

LUCIANA BAZZINI (*)

**Matematica operativa e contemplativa
nella scuola elementare (**)**

In memoria di Francesco Speranza

1 - Radici nel passato

Il dibattito sulle questioni relative all'insegnamento della Matematica, già iniziato nella seconda metà del secolo scorso, è continuato passando attraverso fasi diverse e preparando il terreno per lo sviluppo attuale della didattica della matematica, intesa come disciplina a se stante. Per una descrizione approfondita della storia della didattica della matematica in Italia a partire dal 1859 si vedano l'articolo di Grugnetti (1985) e il capitolo introduttivo (parte prima) del volume «The Italian research in Mathematics Education: common roots and present trends» di Barra et al. (1992).

Senza entrare nei dettagli, vorrei solo menzionare alcune figure, il cui interesse per l'insegnamento della Matematica ha posto delle pietre miliari nel progresso delle nuove idee. Basti ricordare il titolo, estremamente significativo («Insegnamento dinamico») scelto da Federigo Enriques (1871-1946) per il primo articolo sul primo numero del «Periodico di Matematiche» nel 1921. In quell'articolo Enriques pone l'accento sul valore dell'educazione matematica, che deve prendere in considerazione sia l'intuizione che il ragionamento logico, due aspetti dello stesso processo, mutuamente intrecciati. Secondo Enriques l'insegnamento della matematica dovrebbe essere articolato in un'ottica di coordinamento: non argomenti isolati, ma fatti e proprietà mutuamente correlate.

Così come Enriques, altri matematici del tempo avevano dimostrato il loro in-

(*) Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di Padova, Via Belzoni 7, 35131 Padova, Italia.

(**) Ricevuto il 14 Dicembre 1999. Classificazione ZDM D 40.

teresse per questioni di carattere pedagogico. Ad esempio Giovanni Vailati (1863-1909) dichiarò la sua avversione per lo stile di insegnamento predominante all'epoca, essenzialmente teorico e lontano dalla vita reale.

Un altro esempio ci viene da Giuseppe Peano (1858-1932): si dichiarò più volte dalla parte degli insegnanti e si dispiacque dell'insensibilità del mondo accademico di fronte ai bisogni della scuola.

Come logico, Peano denunciò le difficoltà del concetto di limite e del concetto di numero reale. Si interessò anche all'insegnamento primario, sottolineando la necessità di fornire motivazioni e di programmare attività vicine alla vita reale.

Sfortunatamente queste idee si scontrarono con la corrente di pensiero che stava affermandosi in quegli anni, il cosiddetto neo-idealismo di Benedetto Croce (1866-1952) e Giovanni Gentile (1875-1944). Si cominciò ad affermare l'opinione che la scienza e la matematica non avessero valore culturale (riservato solo alle scienze umanistiche), ma soltanto utilità pratica.

Queste idee ebbero un impatto rilevante nell'istruzione, dovute anche al fatto che Croce fu ministro della Pubblica Istruzione dal 1920 al 1921 e Gentile dal 1922 al 1924.

Dal punto di vista della formazione degli insegnanti passò il principio secondo il quale «chi conosce la materia, conosce anche il modo di insegnarla»: e fu la rovina di ogni apertura alle problematiche della didattica.

Alla fine della seconda guerra mondiale, sebbene le maggiori energie fossero rivolte al risanamento dell'economia, qualche nuovo fermento cominciò a farsi sentire nel mondo della scuola. Grazie ad iniziative come, ad esempio, la costituzione del Centro Nazionale per la Didattica nel 1950 e la pubblicazione di riviste dedicate ai problemi dell'insegnamento della matematica, l'Italia fu coinvolta anch'essa nel movimento per il rinnovamento dell'insegnamento della matematica.

In quegli anni la forte personalità di Emma Castelnuovo giocò un ruolo fondamentale per il rinnovamento dell'educazione matematica. Fin dal 1946 la Castelnuovo aveva contestato l'insegnamento esclusivamente formale della Geometria nella scuola secondaria inferiore e si era battuta per un approccio attivo e creativo, che prevedesse un lento passaggio dal concreto all'astratto, dal particolare al generale. L'opera di Emma Castelnuovo come insegnante e come ricercatore è costantemente segnata dalla preoccupazione di collegare matematica e realtà e di costruire i concetti matematici partendo dall'osservazione di oggetti, forme e fenomeni.

