

A. AIMI, L. BASSOTTI e M. DILIGENTI (*)

**Analisi di algoritmi per la risoluzione in parallelo
di problemi al contorno di tipo ellittico (**)**

dedicato alla memoria di Giulio di Cola

1 - Introduzione

Un passo cruciale nella modellazione di molti problemi dell'ingegneria o, più in generale, della matematica applicata consiste nella soluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali insieme ad appropriate condizioni al contorno e, per i problemi evolutivi, a condizioni iniziali. In molti casi la forma geometrica del dominio bi- o tridimensionale, fisicamente occupato dal sistema che si sta studiando, presenta particolari proprietà di invarianza rispetto ad un assegnato gruppo di trasformazioni, come ad esempio le simmetrie o le rotazioni. In questi casi l'intuito suggerisce di sfruttare, se possibile, queste proprietà geometriche per decomporre il problema iniziale in un numero limitato di sottoproblemi *indipendenti* in modo da ridurre il costo computazionale e utilizzare le potenzialità del calcolo parallelo.

Insieme al classico metodo di decomposizione del dominio ([6], [13]) diverse sono state le metodologie proposte per la risoluzione di questa classe particolare di problemi ([5], [9], [11], [21], [22]). Un'idea comune a questi metodi consiste nell'usare la proprietà di invarianza del dominio rispetto ad un gruppo finito \mathcal{G} di isometrie per definire un sottodominio fondamentale, sul quale poi risolvere un numero limitato di problemi simili, con appropriate condizioni al contorno, ed infine di ricostruire un'approssimazione della soluzione del problema iniziale con le approssimazioni locali calcolate. Così se il gruppo \mathcal{G} è abeliano e formato da N ele-

(*) Dipartimento di Matematica dell'Università, Via D'Azeglio 85, 43100 Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 23 Ottobre 2000. Classificazione AMS 65 N 30.

menti distinti si dimostra ([5]) che è possibile determinare un sottodominio N volte più piccolo di quello iniziale e risolvere poi su di esso N problemi simili.

In questa nota, dopo aver ripreso brevemente, nelle sezioni 2 e 3, due differenti metodi ([2], [10]) che definiscono algoritmi simili di decomposizione per problemi differenziali lineari al contorno, e, dato per entrambi alcuni significativi esempi, dimostriamo che, in particolari ipotesi, questi metodi risultano equivalenti, cioè conducono alla medesima decomposizione e alla risoluzione di uguali problemi discreti. Questi due metodi sono stati applicati con successo alla riduzione di problemi al contorno di tipo ellittico ([10]) e a problemi di autovalori ([4]); tuttavia con opportune osservazioni è possibile applicarli anche alla decomposizione di problemi dipendenti dal tempo. Una caratteristica comune degli algoritmi dedotti da questi due metodi è la loro semplice e naturale implementazione su elaboratori fortemente paralleli, cioè su elaboratori paralleli con memorie distribuite.

La sezione 4 è dedicata alla descrizione di due distinte applicazioni realizzate su una rete di *transputers*. La prima tratta il problema diretto dell'elettrocardiologia che abbiamo voluto riprendere per ricordare, con questa nota, l'amico Prof. Giulio Di Cola. Infatti era stato proprio il Prof. Di Cola, alcuni anni fa, a proporci, con la consueta vulcanica intuizione, questo problema in occasione di un Congresso di Matematica Applicata. La seconda applicazione riguarda un problema generalizzato di autovalori per il calcolo del primo carico critico di una piastra sottile incastrata al bordo.

2 - Il metodo della decomposizione in sottospazi

2.1. Sia \mathcal{G} un gruppo finito di N elementi $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ e sia q il numero delle classi di equivalenza di \mathcal{G} . Sia \mathcal{C}_r il gruppo delle matrici quadrate non degeneri di ordine r ad elementi complessi, τ un omomorfismo di \mathcal{G} in \mathcal{C}_r . L'insieme $\{\tau(\gamma_i)\}$, $i = 1, \dots, N$, è un gruppo di matrici di \mathcal{C}_r : esso si chiama una rappresentazione (matriciale) del gruppo \mathcal{G} . Se $\sigma \in \mathcal{C}_r$, le due rappresentazioni $\{\tau(\gamma_i)\}$ e $\{\sigma\tau(\gamma_i)\sigma^{-1}\}$ si dicono equivalenti. Una rappresentazione $\{\tau(\gamma_i)\}$ si dice unitaria (ortogonale) se tutti gli elementi $\tau(\gamma_i)$ sono matrici unitarie (ortogonali). Infine una rappresentazione $\{\tau(\gamma_i)\}$ si dice riducibile, se esiste una rappresentazione equivalente $\{\tau'(\gamma_i)\}$ costituita da matrici a blocchi di ordine s e $r-s$ rispettivamente

$$\tau'(\gamma_i) = \begin{pmatrix} b(\gamma_i) & 0 \\ 0 & c(\gamma_i) \end{pmatrix}.$$

