le affermazioni a)-d) sono vere e quali false:

3) Le funzioni $y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$ e $y = \dfrac{t + 1}{t - 1}$ definite in N
a) sono uguali
b) hanno lo stesso grafico
c) hanno domini diversi
d) sono diverse

4) Le funzioni $y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$ e $y = \dfrac{t + 1}{t - 1}$ definite in R
a) sono uguali
b) hanno lo stesso grafico
c) hanno domini diversi
d) sono diverse

5) Le funzioni f, g, h definite in R da $f(x) = x$, $g(x) = x \bullet 1$, $h(x) = x + 0$
a) sono uguali
b) hanno lo stesso grafico
c) hanno domini diversi
d) sono diverse

6) Detti D_f e D_g i domini delle funzioni $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x + 2}$ si può dire che
a) uguali
b) diversi
c) non si può rispondere
d) $D_g \subseteq D_f$

7) Le funzioni $y = \dfrac{x^4 + x^3}{x^3 - x^2}$ e $y = \dfrac{t^4 + t^3}{t^3 - t^2}$ definite in R sono
a) uguali
b) diverse perché sono diversi i grafici
c) diverse perché hanno punti diversi
d) diverse a causa dello zero

LIBRI DI TESTO ANALIZZATI-BIENNIO

1) Battelli Moretti-Corso di Matematica Sperimentale e lab. 1-Le Monnier, 1995 (p. 448).
2) Gallo (a cura di)-Fare Matematica 1-SEI, 1988 (pag. 152).
3) Oriolo, Coda, Checchini,..-Lezioni di Algebra, Geometria, Informatica-Ed. B. Mondadori, 1994.
4) Zwirner, Scaglianti, Mantovani-Le basi della matematica-CEDAM, 1993 (p. 98).
5) Ferrauto-I numeri e le funzioni-Dante Alighieri, 1992.
6) Del Giudice, Morina-Corso di Matematica-Petrini, 1989 (p. 314).
7) Tonolini, Manenti Calvi-Fondamenti e percorsi 1-Minerva Italica, 1996 (p. 161).
8) Bruno, Cavalieri, Lattanzio-Metodi e moduli di Matematica-Arnoldo Mondadori, 1999.
9) Venè, Delfrate, Melej-Matematica 1-Sansoni, 1995 (p. 104).
10) D. Paola, Romeni-Manuale di Algebra, geometria, informatica; I-Archimede, 1997 (p. 118).
11) Speranza, Dell'Acqua-Il linguaggio della matematica 1-Zanichelli, 1979 (p. 65).

LIBRI TRIENNIO

12) Dodero, Baroncini, Manfredi-Nuovo corso di geometria analitica e di complementi di algebra-Ghisetti e Corvi, 1994.
13) Lamberti, Mereu, Nanni-Corso di Matematica UNO-ETAS, 1996.
14) Zwirner, Scaglianti-Funzioni in R. Analitica e trigonometria-CEDAM, 1998 (p. 98).
15) Ferrauto, Campitelli-Il nuovo problema geometrico-Dante Alighieri, 1991 (p. 165).
16) Maraschini, Palma-Format, SCI 1-Parvia, 1996.
17) Venè, Betti (a cura di)-Mat. per la classe terza-Sansoni, 1998 (p. 127).
18) Bellipanni, e altri-Matem. per il triennio I-Liguori, 1992 (p. 115).
19) Siviglia, Sala-Il testo di Matematica 1-Morano, 1993.
20) PMA-I matemoduli E-Archimede, 1999 (libro di riferimento del biennio: Paola, Romeni).
21) Cedrazzi-Complementi di algebra e di geometria analitica-Zanichelli, 1987. Analisi matematica-Zanichelli, 1987
22) Citrini, Castagnola, Impedovo-La matematica. Strutture-Einaudi, 1995.
23) Cateni, Bernanrdi, Maracchia-Analisi Matematica-Le Monnier, 1987.

Bibliografia

[BP] M. BORGA e D. PALLADINO, *Oltre il mito della crisi - Fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo*, La Scuola, Brescia 1997.

[B] N. BOURBAKI, *Elements de Mathématiques*, *Livre I, Ch. 2*, Hermann, Paris 1939.

[G] L. GRUGNETTI, *Il concetto di funzione, difficoltà e misconcetti*, L'educazione Matematica, **XV** (IV) **I** (1994), 173-183.

[H] F. HAUSDORFF, Grundzüge der Mengenlehre, 1914.

[K] C. KURATOWSKI, *Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles*, Principia Mathematica, **II** (1921), 171.

[M] C. MARCHINI, *Analisi logica del concetto di funzione*, in E. Gallo, L, Giacardi e C. S. Roero (Eds) Conferenze e seminari Associazione Subalpina Mathesis, 1997-1998, 137-157.

[ML] S. MAC LANE, *Mathematics Form and Function*, Springer, Heidelberg 1986.

[MB] C. MANGIONE e S. BOZZI, *Storia della Logica - Da Boole ai nostri giorni*, Garzanti, Milano 1993.

[N] N. NORDON, *Le continu quand il n'était qu'attribut*, Actes de l'Université d'été '95: Epistemologie et Histoire des Mathématiques, Besançon 1995.

[P] G. PEANO, *Sulla definizione di funzione*, Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (V), **XX**, 3-5.

[Pi] B. PIOCHI, *Funzioni, Limiti, Derivate*, *Atti 4° Incontro Nuclei di Ricerca didattica in Matematica nella Scuola Secondaria Superiore*, Siena, 1994, IRRSAE Toscana, 1995.

[S] A. SFARD, *Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function*, G. Harel and E. Dubinsky (Eds), *The concept of function*, MAA Notes **15**, Mathematical Association of America, 1992, 59-84.

[V] S. VINNER, *Concept definition, concept image and the notion of function*, International Journal of Mathematics Education in Scienze and Tecnhology **14** (1983), 295-305.

[VD] S. VINNER and T. DREYFUS, *Images and definitions for the concept of function*, Journal for Research in Mathematics Education, **20** (1989), 356-366.

[Y] A. P. YOUSCHKEVITCH, *Le concept de function jusq'au milieu du XIX^e siècle*, J. L. Ovaert and D. Reisz (Eds.), *Fragments d'histoire des mathematiques*, Brochure A.P.M.E.P. **41** (1981), 7-68.

[W] N. WIENER, *A simplification of the logic of relation*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **17** (1914).

[WR] A. N. WHITEHEAD and B. RUSSELL, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press 1910.

Abstract

The concept of function is widely treated in didactic literature for what concerns the aspects of difficulties of learning and misconceptions. I try also to interpret students' believes as transition stages among morphologic, syntactic and semantic aspects. Modern presentation of the concept of function is closed to ideas of infinity (potential and actual). It is the arrival point of a long evolution. It is quite strange that in Italian schools this is, in general, the first real object to whom students are faced with, disregarding the historical development. With a more accurate analysis we can find implicit occurrences of functions in primary school and later in treatment of polynomials. These occurrences can be found across history of mathematics. They often hide the use and the concept of variable such as appears in logic.

* * *