Riv. Mat. Univ. Parma (6) 3* (2000), 51-61

GIORGIO T. BAGNI (*)

Matematica e bellezza, bellezza della Matematica (**)

In memoria di Francesco Speranza

«L'attenzione che i matematici hanno per le qualità estetiche della loro disciplina (...) è notevole; da qui discende l'idea di molti matematici, anche contemporanei, che l'attività matematica e quella artistica siano in qualche misura molto simili, paragonabili. La creatività sarebbe il fattore che unisce Matematica e Arte, Arte e Scienza più in generale» (Emmer, 1991, p. 27).

Così scrive Michele Emmer, matematico e pensatore tra i più sensibili all'interazione tra Matematica ed Arte. Ma come collegare la Matematica e la bellezza? Nell'opera citata, Emmer affianca due citazioni che sembrano instaurare una sorta di equivalenza logica tra Matematica ed immaginazione:

«La più alta categoria dell'intelletto immaginativo è sempre eminentemente matematica» (E. A. Poe). «La facoltà che mette in moto l'invenzione matematica non è il ragionamento, bensì l'immaginazione» (A. De Morgan).

La ricerca matematica, quindi, sarebbe resa possibile, verrebbe addirittura guidata dalla creatività e dall'immaginazione, così come lo è la ricerca artistica. Non possiamo certamente escludere un importante nesso tra la scoperta, l'invenzione matematica e l'atto umano dell'immaginare, del creare; ma un tale legame, se isolatamente affermato, può risultare troppo vago: in questo senso, allora, ogni espressione del pensiero umano, ogni azione, ogni riflessione appare, in ultima analisi, inscindibilmente basata sulla creatività. Limitare il legame tra la Matematica e l'Arte a questo loro comune denominatore (peraltro evidente) equivarrebbe ad affermare che entrambe sono attività umane: affermazione indubbiamente vera, ma troppo generica per apparire significativa.

Non manca di notare lo stesso Emmer che «la creatività, che dovrebbe spiega-

(*) Dipartimento di Matematica, Università «La Sapienza», P.le Aldo Moro 5, 00185 Roma, Italia.

(**) Ricevuto il 29 novembre 1999 ed in forma revisionata il 18 settembre 2000. Classificazione MSC 97 C 50.

re tutto, rischia di non spiegare nulla. È più significativo (...) andare a esaminare delle situazioni ben precise e analizzare possibili connessioni, piuttosto che parlare in generale di legami tra Arte e Scienza» (Emmer, 1991, p. 28). La Matematica, infatti, è un ottimo linguaggio per studiare criticamente almeno in modo parziale non poche opere d'Arte, artisti e filoni non solo del lontano passato, ma anche dell'età moderna o addirittura contemporanei.

Il linguaggio della Matematica, inoltre, mostra tutta la sua ricchezza e le sue capacità di applicarsi a campi (apparentemente) del tutto estranei al mondo delle Scienze. Qualsiasi cosa si inventi, la natura, il linguaggio e le sue creazioni sono infatti sempre collegati in una struttura unica, dalla quale appare impossibile sfuggire; ed in tale struttura non solo la Matematica rientra pienamente, ma addirittura giunge spesso ad esser il fulcro.

Non possiamo peraltro non notare che tutto ciò può costituire un importante bagaglio didattico, ad ogni livello scolare: quando si parla del «saper vedere» in Geometria è assai facile e produttivo ricollegarsi all'esame di figure come quelle di Maurits Cornelius Escher (1898-1972), prototipo del pittore-matematico, o dello svedese Oscar Reutersvärd, con le sue affascinanti strutture impossibili ottenute mediante raffinati artifici prospettici (la «prospettiva giapponese»).

Per quanto riguarda l'applicazione delle teorie matematiche a problemi visuali o, comunque, artistici, ricordiamo che spesso, nella storia della cultura umana, l'artista si è rivolto alla Matematica per migliorare la tecnica di rappresentazione del reale, per elaborare modelli nuovi di decorazione, oppure per dare dignità razionale al proprio operare artistico. Quando si parla di prospettiva, ad esempio, è spontaneo pensare ai pittori-matematici del Rinascimento, prima italiano e poi tedesco, ed in particolare a Piero della Francesca (1416?-1492), artista raffinatissimo che con l'opera *De prospectiva pingendi* fu anche il trattatista più profondo di quel periodo (Bagni & D'Amore, 1994).