Passando a considerare gli anni Cinquanta, ricordiamo che in Europa fu molto accentuato il movimento Bourbakista, che si proponeva di descrivere tutta la matematica alla luce di pochi concetti unificatori (essenzialmente le nozioni di insieme e di struttura).

Le idee Bourbakiste influenzarono immediatamente la didattica, anche perché facilitate da un'apparente convergenza con le concezioni piagetiane.

Nonostante Piaget stesso avesse espresso qualche cautela, la convergenza tra strutture matematiche di base e le operazioni mentali era troppo affascinante per non affermarsi e dar luogo al fenomeno della cosiddetta «Nuova Matematica» (nome ambiguo da un punto di vista culturale, ma adatto alla propaganda, come ebbe ad osservare Giovanni Prodi).

In Italia questa moda ebbe numerosi riscontri a livello di scuola elementare e di scuola media. Tuttavia non produsse cambiamenti di rilievo nei Programmi Ministeriali. Nello stesso tempo note di criticismo cominciarono ad affermarsi: si riconobbe che, nonostante la bellezza del potere unificante di alcune nozioni matematiche, queste non potevano essere trasferite direttamente nella scuola, soprattutto ai primi livelli di scolarità.

Arrivando agli anni Settanta, si riscontra un rinnovato interesse per l'educazione matematica, testimoniato dal supporto fornito dal Consiglio Nazionale delle Ricerche alla costituzione di gruppi di ricerca in Didattica della Matematica. Questi gruppi, denominati Nuclei di Ricerca Didattica, avviarono una sistematica collaborazione tra Università e Scuola, essendo gruppi misti, formati da professori universitari e da insegnanti.

Insieme all'obiettivo principale del rinnovamento dell'istruzione matematica, si perseguirono collateralmente l'aggiornamento e la riqualificazione degli insegnanti, e un nuovo stile pervase le ricerche accademiche, che, calate nel mondo della scuola, acquistarono una loro specificità. Questo non significa che tutti i problemi siano stati risolti e le difficoltà superate: permane un divario tra le ricerche in didattica della matematica sviluppate in ambito accademico e il mondo reale della scuola. È tuttavia bene augurante il fatto che si stia procedendo in un'ottica di lavoro collaborativo, che usi e valorizzi le diverse competenze ed esperienze.

2 - L'innovazione attraverso i Programmi: quale Matematica nella scuola elementare

I Programmi Ministeriali del 1985 sottolineano ripetutamente la dimensione culturale e il valore educativo della matematica, vista sia come strumento utile all'investigazione di fenomeni fisici, sia come riflessione speculativa sulle costruzioni mentali.

Noi condividiamo questa doppia prospettiva, che va tenuta presente in modo dialettico nell'insegnamento della matematica fin dai primi livelli di scolarità.

La matematica è principalmente considerata come una disciplina che produce

cultura. A tal riguardo i Programmi sottolineano nell'introduzione che «L'educazione matematica contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti: di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e deduzione, di controllo e quindi di verifica o smentita. Essa tende a sviluppare, in modo specifico, concetti, metodi e atteggiamenti utili a produrre le capacità di ordinare, quantificare e misurare fatti e fenomeni della realtà e a formare le abilità necessarie per interpretarla e per intervenire consapevolmente su di essa». Ancora, nelle indicazioni didattiche ribadiscono che «In definitiva, l'introduzione al pensiero e all'attività matematica deve rivolgersi in primo luogo a costruire, soprattutto là dove essa si manifesta carente, una larga base esperienziale di fatti, fenomeni, situazioni e processi, sulla quale poi sviluppare le conoscenze intuitive, i procedimenti e gli algoritmi di calcolo e le più elementari formalizzazioni del pensiero matematico.

Si favorirà così la formazione di un atteggiamento positivo verso la matematica, intesa sia come valido strumento di conoscenza e di interpretazione critica della realtà, sia come affascinante attività del pensiero umano».

Generalmente i Programmi, se da una parte riflettono le tendenze evidenziate dalla ricerca, dall'altra inducono nuovi sviluppi. Infatti, sebbene forniscano indicazioni generali per l'insegnamento, lasciano tuttavia al docente il compito di programmare e organizzare le attività in classe.

