Riv. Mat. Univ. Parma (6) **3** (2000), 303-310

Kerim Koca (*)

Über einen Satz vom Phragmén-Lindelöf Typus für analytische Funktionen (**)

Es sei $G_1 \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet. Es ist bekannt, daß $w(z)\,|_{G_1} \equiv 0$ ist, wenn die holomorphe Funktion $w(z)$ auf ∂G_1 identisch null ist. Außerdem ist $w_1(z) \equiv w_2(z)$ im ganzen G_1 für die holomorphen Funktionen $w_1(z)$, $w_2(z)$, wenn $w_1 = w_2$ auf ∂G_1 ist.

Eine andere interessante Eigenschaft der holomorphen Funktionen ist der Phragmén-Lindelöf Satz wie folgt:

Satz. (*Phragmén-Lindelöf*) *Es sei* $G \subset \mathbb{C}$ *ein unbeschränktes Gebiet, das den Punkt* $z_0 = 0$ *enthält, und* $w(z)$ *eine holomorphe Funktion in* G. *Wenn*

$$|w(z)|\,|_{\partial G} \leq c \quad (c \text{ konstant})$$

ist, dann ist entweder

1) $|w(z)| \leq c$ *im ganzen* G *oder*

2) *die Konstanten* c_1, c_2 *und* α *existieren, so daß die Ungleichung*

$$M(R) \geq c_1 \exp[c_2(\alpha)\, R^{\alpha}], \qquad (|z| = R \geq R_0 > 0) \tag{1}$$

mit

$$M(R) = \sup_{z \in Q_R^0} |w(z)|, \qquad Q_R^0 = \{z : |z| \leq R,\, z \in \mathbb{C}\} \tag{2}$$

gilt.

Diese Alternativen hängen vom Gebiet und von den Funktionen ab. Die Kon-

---

(*) Kırıkkale University, Faculty of Sciences and Arts, 71450 - Kırıkkale, Turkey.

(**) Received September 21, 2000 and in revised form November 25, 2000. AMS classification 32 A 40, 30 C 80, 30 D 20.

stante a im Satz hängt nur vom Gebiet ab. Außerdem kann die Berandung des Gebiets G nicht glatt sein.

Bevor der Satz bewiesen wird, wollen wir zunächst einige Erklärungen und ein Hauptlemma geben.

Wir betrachten nun die Menge

$$E_R := \tilde{G} \cap Q_R^0 \neq \emptyset ,$$

wobei $\tilde{G}$ das Komplement von G ist. Es sei $w = u + iv$ eine holomorphe Funktion im klassischen Sinne. Weil $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ und $|\nabla u|^2 = |\nabla v|^2$ sind, ist die Funktion $W = \ln|w(z)|$ eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta W = 0$.

Wir definieren nun die Funktion

$$f(\varrho) := \ln\left(\frac{aR}{\varrho}\right), \qquad (a \text{ konstant})$$

mit $a \geq 1$, $\varrho = |z - \zeta|$, $z \neq \zeta$, $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$. Es ist klar, daß $\Delta f(\varrho) = 0$ für $(x, y) \neq (\xi, \eta)$ ist. Es sei M^* die Menge der Massen μ, die der Ungleichung

$$\int_{E_R} f(\varrho)\, d\mu(\xi, \eta) \leq 1 , \qquad z = x + iy \notin E_R$$

genügen. Die Zahl

$$\sup_{\mu \in M^*} \mu(E_R) := Cap\, E_R$$

nennt man Wiener-Kapazität von E_R bezüglich $f(\varrho)$.