Tuttavia, l'interazione tra la Matematica e l'Arte potrebbe essere arricchita da un nuovo rapporto, ottenuto, come vedremo, invertendo i ruoli delle due discipline. Citiamo ancora un passo di Michele Emmer, in cui lo studioso, ricordando a sua volta uno scritto di François Le Lionnais, mette in guardia i propri lettori dall'attribuire eccessiva importanza a certe notissime applicazioni della Matematica all'Arte figurativa (nel caso specifico, Emmer si riferisce alla sezione aurea: Le Lionnais, 1962):

«Nel capitolo *Arts et Esthétique: les Mathématiques et la Beauté*, Le Lionnais risponde a chi vuol ridurre il rapporto tra Matematica e Arte alle proporzioni, ai numeri: *In Matematica esiste una bellezza che non deve essere confusa con il possibile apporto della Matematica alla bellezza delle opere d'arte. L'estetica del-*

la Matematica deve essere distinta dalle applicazioni della Matematica all'estetica» (Emmer, 1991, p. 55).

Dunque: dalla Matematica dell'Arte (ovvero: talvolta presente nell'Arte), all'Arte (ovvero: l'estetica) presente nella Matematica.

Subrahmanyan Chandrasekhar, astrofisico indiano, premio Nobel per la Fisica nel 1983, è autore di un agile e stimolante libretto dal titolo *Verità e bellezza* (Chandrasekhar, 1990). In esso, attraverso la considerazione di numerosi esempi e la presentazione di aneddoti significativi, l'Autore esprime il proprio «pensiero generale sulle motivazioni che ispirano l'attività artistica e sui modelli di creatività che si esplicano nel campo della Scienza» (dalla Prefazione: Chandrasekhar, 1990, p. 15). Osserva Chandrasekhar:

«La scoperta di Pitagora che corde vibranti, egualmente tese, suonano armoniosamente se le loro lunghezze sono in rapporti numerici semplici, stabilì per la prima volta una connessione profonda fra l'intelligibile e il bello» (Chandrasekhar, 1990, p. 90).

Nell'esempio ora riportato, però, il ruolo della Matematica nella correlazione «fra l'intelligibile e il bello» tende a restare strumentale: l'affascinante «connessione profonda» resta intesa nel sussidio che la Matematica offre alla descrizione del fenomeno naturale; il «bello» sembra ancora inscindibilmente legato all'armonia dei suoni ottenuti facendo vibrare le corde, più che a quei «rapporti numerici semplici». Ma non sempre è così: lo stesso Chandrasekhar ricorda che George Neville Watson (1886-1965), commentando una formula di Srinivasa Aayangar Ramanujan (1887-1920) scrisse:

«Una formula come:

$$\int_0^\infty e^{-3\pi x^2} \frac{\sinh \pi x}{\sinh 3\pi x}\, dx$$

$$= e^{-\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n(n+1)\pi}(1+e^{-\pi})^{-2}(1+e^{-3\pi})^{-2}\dots(1+e^{-(2n+1)\pi})^{-2}$$

mi dà un'emozione che è indistinguibile da quella che provo quando entro nella Sagrestia Nuova di San Lorenzo a Firenze e vedo dinanzi a me l'austera bellezza del Giorno, della Notte, del Crepuscolo e dell'Aurora che Michelangelo ha posto sulle tombe di Giuliano e di Lorenzo de' Medici» (Chandrasekhar, 1990, p. 101).

L'emozione ora descritta non è più legata ad un elemento esterno alla Matematica, ad un fenomeno solo matematicamente descritto. L'oggetto di austera bellezza è stavolta una formula, un concetto della Matematica stessa.

Ma come può la Matematica *essere* Arte? Non è immediato dare una risposta generale a questa domanda, soprattutto a chi non è un matematico (o, almeno, a chi non ha frequentato ben più di un biennio universitario di area matematica). Possiamo però affermare che certamente alcuni concetti propri della Matematica non possono lasciare indifferente il lettore per la loro eleganza, per l'intrinseca capacità di sintesi, per la loro assoluta, affascinante generalità. Insomma, per una loro indubbia... bellezza, concettuale e spesso anche formale (1).