Così ogni riforma passa in modo pregnante attraverso la figura dell'insegnante.

Date queste condizioni, non è inusuale trovare discrepanze tra ciò che viene raccomandato sulla carta e ciò che è consolidato dalla routine.

Noi siamo convinti che non basta fornire agli insegnanti competenze generali sui contenuti e metodi, ma occorre anche seguirli attraverso forme di educazione permanente.

Da un punto di vista metodologico, prendendo ad esempio il lavoro svolto nell'ambito dei Nuclei di Ricerca Didattica (in particolare il Nucleo di Pavia di cui ho avuto esperienza diretta), possiamo dire che sono identificabili a grandi linee tre momenti fondamentali che hanno permesso una sistematica collaborazione tra ricercatori e insegnanti nella costruzione del curriculum.

Più precisamente si hanno le seguenti fasi:

- Fase di progettazione, in cui vengono discusse le scelte di base e programmate le attività da svolgere in classe
- Fase di sperimentazione in classe
- Fase di riflessione, in cui tutto il lavoro svolto viene sottoposto a discussione.

Per una analisi più approfondita si veda Bazzini (1991) e Malara e Iaderosa (1998).

Lo sviluppo del curriculum si è rivelato un punto di incontro tra teoria e pratica e ha permesso il collegamento di ruoli e competenze diversi (Steiner, 1980, See-ger e Steinbring, 1992).

L'esigenza sentita dagli insegnanti di migliorare il curriculum è un forte stimolo per rivedere gli stili di insegnamento e per aprirsi all'innovazione. Questo tipo di ricerca didattica, orientato al rinnovamento, è stato definito «ricerca per l'innovazione» (Bartolini Bussi, 1993) e mira a trasferire nella pratica esempi di attività analizzate a priori: la responsabilità delle scelte viene condivisa da un gruppo vasto che include almeno insegnanti e ricercatori. Secondo questo modello, all'azione segue la riflessione e la valutazione, sempre in un'ottica di rinnovamento.

3 - Matematica operativa e matematica contemplativa

Cercheremo ora di puntualizzare alcune scelte adottate nell'ambito di una ricerca sullo sviluppo del curriculum di matematica nella scuola elementare, condotta dal Nucleo di Ricerca Didattica di Pavia in seguito alla pubblicazione dei Programmi Ministeriali del 1985.

Nella filosofia sottostante al progetto, la matematica è considerata nel suo duplice aspetto di scienza operativa, cioè mezzo di lettura e interpretazione della realtà, e di scienza contemplativa, cioè come disciplina che riflette su se stessa e genera nuova conoscenza (Speranza, 1992, 1997).

Come conseguenza ci si aspetta che gli studenti sviluppino una concezione della disciplina secondo queste linee, in accordo con l'insegnamento che viene loro impartito.

Secondo Polya (1945), la matematica è una scienza aperta: è la scienza di Euclide, ma anche qualcos'altro. Da un punto di vista teorico, la matematica è una scienza deduttiva, mentre da un punto di vista pratico essa è induttiva e sperimentale. Questi due aspetti sono nati insieme, come testimonia l'evoluzione storica della disciplina, e da sempre continuano a convivere. Se presi separatamente, essi possono portare a concezioni parziali o distorte della matematica e del suo insegnamento: a un pragmatismo tecnologico o a una pura avventura intellettuale.

Nel curriculum di matematica riteniamo che i due aspetti vadano tenuti ugualmente presenti, fin dalla scuola elementare. Secondo noi alcuni contenuti hanno senso, a livello primario, solo se introdotti attraverso le applicazioni (ad esempio i primi elementi di Statistica), altri (ad esempio le regolarità numeriche) acquistano significato solo in un quadro di riflessione speculativa.

Inoltre ci sono contenuti (come ad esempio la nozione di angolo e quella di parallelismo) che possono essere introdotti da punti di vista diversi.

Ovviamente un'integrazione tra «matematica pura» e «matematica applicata» è altamente raccomandata per evitare pericolose dicotomie. Ad esempio concetti e procedure che nascono in contesti applicati vanno successivamente trasferiti a contesti di riflessione speculativa. Analogamente concetti originati in ambiti speculativi devono trovare applicazione in ambiti più propriamente «pratici».

Vediamo ora due esempi di attività didattiche in cui vengono evidenziati gli aspetti prima citati.