Hilfssatz. (*Hauptlemma*). *Es sei G ein unbeschränktes Gebiet von* $\mathbb{C}$, *das den Punkt* $z_0 = 0$ *enthält. Wir betrachten die Menge*

$$E_R = \widetilde{G_R} \cap Q_R^0 = Q_R^0 \backslash G_R \neq \emptyset , \qquad (\widetilde{G_R} \text{ Komplement von } G_R)$$

mit $G_R = G \cap Q_{aR}^0$. *Wir nehmen noch an, daß der Rand von* G_R *aus zwei Kurvenstücken besteht, d.h.* $\partial G_R = \Gamma \cup C_R$, *wobei* Γ *ein Stück von* ∂G_R *ist, das im Kreis* Q_{aR}^0 *liegt und* C_R *das andere Stück von* ∂G_R *ist. Dann existiert die Konstante* c_3, *so daß für alle reellen positiven Lösungen des Problems*

$$\begin{cases} \Delta H = 0, & \text{in } G_R \\ H|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{3}$$

die Ungleichung

$$\sup_{G_R} H(x, y) \geqslant \{1 + c_3 \, Cap \, E_R\} \sup_{G_R \cap Q_R^0} H(x, y) \tag{4}$$

mit $z = x + iy$ *gilt.*

Beweis. Wenn $Cap\,E_R = 0$ ist, dann ist die Behauptung des Hilfssatzes klar. Es sei nun $Cap\,E_R > 0$. Wir berücksichtigen das Mass μ_0, so daß die Ungleichung

$$\mu_0(E_R) \geqslant Cap\,E_R - \varepsilon, (\varepsilon \text{ beliebige positive Konstante}) \tag{5}$$

gilt. Andererseits definieren wir die reelle Funktion

$$F(x, y) = M\left[1 - \int_{E_R} \ln\left(\frac{aR}{\varrho}\right) d\mu(\xi, \eta) + \lambda\right] \tag{6}$$

mit $(x, y) \neq (\xi, \eta)$, $M = \sup_{G_R} H(x, y)$, $\lambda > 0$ (λ konstant). Hierbei ist a eine Konstante, die wir nachher zweckmäss festlegen werden. Es ist klar, daß

$$F_{xx} + F_{yy} = 0$$

ist. Nun zeigen wir, daß

$$F \Big|_{\partial G_R} \geqslant H \Big|_{\partial G_R}$$

ist. Es ist leicht zu beweisen, daß die Ungleichung

$$F(x, y) \Big|_{C_R} \geqslant M\left[1 - \sup_{\varrho} \int_{E_R} \ln\left(\frac{aR}{\varrho}\right) d\mu_0(\xi, \eta) + \lambda\right] \tag{7}$$

für alle $(x, y) \in C_R$ schreibbar ist.

Wählt man $a = 4$, so ist für $(x, y) \in C_R$

$$\varrho \geqslant (a-1)\,R = 3R\,. \tag{8}$$

Setzt man (8) in (7) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} F(x, y) \Big|_{C_R} &\geqslant M\left[1 - \int_{E_R} \ln\left(\frac{4R}{3R}\right) d\mu_0(\xi, \eta) + \lambda\right] \\ &= M\left[1 - \ln\left(\frac{4}{3}\right) \mu_0(E_R) + \lambda\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Hieraus kann man durch Benutzung der Definition der Kapazität

$$F(x, y) \Big|_{C_R} \geqslant M \left[1 - \ln \left(\frac{4}{3} \right) Cap\,(E_R) + \lambda \right] \tag{10}$$

schreiben. Wählt man

$$\lambda := \ln \left(\frac{4}{3} \right) Cap\, E_R ,$$

so erhält man aus (10)

$$F(x, y) \Big|_{C_R} \geqslant M = \sup_{G_R} H(x, y) \geqslant H(x, y) \Big|_{C_R} .$$

Weil $H \big|_{\Gamma} = 0$ und $F \big|_{\Gamma} > 0$ sind, ergibt sich hieraus die Ungleichung

$$F \Big|_{\partial G_R} \geqslant H \Big|_{\partial G_R} .$$

Andererseits ist

$$\Delta(F - H) = 0, \qquad \text{in } G_R,$$

$$(F - H) \Big|_{\partial G_R} \geqslant 0 .$$

So folgt aus dem Maximumprinzip im ganzen G_R

$$F(x, y) \geqslant H(x, y) .$$

Außerdem gilt die Ungleichung

$$\sup_{G_R \cap Q_R^0} H(x, y) \leqslant \sup_{G_R \cap Q_R^0} F_0(x, y) \tag{11}$$

für die Funktion

$$F_0(x, y) = M \left[1 - \int_{E_R} \ln \left(\frac{4R}{\varrho} \right) d\mu_0(\xi, \eta) + \ln \frac{4}{3}\, Cap\, E_R \right].$$

Wählt man in (6) $a = 4$, $\lambda = \ln \left(\frac{4}{3} \right) Cap\, E_R$, $\mu_0 = \mu$, so ist $F = F_0$.