L'ordinata, sintetica, rigorosa pulizia formale di una dimostrazione, unita alla sua efficacia logica, non raramente inducono nel lettore una sensazione di ammirazione, di convinto compiacimento. Perché, dunque, non definire alcune dimostrazioni matematiche come vere e proprie opere d'Arte?

Uno dei più interessanti ed eleganti risultati matematici di ogni tempo è legato alla celebre proposizione XX del Libro IX degli *Elementi* euclidei (Euclide, 1970), riferita all'infinità dell'insieme dei numeri primi (Hardy & Wright, 1938; Ribenboim, 1980, p. 3; il suo ruolo nello sviluppo della Teoria dei Numeri è esaminato in: Narkiewicz, 2000):

Teorema (Euclide, 300 a.C.). *I numeri primi sono sempre più di ogni assegnata quantità di numeri primi.*

Dimostrazione. Siano $p_1 = 2 < p_2 = 3 < \ldots < p_r$ numeri primi. Poniamo: $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r + 1$ e sia p un numero primo che divida P; allora p non può essere alcuno dei $p_1, p_2, \ldots, p_r$, altrimenti p dividerebbe la differenza $P - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = 1$, che è impossibile. Dunque questo p è un altro primo, e p_1, p_2, $\ldots$, p_r non sono tutti i primi. ■

Certamente la dimostrazione precedente deve essere considerata una gemma degli *Elementi*. Ricordiamo il commento di Godfrey Harold Hardy (1877-1947):

---

(1) Ad esempio, ogni studente di Algebra (anche alle prime armi) ha fatto la conoscenza del concetto di gruppo. Ebbene, le caratteristiche stesse del gruppo, le sue straordinarie capacità di inquadrare, descrivere molte situazioni elementari diverse (algebriche e non, da tempo note all'allievo) non possono non essere considerate eleganti, avvincenti; in una parola: belle. Con I.N. Herstein diciamo: «Per tutti i matematici, la bellezza e l'importanza della prima struttura che vogliamo trattare, quella di gruppo, sono fuori discussione» (Herstein, 1982, p. 28).

«Questa è una dimostrazione per *reductio ad absurdum*, e la *reductio ad absurdum*, tanto amata da Euclide, è una delle più belle armi di un matematico. È un gambetto molto più raffinato di qualsiasi gambetto degli scacchi: un giocatore di scacchi può offrire in sacrificio un pedone o anche qualche altro pezzo, ma il matematico offre la *partita*» (Hardy, 1989, cap. 12, pp. 72-73).

Nella stessa opera di Hardy (Hardy, 1989, p. 73) viene osservato che la dimostrazione dell'infinità dell'insieme dei numeri primi può essere condotta anche senza far ricorso alla *reductio ad absurdum* (come richiesto, ad esempio, da alcune moderne scuole di logica). Nei ventitre secoli che hanno seguito la redazione del capolavoro del grande Alessandrino il teorema in questione ha appassionato ancora molti matematici (alcune dimostrazioni sono riportate nel cap. 1 di Ribenboim, 1980 e in: Aigner & Ziegler, 1998, pp. 3-6).

Due millenni dopo Euclide, Leonhard Euler (1707-1783) ([2]), *nell'Introductio in Analysin Infinitorum* (1748), dimostrò il risultato seguente (seguiremo la dimostrazione facendo riferimento a: Tenenbaum & Mendès France, 1997, pp. 23-24):

Teorema (Leonhard Euler, 1748). *La serie dei reciproci dei numeri primi diverge.*

Dimostrazione. Ricordiamo innanzitutto che ogni intero positivo n può essere scritto in forma unica come prodotto di un numero q privo di fattori quadrati e di un numero m^2. Indicando con q un numero privo di fattori quadrati, possiamo scrivere:

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} \sum_{q \leqslant x} \left(\frac{1}{q} \sum_{m \leqslant \sqrt{x/q}} \frac{1}{m^2} \right) \leqslant \sum_{q \leqslant x} \left(\frac{1}{q} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \right).$$