Una rappresentazione non riducibile è detta irriducibile.

Dalla teoria della rappresentazione dei gruppi finiti, segue che \mathcal{G} ammette q rappresentazioni unitarie irriducibili

$$(2.1) \quad \{\omega^{(1)}(\gamma_i)\}, \{\omega^{(2)}(\gamma_i)\}, \dots, \{\omega^{(q)}(\gamma_i)\} \quad (i = 1, \dots, N)$$

a due a due non equivalenti. Sia d_l l'ordine delle matrici $\{\omega^{(l)}(\gamma_i)\}$.

Si noti che il numero q delle rappresentazioni (2.1) e gli ordini d_l dipendono solo da \mathcal{G} . Ogni rappresentazione $\{\omega^{(l)}(\gamma_i)\}$ di ordine $d_l \geq 2$, può essere sostituita da un'altra unitaria ed equivalente. Le rappresentazioni di ordine uno sono univocamente determinate.

2.2. Sia $x \equiv (x_1, \dots, x_m)$ un punto dello spazio \mathfrak{R}^m , Ω un aperto limitato di \mathfrak{R}^m , $\overline{\Omega}$ la sua chiusura. Sia ora $\mathcal{G} \equiv \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ un gruppo di matrici ortogonali di ordine m che muti in sé l'insieme Ω , tale cioè che, per ogni $\gamma_i \in \mathcal{G}$ e $x \in \Omega$ risulti $\gamma_i x \in \Omega$: diremo che \mathcal{G} è un *gruppo di congruenze* di Ω . Conveniamo che γ_1 coincida con la matrice identica δ . Sia ora $W(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni complesse definite in Ω . Ad ogni elemento γ_i di \mathcal{G} si può associare la trasformazione lineare Γ_i di $W(\Omega)$ su $W(\Omega)$ così definita, per ogni $v \in W(\Omega)$

$$(2.2) \quad (\Gamma_i v)(x) = v(\gamma_i^{-1} x).$$

L'insieme $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ delle trasformazioni lineari Γ_i è un *gruppo isomorfo* a \mathcal{G} . La trasformazione Γ_1 è la trasformazione identica I . È possibile quindi introdurre la seguente

Definizione. Un sottospazio $V(\Omega)$ di $W(\Omega)$ si dice *invariante* rispetto a \mathcal{G} , se, per ogni $v \in V(\Omega)$ e per ogni $\gamma_i \in \mathcal{G}$ riesce $\Gamma_i v \in V(\Omega)$.

Gli spazi $C^p(\Omega)$, $C^p(\overline{\Omega})$, $C^p(\Omega)$, reali o complessi, sono invarianti rispetto a \mathcal{G} per ogni $p = 0, 1, \dots$ e anche per $p = \infty$; analogamente per gli spazi $H^p(\Omega)$, p intero ≥ 0 ottenuti come completamento funzionale di $C^p(\overline{\Omega})$ rispetto al prodotto scalare $(f, g)_p \equiv \sum_{i=0}^p \sum_{k_1, \dots, k_i}^{1, m} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^i f(x)}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_i}}, \frac{\partial^i g(x)}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_i}} \right) dx$.