Hieraus läßt sich unter Berücksichtigung von (5)

$$\begin{aligned}
\sup_{G_R \cap Q_R^0} F(x, y) &\leqslant M\left[1 - \inf_{\varrho} \int_{E_R} \ln\left(\frac{4R}{\varrho}\right) d\mu_0(\xi, \eta) + \ln\frac{4}{3} \, Cap\, E_R\right] \\
&= M\left[1 - \int_{E_R} \ln\left(\frac{4R}{2R}\right) d\mu_0(\xi, \eta) + \ln\frac{4}{3} \, Cap\, E_R\right] \\
&= M\left[1 - \ln 2\mu_0(E_R) + \ln\frac{4}{3} \, Cap\, E_R\right] \\
&\leqslant M\left[1 - \ln 2(Cap\, E_R - \varepsilon) + \ln\frac{4}{3} \, Cap\, E_R\right] \\
&= M\left(1 - \ln\frac{3}{2} \, Cap\, E_R + \varepsilon \ln 2\right)
\end{aligned}$$

schreiben. So erhält man unter Verwendung von (11) die Ungleichung

$$\sup_{G_R \cap Q_R^0} H(x, y) \leqslant \sup_{G_R} H(x, y) \left(1 - \ln\frac{3}{2} \, Cap\, E_R + \varepsilon \ln 2\right). \tag{12}$$

Weil die linke Seite von (12) von ε unabhängig ist, gilt die Ungleichung

$$\sup_{G_R \cap Q_R^0} H(x, y) \leqslant \left(1 - \ln\frac{3}{2} \, Cap\, E_R\right) \sup_{G_R} H(x, y)$$

oder

$$\begin{aligned}
\sup_{G_R} H(x, y) &\geqslant \frac{\sup\limits_{G_R \cap Q_R^0} H(x, y)}{\left(1 - \ln\frac{3}{2} \, Cap\, E_R\right)} \\
&\geqslant \left(1 + \ln\frac{3}{2} \, Cap\, E_R\right) \sup_{G_R \cap Q_R^0} H(x, y).
\end{aligned}$$

Somit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

B e m e r k u n g. Es sei f holomorph im unbeschränkten Gebiet G und $f(z)\big|_{\partial G} = 0$. So ist entweder $f(z) \equiv 0$ oder es gilt die Ungleichung (1).

B e w e i s d e s s a t z e s. Wir betrachten zunächst die Zahlen m und R, so daß die Ungleichung

$$4^m < R < 4^{m+1} \tag{13}$$

gilt. Andererseits definieren wir die Gebiete

$$E_i := Q^0_{4^i} \backslash G_i \neq \emptyset \,; \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

mit $G_i = G \cap Q^0_{4^{i+1}}$. Wir wählen die positive ganze Zahl m_0, so daß für $i > m_0$

$$Cap\, E_i > 0$$

ist. Es sei Γ_i irgendein Teilstück von ∂G_i, das im Kreis $Q^0_{4^{i+1}}$ liegt. Wir berücksichtigen die reellen positiven Lösungen der Probleme

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0\,, & &\text{in } G_i \\ w\big|_{\Gamma_i} &= 0\,, & &i = m_0, m_0 + 1, \dots, m\,. \end{aligned}$$

Es seien

$$\begin{aligned} M_i &:= \sup_{G_i \cap Q^0_{4^i}} w(x, y) \\ M_{i+1} &:= \sup_{G_i} w(x, y)\,. \end{aligned}$$