([2]) Ricordiamo l'esortazione di Pierre Simon de Laplace (1749-1827): «Lisez Euler, c'est notre maitre à tous!» (Bagni, 1996). Scrive però D. J. Struik: «È istruttivo dar conto non solo di alcuni dei contributi di Euler alla scienza, ma anche della debolezza di qualche sua conclusione (...) Certo bisogna stare attenti a non criticare troppo frettolosamente Euler per il suo modo di manipolare le serie (...) A molti dei risultati del suo lavoro apparentemente indiscriminato sulle serie è stato dato un senso assolutamente rigoroso da parte dei matematici moderni» (Struik, 1981, pp. 160-161; indichiamo inoltre: Kline, 1991; Arrigo, 1997, pp. 47-48).

Essendo $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 2$ risulta:

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} \leqslant 2 \sum_{q \leqslant x} \frac{1}{q}. \tag{1}$$

Consideriamo ora la somma $\sum_{q \leqslant x} \frac{1}{q}$ ed indichiamo con p un numero primo:

$$\sum_{q \leqslant x} \frac{1}{q} \leqslant \prod_{p \leqslant x} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \leqslant \exp\left\{\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p}\right\}. \tag{2}$$

Ciò si ottiene sviluppando il prodotto $\prod_{p \leqslant x} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$, notando che è: $1 + a \leqslant e^a$ e ponendo quindi in questa formula: $a = 1/p$. In base alla (1) ed alla (2) possiamo dunque scrivere:

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} \leqslant 2 \exp\left\{\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p}\right\}.$$

Da $\frac{1}{n} \geqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$ segue $\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} \geqslant \sum_{n \leqslant x} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \geqslant \log x$ e ciò ci permette di scrivere:

$$\log x \leqslant \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} \leqslant 2 \exp\left\{\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p}\right\}$$

da cui infine $\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} \geqslant \log \log x - \log 2$ e, considerando che $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$, possiamo affermare che la serie dei reciproci dei numeri primi diverge. ■

Di questo stesso risultato proponiamo una seconda affascinante dimostrazione (Erdös, 1938), dovuta a Paul Erdös (1913-1997):

Teorema (Paul Erdös, 1938). *La serie dei reciproci dei numeri primi diverge.*

Dimostrazione. Siano $p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 < \ldots$ i numeri primi (in ordine crescente).

Ammettiamo per assurdo che la serie dei reciproci dei primi sia convergente: allora esisterebbe un indice naturale k tale che:

$$\sum_{i \geqslant k+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}.$$

Chiameremo i numeri $p_1, \ldots, p_k$ *primi piccoli* ed i numeri $p_{k+1}, p_{k+2} \ldots$ *primi grandi*. Per un numero positivo arbitrario N scriveremo:

$$\sum_{i \geqslant k+1} \frac{N}{p_i} < \frac{N}{2} \,. \tag{3}$$

Sia ora N_b il numero degli interi positivi $n \leqslant N$ divisibili per almeno un primo grande e sia N_s il numero degli interi positivi $n \leqslant N$ divisibili soltanto per dei primi piccoli. Vogliamo dimostrare che per un qualche N è $N_b + N_s < N$, e questa sarà la cercata contraddizione: per definizione $N_b + N_s$ dovrebbe essere uguale a N.

Per valutare N_b ricordiamo che $\left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor$ è il numero degli interi positivi $n \leqslant N$ che sono multipli di p_i. Quindi, dalla precedente disuguaglianza (3) otteniamo:

$$N_b \leqslant \sum_{i \geqslant k+1} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor < \frac{N}{2} \,. \tag{4}$$