Vediamo ora una decomposizione di uno spazio $V(\Omega)$ invariante rispetto a \mathcal{G} . Supponiamo dapprima che \mathcal{G} sia abeliano. Allora \mathcal{G} ammette N rappresentazioni (distinte) nei complessi date da (2.1); riesce $q = N$ e $d_l = 1$ per $l = 1, \dots, N$. Posto $M = N$ si considerino le trasformazioni lineari di $W(\Omega)$ in $W(\Omega)$ così definite

$$(2.3) \quad P_r = N^{-1} \sum_{i=1}^N \omega^{(r)}(\gamma_i) \Gamma_i, \quad (r = 1, \dots, M).$$

Per le proprietà delle rappresentazioni (2.1), si ha

$$(2.4) \quad P_r^2 = P_r, \quad P_r P_s = 0 \text{ se } r \neq s, \quad \sum_{r=1}^N P_r = I.$$

Le trasformazioni P_r , che chiameremo anche *proiettori*, determinano una decomposizione di $V(\Omega)$ in somma diretta di M sottospazi $V_r(\Omega)$

$$(2.5) \quad V(\Omega) = V_1(\Omega) \oplus V_2(\Omega) \oplus \dots \oplus V_M(\Omega)$$

e $V_r(\Omega)$ è il codominio di P_r , pensato come operatore di $V(\Omega)$.

Supponiamo ora che \mathcal{G} sia non abeliano. Allora \mathcal{G} ammette q rappresentazioni unitarie irriducibili di ordini d_1, \dots, d_q e risulta $q < N$. Sia $M = d_1 + d_2 + \dots + d_q$; si dimostra che $M < N$. Si considerino le seguenti M trasformazioni lineari di $W(\Omega)$ in $W(\Omega)$

$$(2.6) \quad P_{rs} = d_r N^{-1} \sum_{i=1}^N \omega_{ss}^{(r)}(\gamma_i) \Gamma_i \quad (r = 1, \dots, q; s = 1, \dots, d_r),$$

ove $\omega_{ss}^{(r)}(\gamma_i)$ indica l'elemento di posto (s, s) nella matrice $\omega^{(r)}(\gamma_i)$. Per le proprietà delle rappresentazioni (2.1) riesce

$$(2.7) \quad P_{rs}^2 = P_{rs}, \quad P_{rs} P_{r's'} = 0 \text{ se } (r, s) \neq (r', s'), \quad \sum_{r=1}^q \sum_{s=1}^{d_r} P_{rs} = I.$$

I proiettori P_{rs} determinano una decomposizione dello spazio $V(\Omega)$ in somma diretta di M sottospazi $V_{rs}(\Omega)$, ove $V_{rs}(\Omega)$ è il codominio di P_{rs} come operatore di $V(\Omega)$. Applichiamo ora le considerazioni precedenti ad alcuni insiemi di \mathfrak{R}^2 .

Esempio 1. Sia

$$(2.8) \quad R \equiv \{x : |x_i| < a_i, i = 1, 2\} \quad a_i > 0,$$

un rettangolo di \mathfrak{R}^2 . Il gruppo \mathcal{G}_0 costituito dalle matrici

$$(2.9) \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è abeliano; ogni matrice è una simmetria di \mathfrak{R}^2 che muta R in sé. Le rappresentazioni irriducibili $\{\omega^{(i)}(\gamma_i)\}$ di \mathcal{G}_0 sono quattro, di ordine uno, e precisamente

$$(2.10) \quad \{1, 1, 1, 1\}, \quad \{1, -1, 1, -1\}, \quad \{1, 1, -1, -1\}, \quad \{1, -1, -1, 1\}.$$

Dalle (2.3) si ottengono i quattro proiettori

$$(2.11) \quad \begin{aligned} P_1 &= 4^{-1}[\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4], & P_2 &= 4^{-1}[\Gamma_1 - \Gamma_2 + \Gamma_3 - \Gamma_4], \\ P_3 &= 4^{-1}[\Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3 - \Gamma_4], & P_4 &= 4^{-1}[\Gamma_1 - \Gamma_2 - \Gamma_3 + \Gamma_4], \end{aligned}$$

che determinano una decomposizione di ogni spazio $V(R)$ invariante rispetto a \mathcal{G}_0 in somma diretta di quattro sottospazi $V_i(R)$, $i = 1, \dots, 4$. Detti $V^{\alpha\beta}(R)$ ($\alpha, \beta = 0, 1$) i sottospazi di $V(R)$ costituiti dalle funzioni tali che

$$(2.12) \quad v(-x_1, x_2) = (-1)^\alpha v(x_1, x_2), \quad v(x_1, -x_2) = (-1)^\beta v(x_1, x_2),$$

risulta $V_1(R) = V^{00}(R)$, $V_2(R) = V^{10}(R)$, $V_3(R) = V^{01}(R)$, $V_4(R) = V^{11}(R)$ e quindi

$$(2.13) \quad V(R) = V^{00}(R) \oplus V^{10}(R) \oplus V^{01}(R) \oplus V^{11}(R).$$