Matematica per sé: partendo dai numeri pari...

Fisseremo la nostra attenzione sulle proprietà dei numeri legate alla nozione di multiplo. Gli alunni sono progressivamente stimolati a indagare nel mondo dei multipli e tale indagine trova una sua giustificazione unicamente nella speculazione intellettuale.

Qui di seguito riportiamo una breve sintesi dell'itinerario seguito durante l'intero ciclo della scuola elementare.

Classe 1^a

Un primo approccio ai numeri pari e dispari avviene nell'ambito della ricerca dei numeri «amici», cioè di quei numeri che danno per somma un numero dato. I bambini notano che alcuni numeri ammettono una coppia di numeri amici uguali (es. $10=5+5$), altri no. In base a questa proprietà li chiameremo numeri pari (i primi) e numeri dispari (i secondi). Osserviamo che qui la terminologia «numeri amici» (suggerita dalla proposte dei bambini) non è consona con quella tradizionale, che definisce numeri amici quelle coppie di numeri in cui ciascun componente equivale alla somma dei divisori dell'altro.

Sulla linea dei numeri, partendo da 0 e saltando di due, troviamo i numeri pari: partendo da 1 troviamo i dispari

Classe 2^a

I numeri sono ora collegati alla loro rappresentazione mediante schieramenti di palline. I numeri pari ammettono uno schieramento in due fila (contenenti lo stesso numero di palline), i dispari no.

Questa proprietà si può estendere alla considerazione dei numeri che ammettono uno schieramento in tre fila: saranno questi i multipli di tre. E i salti di tre sulla linea dei numeri permetteranno di raggiungere tutti i multipli di tre (sempre partendo da zero).

Così per i multipli di quattro, di cinque e così via.

Classe 3^a

La moltiplicazione e la divisione permettono altre investigazioni sui numeri multipli, legate alla nozione di divisore. Attraverso un'analisi di casi si vede che i numeri pari, i quali ammettono uno schieramento in due fila, sono divisibili per due. I numeri dispari invece, nella divisione per 2, ammettono come resto 1.

Lo studio continua coi multipli di tre, dove i possibili resti sono 1 e 2. Sulla linea dei numeri, partendo ad 1 e saltando di tre si ottengono i numeri che divisi per tre danno resto 1, partendo da 2 si ottengono quei numeri che divisi per tre danno resto 2.

Così per i multipli di quattro.

Classe 4^a

Si ricerca un modo per descrivere con una scrittura unica i numeri pari. Gli studenti sono invitati ad osservare che $2=2 \times 1$, $4=2 \times 2$, $6=2 \times 3$, ...: i numeri pari sono «multipli di due». Dall'osservazione di questa regolarità scaturisce la scrittura $2 \times n$, che sembra appropriata a descrivere la proprietà caratterizzante i numeri pari.

I numeri dispari sono riconosciuti rappresentabili con la scrittura $2 \times n + 1$. L'estensione ai multipli di tre è naturale: essi sono rappresentabili con la formula $3 \times n$ e i numeri che non sono multipli di tre sono del tipo $3 \times n + 1$ o $3 \times n + 2$. Così per i multipli di quattro.

Classe 5^a

Vengono analizzate le proprietà che emergono quando i multipli si combinano tra loro per mezzo delle operazioni aritmetiche. Durante queste attività l'aspetto contemplativo è fortemente evidenziato. Infine si cerca un modo per calcolare e descrivere la somma dei primi n numeri naturali, la somma dei primi n numeri pari, la somma dei primi n multipli di tre e così via: un gioco matematico senza fine...

Matematica in un contesto reale

Studi sperimentali in didattica della matematica hanno dimostrato che contesti significativi non sono soltanto uno stimolo ad apprendere, ma anche un mezzo per creare strategie (Rogoff e Lave, 1984; Bishop, 1988; Boero, 1989, Nunes, 1993).

La ricerca di contesti ricchi e produttivi è un denominatore comune di studi a lungo termine.

In particolare l'ambiente sociale in cui i bambini vivono offre un contesto appropriato per fare matematica, in quanto i numeri servono a descrivere la realtà,

ad esempio attraverso raccolte di dati statistici. La statistica infatti offre un'ottima opportunità didattica di descrivere e interpretare la realtà, cogliendo aspetti non sempre visibili con altri strumenti. È interessante notare come osservazioni di carattere qualitativo possano essere confermate o smentite da elaborazioni statistiche sui dati stessi (analisi quantitative).