Occupiamoci ora della valutazione di N_s; abbiamo già sopra ricordato (nel corso della dimostrazione euleriana) che ogni intero positivo n può essere scritto in forma unica come prodotto di un numero privo di fattori quadrati e di un quadrato; scriviamo pertanto ogni $n \leqslant N$ che ha soltanto divisori primi piccoli nella forma $n = a_n b_n^2$, dove a_n è una parte priva di fattori quadrati. Ogni a_n è perciò un prodotto di primi piccoli diversi, e grazie a tale osservazione possiamo affermare che esistono esattamente 2^k diverse parti prive di fattori quadrati. Inoltre, essendo $b_n \leqslant \sqrt{n} \leqslant \sqrt{N}$, notiamo che ci sono al più $\sqrt{N}$ valori ammissibili per b_n, da cui:

$$N_s \leqslant 2^k \sqrt{N} \,.$$

Dato che la (4) è valida per ogni N, per ottenere la contraddizione sopra anticipata ci resta da trovare un numero N tale che $2^k \sqrt{N} \leqslant \frac{N}{2}$ ovvero tale che $2^{k+1} \sqrt{N} \leqslant N$; un tale numero è $N = 2^{2k+2}$ e dunque per esso verrebbe ad essere $N_b + N_s < N$: ciò completa la dimostrazione per assurdo. ■

Quanto ora provato, nelle due brillanti dimostrazioni di Euler e di Erdös, ci permette di far seguire immediatamente il risultato euclideo: se infatti l'insieme dei numeri primi fosse finito, tale sarebbe anche la somma dei reciproci di tutti i numeri primi, contro quanto sopra dimostrato.

Chiaramente le due dimostrazioni proposte non sono del tutto equivalenti a quella originale euclidea: esse infatti provano la divergenza della serie dei reciproci dei primi, e ciò è molto di più dell'infinità dell'insieme dei numeri primi.

Ma le tre dimostrazioni presentate sono accomunate da una indiscutibile eleganza, seppure esse si snodino in àmbiti anche molto diversi. La dimostrazione euclidea affascina per l'assoluta essenzialità, per la perfetta efficacia coniugata alla disarmante semplicità; quella di Euler, un po' più complessa ma mai astrusa, è caratteristica della grande Analisi settecentesca. Quella di Erdös, davvero di rara bellezza, si snoda con grazia lieve e geniale nello spirito della Teoria dei Numeri del XX secolo. Ciascun matematico, naturalmente, sulla base della propria formazione e dei propri particolari interessi scientifici, si sentirà portato verso una delle prove sopra riportate (3); ma siamo certi che tutti i cultori della Matematica, a qualsiasi livello, non potranno non apprezzare l'eccezionale *bellezza* di tutte queste tre dimostrazioni (4).

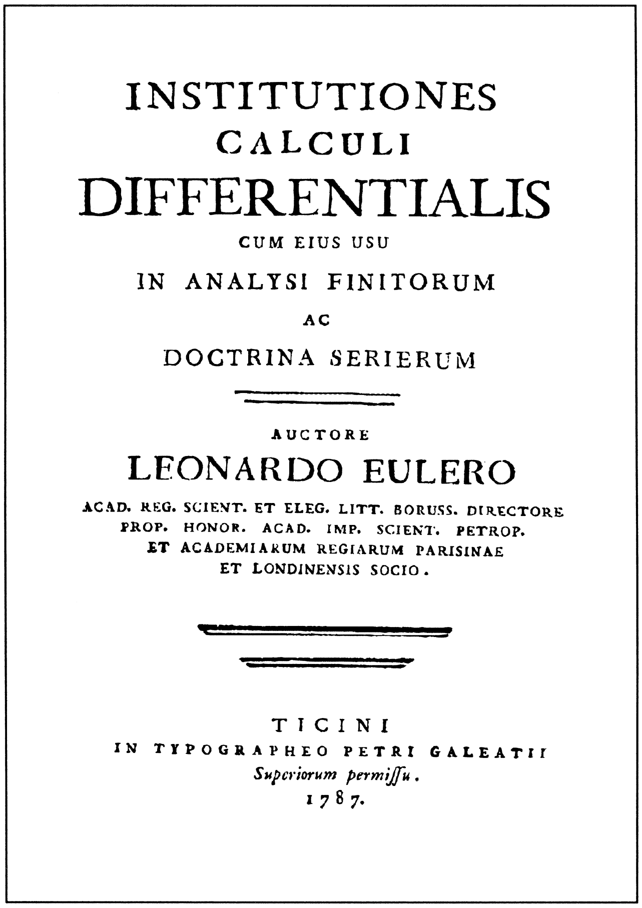
Hardy era solito dire che non esiste alcun posto dove conservare la matematica «brutta» (Aigner & Ziegler, 1998, p. 1). Concludiamo dunque questa riflessione con la frase che chiude *Apologia di un matematico*, l'ultima opera di Hardy:

«La sola difesa della mia vita, allora, o di chiunque sia stato matematico nello stesso mio senso, è dunque questa: ho aggiunto qualcosa al sapere, ed ho aiutato altri ad aumentarlo ancora: il valore dei miei contributi si differenzia soltanto in grado, e non in natura, dalle creazioni dei grandi matematici, o di tutti gli altri artisti, grandi e piccoli, che hanno lasciato qualche traccia dietro di loro» (Hardy, 1989, cap. 10, p. 105).

---

(3) La differenza tra questa *Arte nella Matematica* e la *Matematica nell'Arte*, sopra riferita ad esempio alla nascita della prospettiva, consiste essenzialmente nel diverso pubblico al quale le due situazioni si rivolgono.

(4) L'importanza della dimostrazione, anche in àmbito didattico, è primaria; osserva però Francesco Speranza: «Siamo stati educati nell'ideale aristotelico-euclideo nel quale la Matematica viene presentata secondo lo schema *enunciati-dimostrazioni*. Siamo arrivati a far coincidere con questo stile la *sostanza* della razionalità matematica (...) In quanto alla pratica matematica, le dimostrazioni sono solo una parte del lavoro (anche per i matematici "puri"): essa è preceduta da una fase di intuizioni, di congetture, di tentativi che via via si perfezionano» (Speranza, 1992, p. 135). Inoltre: «Molti insegnanti di Matematica sono convinti che attraverso le dimostrazioni gli studenti imparino sia i "contenuti" sia la "struttura logica" della disciplina, e siano educati allo "spirito critico". Almeno per la Geometria, sono profondamente convinto che questa sia un'illusione. Anzitutto i "fatti spaziali" si imparano per esperienza concreta (...); del resto, anche altri settori, nei quali i fatti sono meno "palpabili", come Aritmetica ed Algebra, si apprendono anzitutto affrontando problemi, escogitando metodi di risoluzione» (Speranza, 1992, p. 136; indichiamo inoltre: Speranza, 1997 ed il cap. 11 di: D'Amore, 1999, pp. 325-360).

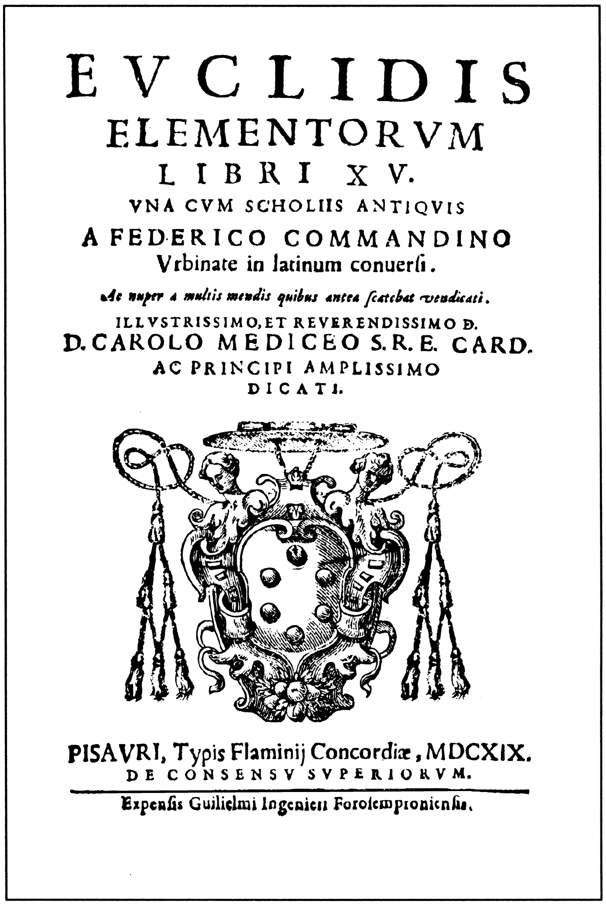


INSTITUTIONES
CALCULI
DIFFERENTIALIS
CUM EIUS USU
IN ANALYSI FINITORUM
AC
DOCTRINA SERIERUM

AUCTORE
LEONARDO EULERO
ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROP. HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP.
ET ACADEMIARUM REGIARUM PARISINAE
ET LONDINENSIS SOCIO.