La decomposizione (2.13) vale anche se R è un aperto del piano simmetrico rispetto agli assi $x_i = 0$. Se, in particolare R è un quadrato Q , il gruppo \mathcal{G}_1 delle congruenze che mutano Q in sé è costituito da otto matrici e precisamente dalle (2.9) e dalle seguenti

$$(2.14) \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_8 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

\mathcal{G}_1 non è abeliano e ammette quattro rappresentazioni unitarie di ordine uno e una di ordine due (coincidente con \mathcal{G}). Col procedimento esposto, applicando le formule (2.6), si possono dedurre i sei proiettori che determinano una decomposizione di ogni spazio $V(Q)$ invariante rispetto a \mathcal{G}_1 in sei sottospazi. A tale decomposizione si può arrivare più semplicemente partendo dalla decomposizione (2.13) con $R = Q$ osservando che i due sottospazi $V^{\alpha\alpha}(Q)$, possono a loro volta decomporsi ciascuno in due sottospazi $V^{\alpha\alpha 0}(Q)$ e $V^{\alpha\alpha 1}(Q)$, ove $V^{\alpha\alpha\beta}(Q)$ ($\beta = 0, 1$) è il sottospazio di $V^{\alpha\alpha}(Q)$ costituito dalle funzioni verificanti le relazioni

$$(2.15) \quad v(x_2, x_1) = (-1)^\beta v(x_1, x_2).$$

Si ha allora la seguente decomposizione di $V(Q)$

$$(2.16) \quad V(Q) = V^{000}(Q) \oplus V^{001}(Q) \oplus V^{10}(Q) \oplus V^{01}(Q) \oplus V^{110}(Q) \oplus V^{111}(Q).$$

Esempio 2. Sia T il triangolo equilatero di centro l'origine e simmetrico ri-

spetto all'asse $x_1 = 0$. Posto

$$(2.17) \quad \varrho = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

il gruppo \mathcal{G}' delle congruenze che mutano T in sé è costituito dalle sei matrici: δ , ϱ , ϱ^2 , σ , $\sigma\varrho$, $\sigma\varrho^2$. Le matrici ϱ (rotazione di $\frac{2\pi}{3}$ attorno all'origine) e σ (simmetria rispetto alla retta $x_1 = 0$) sono generatrici del gruppo \mathcal{G}' . \mathcal{G}' ammette tre rappresentazioni unitarie irriducibili $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)}$ con

$$(2.18) \quad \omega^{(1)} \equiv \{1, 1, 1, 1, 1, 1\}, \quad \omega^{(2)} \equiv \{1, 1, 1, -1, -1, -1\}, \quad \omega^{(3)} \equiv \mathcal{G}'.$$

Dalle (2.6), indicando con Γ_σ , Γ_ϱ le trasformazioni lineari definite da (2.2) in corrispondenza a σ e ϱ , si ottengono 4 proiettori P_1, P_2, P_3, P_4 che possiamo scrivere nella forma

$$(2.19) \quad P_r = \frac{1}{2}(I + (-1)^{r+1}\Gamma_\sigma)P', \quad P_{2+r} = \frac{1}{2}(I + (-1)^{r+1}\Gamma_\sigma)P'', \quad (r = 1, 2),$$

ove si è posto

$$(2.20) \quad P' = \frac{1}{3}(I + \Gamma_\varrho + \Gamma_\varrho^2), \quad P'' = \frac{1}{3}(2I - \Gamma_\varrho - \Gamma_\varrho^2).$$

Si osservi che P' e P'' sono ancora proiettori (cioè trasformazioni idempotenti) ed inoltre $P'P'' = 0$, $P' + P'' = I$.

Sia $V(T)$ un sottospazio invariante rispetto a \mathcal{G}' . I proiettori P_1, \dots, P_4 definiti dalle (2.19) determinano la decomposizione

$$(2.21) \quad V(T) = V_1(T) \oplus V_2(T) \oplus V_3(T) \oplus V_4(T).$$

D'altra parte, detti $V'(T)$ e $V''(T)$ i sottospazi di $V(T)$ definiti da P' e P'' , risulta anche

$$(2.22) \quad V(T) = V'(T) \oplus V''(T).$$

La decomposizione (2.21) è un raffinamento della (2.22), riuscendo ovviamente $V'(T) = V_1(T) \oplus V_2(T)$, $V''(T) = V_3(T) \oplus V_4(T)$.