Wenn wir die Ungleichung (4) für die Gebiete G_i $(i = m_0, m_0 + 1, \dots, m)$ wieder schreiben, so ergeben sich die Ungleichungen

$$M_{i+1} \geqslant \left(1 + \ln \frac{3}{2}\, Cap\, E_i\right) M_i.$$

Hieraus erhält man durch die Einsetzungen

$$M_{m+1} \geqslant \prod_{i=m_0}^{m} \left(1 + \ln \frac{3}{2}\, Cap\, E_i\right) M_{m_0}\,. \tag{14}$$

Aus (14) kann man

$$\ln M_{m+1} \geqslant \sum_{i=m_0}^{m} \ln \left(1 + \ln \frac{3}{2}\, Cap\, E_i\right) + \ln M_{m_0}$$

oder

$$
(15)\qquad \begin{aligned} M_{m+1} \geqslant M_{m_0} \exp\left[-\sum_{i=1}^{m_0} \ln\left(1+\ln\frac{3}{2}\, Cap\, E_i\right)\right] \\ \cdot \exp\left[\sum_{i=1}^{m} ln\left(1+\ln\frac{3}{2}\, Cap\, E_i\right)\right] \end{aligned}
$$

schreiben. Andererseits ist die Ungleichung (15) in der Form

$$
(16)\qquad M_{m+1} \geqslant c_1 \exp\left[\sum_{i=1}^{m} \ln\left(1+\ln\frac{3}{2}\, Cap\, E_i\right)\right]
$$

mit

$$
c_1 = M_{m_0} \exp\left[-\sum_{i=1}^{m_0} \ln\left(1+\ln\frac{3}{2}\, Cap\, E_i\right)\right]
$$

schreibbar. Es ist klar, daß für die Ungleichung $4^m < R < 4^{m+1}$

$$
M(R) \geqslant M(4^m)
$$

ist. Wählt man die Zahl R ausreichend groß, so erhält man aus (16) die Ungleichung

$$
(17)\qquad M(R) \geqslant c_1 \exp\left[\sum_{i=1}^{m} \ln\left(1+\ln\frac{3}{2}\, Cap\, E_i\right)\right].
$$

Andererseits läßt sich eine positive Zahl d_0 finden, die der Ungleichung

$$
(18)\qquad \ln\left(1+\ln\frac{3}{2}\, Cap\, E_i\right) \geqslant d_0\, Cap\, E_i, \qquad i=1,2,\ldots
$$

genügt. Verwendet man (18) in (17), so ergibt sich unter Berücksichtigung von (13)

$$
(19)\qquad M(R) \geqslant c_1 \exp\left[d_0 \sum_{i=1}^{\left[\frac{1}{2\ln 2}\ln R\right]} Cap\, E_i\right],
$$

wobei $\left[\dfrac{1}{2\ln 2}\ln R\right]$ der ganze Teil von $\dfrac{1}{2\ln 2}\ln R$ ist. Andererseits gibt es die

Konstanten d_1 und α, so daß die Ungleichung

$$d_0 \sum_{i=1}^{\left[\frac{1}{2\ln 2}\ln R\right]} Cap\, E_i \geqslant d_1 R^{\alpha}$$

gilt.

Somit ist der Beweis des Satzes vollständig bewiesen.

Literatur

[1] M. S. EVGRAFOV, *Analytic Functions*, W. B. Saunders Company, Philadelphia and London 1996.

[2] N. S. LANDKOF, *Foundations of modern Potential Theory*, Nauka, Moscow 1966 (English transl. Springer-Verlag, 1972).

[3] A. I. MARKUSHEVICH, *The Theory of Analytic Functions*, A Brief Course Mir Publishers Moscow, 1978 (Translated from the Russian by Eugene Yankovsky, 1983).

[4] A. A. NOVRUZOV, *On Theorems of Phragmén-Lindelöf Typ for Solutions of Second Order Linear and Quasilinear Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients*, Soviet Mat. Dokl. **26** 2 (1982).

Abstract

In this study, Phragmén-Lindelöf type theorem has been proved with the help of capacity of Wiener.

* * *