TICINI
IN TYPOGRAPHEO PETRI GALEATII
Superiorum permissu.
1787.

Il frontespizio degli *Elementi* con il commento di Federico Commandino (Pesaro, 1619)


EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.
VNA CVM SCHOLIIS ANTIQVIS
A FEDERICO COMMANDINO
Vrbinate in latinum conuersi.
Ac nuper a multis mendis quibus antea scatebat vendicati.
ILLVSTRISSIMO, ET REVERENDISSIMO D.
D. CAROLO MEDICEO S.R.E. CARD.
AC PRINCIPI AMPLISSIMO
DICATI.

PISAVRI, Typis Flaminij Concordiæ, MDCXIX.
DE CONSENSV SVPERIORVM.

Expensis Guilielmi Ingenieri Forolempronicnsis.

Il frontespizio delle *Institutiones calculi differentialis*. Questa seconda edizione (1787) contiene alcune aggiunte alla prima (1755), a cura di F. Speroni sulla base di annotazioni di Euler

Bibliografia

[1] M. Aigner and G. M. Ziegler, *Proofs from The Book*, Springer Verlag, Berlin 1998.

[2] G. Arrigo, *Cavalcata fra le serie infinite*, Bollettino dei Docenti di Matematica **34** (1997), 41-49.

[3] G. T. Bagni, *Storia della Matematica*, I-II, Pitagora, Bologna 1996.

[4] G. T. Bagni and B. D'Amore, *Alle radici storiche della Prospettiva*, Angeli, Milano 1994.

[5] S. Chandrasekhar, *Verità e bellezza. Le ragioni dell'Estetica nella Scienza*, Garzanti, Milano 1990.

[6] B. D'Amore, *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora, Bologna 1999.

[7] M. Emmer, *La perfezione visibile. Matematica e Arte*, Theoria, Roma-Napoli 1991.

[8] P. Erdös, *Über die Reihe* $\sum \frac{1}{p}$, *Mathematica*, Zutphen B **7** (1938), 1-2.

[9] Euclide, *Elementi*, A. Frajese and L. Maccioni (a cura di), UTET, Torino 1970.

[10] P. Freguglia, *Fondamenti storici della Geometria*, Feltrinelli, Milano 1982.

[11] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford 1938 (quinta edizione, 1979).

[12] G. H. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti, Milano 1989.

[13] I. N. Herstein, *Algebra*, Editori Riuniti, Roma 1982.

[14] M. Kline, *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino 1991 (*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York 1972).

[15] F. Le Lionnais (a cura di), *Le grand courants de la pensée mathématique*, Librairie Scientifique et Technique A. Blanchard, Paris 1962. In particolare: F. Le Lionnais, *La beauté en mathématiques*, pp. 457-458.

[16] W. Narkiewicz, *The Development of Prime Number Theory. From Euclid to Hardy and Littlewood*, Springer Verlag, Berlin 2000.

[17] P. Ribenboim, *The Book of Prime Number Records*, Springer Verlag, New York 1980 (seconda edizione, 1989).

[18] F. Speranza, *La geometria nelle scuole superiori: dimostrazioni o progetto di razionalità*, F. Furinghetti (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del secondo Internucleo della Scuola secondaria superiore, Progetto strategico del CNR, TID, Quaderno n. **13** (1992), 135-141.

[19] F. Speranza, *Scritti di Epistemologia della Matematica*, Pitagora, Bologna 1997.

[20] D. J. Struik, *Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna 1981 (*A Concise History of Mathematics*, Dover, New York 1948).

[21] G. Tenenbaum and M. Mendès France, *Les nombres premiers*, Presses Universitaires de France, Paris 1997.

Abstract

In this paper we discuss some relations connecting Mathematics and Beauty. In order to supply an example of Beauty into Mathematics, we present three proofs (by Euclid, Euler and Erdös) of the famous theorem that states that the set of prime numbers is an infinite one.

* * *