Le decomposizioni (2.21) e (2.22) valgono anche se T è un aperto di \mathfrak{R}^2 mutato in sé dalle congruenze di \mathcal{G}' .

2.3. Sia Ω un aperto limitato di \mathfrak{R}^m , \mathcal{G} un gruppo di congruenze che mutano Ω in sé, $V(\Omega)$ un sottospazio di funzioni reali definite in Ω , invariante rispetto a \mathcal{G} . Introduciamo ora il concetto di invarianza per un operatore lineare.

Definizione. Un operatore lineare \mathcal{L} , definito in $V(\Omega)$, si dice invariante rispetto a \mathcal{G} se, per ogni $\Gamma \in \mathcal{G}(\mathcal{G})$, e per ogni $u \in V(\Omega)$ riesce

$$(2.23) \quad \Gamma(\mathcal{L}u) u = \mathcal{L}(\Gamma u).$$

Si noti che se \mathcal{G} ammette un insieme finito di generatori $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, le (2.23) sono verificate per ogni $\Gamma \in \mathcal{G}(\mathcal{G})$ se lo sono per le trasformazioni lineari $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ associate ai generatori.

Sia \mathcal{L} un operatore differenziale lineare di ordine p definito in $C^p(\Omega)$ da

$$(2.24) \quad (\mathcal{L}u)(x) = \sum_{s=1}^p \sum_{h_1 \dots h_s} a^{h_1 \dots h_s}(x) \frac{\partial^s u}{\partial x_{h_1} \dots \partial x_{h_s}} + a^0(x) u.$$

I coefficienti di \mathcal{L} sono supposti continui in Ω . Sia $F(x, y)$ la funzione reale così definita in $\Omega \times \mathfrak{R}^m$

$$(2.25) \quad F(x, y) = \sum_{s=1}^p \sum_{h_1 \dots h_s} a^{h_1 \dots h_s}(x) y_{h_1} \dots y_{h_s} + a^0(x).$$

Sussiste il seguente

Teorema. ([2]) *Condizione necessaria e sufficiente perché l'operatore \mathcal{L} definito da (2.24) sia invariante rispetto a \mathcal{G} , è che la funzione $F(x, y)$ verifichi, in ogni punto di $\Omega \times \mathfrak{R}^m$ e per ogni $\gamma \in \mathcal{G}$, le condizioni*

$$(2.26) \quad F(\gamma x, \gamma y) = F(x, y).$$

Se, ad esempio, Ω è un aperto del piano simmetrico rispetto agli assi $x_i = 0$, ($i = 1, 2$) e \mathcal{G}_0 è il gruppo costituito dalle matrici (2.9), le condizioni perché l'operatore \mathcal{L} sia invariante rispetto a \mathcal{G}_0 sono le seguenti

$$(2.27) \quad F(-x_1, x_2, -y_1, y_2) = F(x_1, -x_2, y_1, -y_2) = F(x_1, x_2, y_1, y_2) \quad \text{in } \Omega \times \mathfrak{R}^2.$$

Se Ω ha una frontiera verificante opportune ipotesi di regolarità e S è un operatore differenziale lineare di ordine \bar{p} a coefficienti continui su $\partial\Omega$, definito in $C^{\bar{p}}(\bar{\Omega})$ da

$$(2.28) \quad Su = \sum_{r=1}^{\bar{p}} \sum_{k_1 \dots k_r} b^{k_1 \dots k_r}(x) \frac{\partial^r u}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_r}} + b^0(x) u,$$

S è invariante rispetto a \mathcal{G} se la funzione

$$(2.29) \quad F_0(x, y) = \sum_{r=1}^{\bar{p}} \sum_{k_1 \dots k_r} b^{k_1 \dots k_r}(x) y_{k_1} \dots y_{k_r} + b^0(x)$$

verifica, in ogni punto di $\partial\Omega \times \mathfrak{R}^m$ e per ogni $\gamma \in \mathcal{G}$ le condizioni

$$(2.30) \quad F_0(\gamma x, \gamma y) = F_0(x, y).$$

Se Ω è simmetrico rispetto agli assi, assumendo $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$, le (2.30) sono equivalenti alle

$$(2.31) \quad F_0(-x_1, x_2, -y_1, y_2) = F_0(x_1, -x_2, y_1, -y_2) = F_0(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

in $\partial\Omega \times \mathfrak{R}^2$.