Riportiamo qui una sintesi di un possibile itinerario didattico.

Classe 1^a

I dati relativi a semplici indagini statistiche sono raccolti e rappresentati per mezzo di grafici. Queste raccolte usualmente riguardano fenomeni legati alla vita del bambino: il numero di fratelli, le scuole materne di provenienza, le preferenze riguardo al cibo e così via.

I numeri servono per contare e per confrontare, i grafici per organizzare e rappresentare.

Classe 2^a

I dati raccolti in una classe sono confrontati coi dati raccolti in un'altra classe, generalmente parallele. L'ambito sociale comincia ad estendersi fuori dalla classe. Una delegazione di alunni viene incaricata di spiegare all'altra classe le condizioni per effettuare l'indagine. Questo fa sì che i bambini diventino consapevoli della metodologia usata.

I bambini appartenenti alle due classi vengono dapprima considerati due popolazioni disgiunte, poi vengono unite in un'unica popolazione. Viene introdotta la nozione di «moda».

Classe 3^a

Vengono analizzati dati relativi a bambini di una classe e ai bambini dell'intera scuola: ad esempio si misurano le altezze e le si rappresentano su un grafico. In questo contesto, la ricerca di un virtuale livellamento dei valori porta a un primo approccio alla nozione di «valore medio». Poiché tale valore non può in genere essere espresso con un numero naturale, si avverte il bisogno di estendere il campo dei numeri naturali. Più avanti si ritornerà sul calcolo dei valori medi, quando le frazioni e i numeri decimali saranno padroneggiati meglio.

Si svolge anche un'indagine sul numero degli alunni di ogni classe e lo si relaziona al numero degli alunni di tutta la scuola. Lo studio si allarga poi agli alunni frequentanti le scuole del quartiere: l'analisi quantitativa procede parallela alla descrizione di fattori ambientali e sociali.

Classe 4^a

Dalla microsocietà degli alunni della classe alla macrosocietà degli adulti: le interviste a genitori e nonni danno lo spunto per studiare i cambiamenti sociali verificatisi nell'arco di circa settant'anni.

I dati sul numero di figli per famiglia nelle tre generazioni (nonni, genitori, figli) danno un quadro immediato del decremento demografico; ugualmente i dati relativi alle regioni di nascita dei nonni, dei genitori e dei figli evidenzia il fenomeno dell'immigrazione dal Sud negli anni Cinquanta. I dati relativi alle professioni evidenziano un progressivo incremento del settore terziario e l'emancipazione femminile.

Di più, i dati raccolti nella classe sono confrontati coi dati relativi all'intera popolazione italiana. Qui si riscontra un uso massiccio di frazioni e percentuali, uso che nasce da un'esigenza reale.

Classe 5^a

Viene svolto uno studio, qualitativo e quantitativo, dei quartieri della città, mediante l'utilizzo di dati forniti dalle autorità locali. I dati relativi all'estensione di ogni quartiere e della sua popolazione sono rapportati tra loro nella nozione di densità di popolazione. Parallelamente si studiano le densità delle regioni italiane.

Come le attività svolte nella classe quarta avviano a un'indagine storica del passato, qui ci si apre allo studio della geografia del territorio. Come noto, l'interazione di diversi ambiti di conoscenza offre valide opportunità educative: mentre la matematica offre strumenti per interpretare i fenomeni di altri contesti, a loro volta questi contesti offrono spunti significativi per l'indagine matematica.

4 - Qualche commento

Nello sviluppo del curriculum portato avanti dal Nucleo pavese la scelta di realizzare un'integrazione tra i due aspetti, operativo e contemplativo, della matematica è stata condivisa da tutto il gruppo fin dalla fase di progettazione. Questa integrazione è stata perseguita già nelle prime attività: ad esempio, nella classe prima, i numeri del calendario sono stati messi in relazione con la linea dei numeri. Nelle raccolte di dati il numero «0» ha subito acquistato significato (quello di numero che rappresenta la numerosità di un insieme senza elementi) ed è diventato un oggetto matematico per ulteriori investigazioni. Similmente, lo studio dei multipli interagisce coi ritmi ciclici della scansione del tempo.