Siano ora $\mathcal{L}, S_1, \dots, S_k$ operatori differenziali lineari definiti in uno spazio di funzioni $V(\Omega)$ nel quale abbia senso porre il problema al contorno

$$(2.32) \quad \mathcal{L}u = f \quad \text{in } \Omega, \quad S_j u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega, \quad j = 1, \dots, k.$$

Siano $\Omega, V(\Omega)$ invarianti rispetto ad un gruppo finito \mathcal{G} e sia

$$(2.33) \quad V(\Omega) = V_1(\Omega) \oplus V_2(\Omega) \oplus \dots \oplus V_M(\Omega)$$

una decomposizione dello spazio $V(\Omega)$ ottenuta per mezzo dei proiettori (2.3) o (2.6). Indicheremo con P_i il proiettore su $V_i(\Omega)$. Sussistono i seguenti risultati.

Teorema. ([2]) *Se $\mathcal{L}, S_1, \dots, S_k$ sono operatori invarianti rispetto a \mathcal{G} e il problema (2.32) ammette, per una data funzione f , una e una sola soluzione \bar{u} , allora i problemi*

$$(2.34) \quad \mathcal{L}u_i = P_i f \quad \text{in } \Omega, \quad S_j u_i = 0 \quad \text{su } \partial\Omega, \quad j = 1, \dots, k$$

ammettono una e una sola soluzione $\bar{u}_i, i = 1, \dots, M$. Riesce $\bar{u}_i \in V_i(\Omega)$ e

$$(2.35) \quad \bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \dots + \bar{u}_M.$$

Se \mathcal{L} è un operatore differenziale lineare ellittico e $U_{i,h}$ è un sottospazio di $V_i(\Omega)$ di dimensione finita, il metodo di Galerkin applicato a ciascun problema (2.34) porta alla risoluzione del sistema lineare

$$(2.36) \quad A_i u_i = F_i$$

dove $(A_i)_{sr} = \langle \mathcal{L}u_{i,r}, u_{i,s} \rangle$, $(F_i)_s = \langle P_i f, u_{i,s} \rangle$ e $\{u_{i,s}\}$ è un sistema finito di funzioni linearmente indipendenti appartenenti a $U_{i,h}$.

Teorema. ([2]) *Se $\mathcal{L}, S_1, \dots, S_k$ sono operatori invarianti rispetto a \mathcal{G} , il problema di autovalori*

$$(2.37) \quad \mathcal{L}u - \lambda u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad S_j u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega, \quad j = 1, \dots, k, \quad u \in V(\Omega)$$

si spezza in M problemi dello stesso tipo

$$(2.38) \quad \mathcal{L}u - \lambda u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad S_j u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega, \quad j = 1, \dots, k, \quad u \in V_i(\Omega) \quad i = 1, 2, \dots, M$$

nel senso che, se in corrispondenza ad un numero complesso λ , $N^{(\lambda)}$ e $N_i^{(\lambda)}$ denotano gli insiemi delle soluzioni di (2.37) e (2.38), risulta

$$(2.39) \quad N^{(\lambda)} = N_1^{(\lambda)} \oplus N_2^{(\lambda)} \oplus \dots \oplus N_M^{(\lambda)}.$$

3 - Un metodo di decomposizione discreto

In questa sezione consideriamo ancora il problema (2.32) con \mathcal{L} operatore differenziale lineare ellittico invariante, insieme agli operatori differenziali lineari S_1, \dots, S_k , al dominio Ω e allo spazio $V(\Omega)$, rispetto ad un gruppo di congruenze \mathcal{G} . Sia

$$(3.1) \quad A\xi = F$$

la rappresentazione algebrica del problema di Galerkin agli elementi finiti relativo alla formulazione variazionale del problema (2.32), dove la matrice $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, non singolare, rappresenta la discretizzazione dell'operatore differenziale \mathcal{L} su un sottospazio U_h di dimensione finita n dello spazio $V(\Omega)$. Il vettore $\xi \in \mathfrak{R}^n$ contiene i coefficienti incogniti della base di elementi finiti fissata in U_h , mentre il vettore $F \in \mathfrak{R}^n$ proviene dalla discretizzazione in U_h del termine noto assegnato. Si osservi che, affinché la matrice A conservi, nel discreto, la proprietà di invarianza analoga a quella supposta per il problema (2.32), il sottospazio U_h e la decomposizione sulla quale si costruiscono gli elementi finiti devono essere a loro volta invarianti rispetto al gruppo \mathcal{G} .