Accanto alla scelta di enfatizzare i due aspetti della matematica c'è anche la scelta di collegare tali aspetti in modo dialettico, ogni volta che si presenti l'occasione.

Così l'idea della matematica come disciplina aperta diventa dominante.

Quale visione della matematica si configuri poi nella mente degli allievi come conseguenza del curriculum seguito è difficile dire. Noi sappiamo che le concezioni evolvono sul lungo periodo, che trascende la scuola primaria. Tuttavia da indagini informali sugli allievi che hanno seguito questo percorso risulta un buon apprezzamento della disciplina, sicuramente non si sono verificate delle chiusure.

Sorprendente anche l'effetto sugli insegnanti che hanno partecipato alla ricerca, in quanto si è registrato un profondo cambiamento nelle loro concezioni: molti hanno dichiarato di aver acquisito una nuova attitudine verso la matematica, che hanno scoperto essere una scienza viva, interessante e divertente.

Bibliografia

- [1] M. BARRA, M. FERRARI, F. FURINGHETTI, N. A. MALARA and F. SPERANZA (Eds.), *The Italian Research in Mathematics Education: Common Roots and Present Trends*, Progetto Strategico del CNR, Tecnologie e Innovazioni Didattiche, Quad. N. 12 (1992).
- [2] M. BARTOLINI BUSSI, *Theoretical and empirical approaches to the classroom interaction*, in Strasser R. Ed., *Social Framing of Teaching and Learning Mathematics*, Kluwer, Dordrecht 1993.
- [3] L. BAZZINI, *Curriculum development as a meeting point between research and practice*, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 91/4 (1991), 128-131.
- [4] P. BOERO, *Mathematical literacy for all: experiences and problems*, Actes de la 13^e Conférence Internationale PME, Paris 1 (1993), 62-74.
- [5] A. BISHOP, *Mathematical Enculturation*, Kluwer, Dordrecht 1993.
- [6] E. CASTELNUOVO, *Un metodo attivo nell'insegnamento della geometria intuitiva*, Periodico di Matematiche (IV) XXIV (1946), 129-140.
- [7] F. ENRIQUES, *Insegnamento dinamico*, Periodico di Matematiche (IV) I (1921), 3-16.
- [8] L. GRUGNETTI, *Lineamenti della Storia della Didattica della Matematica in Italia dal 1859 al 1950*, Archimede LXXXII (1985), 28-44.
- [9] N. A. MALARA and R. IADEROSA, *Theory and Practice: the case of fruitful relationship for the renewal of the teaching and learning of Algebra*, in Les liens entre la pratique de la classe et la recherche en didactique des mathématiques, Actes de la CIEAEM 50 Neuchatel, Suisse 1998, 38-54.
- [10] T. NUNES, A. DIAS SCHIELMANN and D. W. CARRAHER, *Street mathematics and school mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge 1993.
- [11] G. POLYA, *How to solve it*, Princeton Univ. Press, Princeton 1945.
- [12] B. ROGOFF and J. LAVE, *Everyday cognition: its development in social context*, Harvard Univ. Press, Cambridge MA. 1984.

- [13] F. SPERANZA, *Revolutions over philosophical and didactical paradigms*, in Bazzini L., Steiner H. G. (Eds.), Proceedings of the Second Italian-German Bilateral Symposium on Didactics of Mathematics, Materialien und Studien Band 39 IDM, Bielefeld 1992.
- [14] F. SPERANZA, *Scritti di Epistemologia della Matematica*, Pitagora Ed., Bologna 1997.
- [15] F. SEEGER and H. STEINBRING, *The Dialogue between Theory and Practice in Mathematics education: Overcoming the Broadcast Metaphor*, Materialien und Studien Band 38, IDM, Bielefeld 1992.
- [16] H. G. STEINER, *School curricula and the development of science and mathematics*, Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. II (1980), 97-106.

Summary

The cultural dimension of Mathematics shows two main aspects, which are dialectically intertwined. The first aspect refers to Mathematics as a science useful to the description and interpretation of reality, while the second one refers to Mathematics as a reflective speculation, not strictly dependent on reality. The two faces of Mathematics should be equally present in school mathematics, from the very beginning. As a consequence, school curriculum should develop according to this perspective.

Some examples concerning primary education are discussed here.

* * *