In queste ipotesi vogliamo ora riprendere brevemente ed analizzare un algoritmo parallelo di tipo *multigrid*, già in [10], per la risoluzione del sistema lineare (3.1). Siano note M matrici di restrizione $\{R_j\}_{j=1}^M$, e M interi positivi n_1, \dots, n_M

con $\sum_{j=1}^M n_j = n$, tali che $R_j \in \mathfrak{R}^{n_j \times n}$, $j = 1, \dots, M$, e

$$(3.2) \quad \sum_{j=1}^M R_j^T R_j = I;$$

inoltre

$$(3.3) \quad R_k A R_j^T = 0, \quad \forall j \neq k.$$

Sotto tali ipotesi vale il seguente

Teorema 1. *La soluzione del problema (3.1) si può ottenere risolvendo M sistemi lineari di ordine n_j , $j = 1, \dots, M$, della forma*

$$(3.4) \quad R_j A R_j^T \xi_j = R_j F, \quad j = 1, \dots, M$$

e ponendo successivamente

$$(3.5) \quad \xi = \sum_{j=1}^M R_j^T \xi_j.$$

Dim. Applicando R_j^T ad entrambi i membri della (3.4) si ottiene

$$R_j^T R_j A R_j^T \xi_j = R_j^T R_j F, \quad j = 1, \dots, M.$$

Dalla (3.2) si ha

$$\left[I - \sum_{k=1, k \neq j}^M R_k^T R_k \right] A R_j^T \xi_j = R_j^T R_j F, \quad j = 1, \dots, M,$$

da cui per la (3.3) si ricava

$$A R_j^T \xi_j = R_j^T R_j F, \quad j = 1, \dots, M.$$

Sommando in j e sfruttando nuovamente la (3.2) si ottiene infine

$$A \sum_{j=1}^M R_j^T \xi_j = F,$$

o, equivalentemente,

$$\xi = \sum_{j=1}^M R_j^T \xi_j.$$

In [10] è stato dimostrato un teorema analogo in casi particolari in cui l'ipotesi

(3.3) è automaticamente soddisfatta. Dal teorema 1 risulta che il problema fondamentale nel metodo proposto in [10] è quello di determinare matrici di restrizione opportune, verificanti le proprietà (3.2)-(3.3). Per alcuni domini questo risulta particolarmente semplice. Nel caso, per esempio, di problemi monodimensionali definiti sull'intervallo $[-a, a]$, in cui lo spazio funzionale considerato si decompone in somma diretta di due sottospazi di funzioni simmetriche o antisimmetriche rispetto all'origine, se si introduce una decomposizione non necessariamente uniforme con n nodi simmetrici rispetto all'origine, le matrici di restrizione sono:

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & \cdot \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{\frac{n}{2} \times n},$$

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & & & & -1 \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & \cdot \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{\frac{n}{2} \times n},$$

se n è pari, o

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & \sqrt{2} & \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{\frac{n+1}{2} \times n},$$

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & & & & -1 \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & 1 & 0 & -1 \\ & & & & \sqrt{2} & \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{\frac{n-1}{2} \times n},$$

se n è dispari.

Per problemi bidimensionali definiti sul rettangolo R (2.8), se si considera una decomposizione rettangolare i cui nodi siano il prodotto cartesiano di n_1 nodi definiti in direzione x_1 e n_2 nodi definiti in direzione x_2 , simmetrici rispetto all'origine,

le matrici di restrizione risultano così definite

$$(3.6) \quad R_{\alpha_1 \alpha_2} = R_{\alpha_1} \otimes R_{\alpha_2}, \quad \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1.$$

Per domini geometrici più complessi non è banale introdurre opportune matrici di restrizione. Consideriamo, come esempio, la regione piana \tilde{T} formata da un triangolo equilatero T di centro l'origine e simmetrico rispetto all'asse $x_1 = 0$, con al centro un foro di forma esagonale (Figura 1). Il dominio \tilde{T} risulta mutato in sé dalle trasformazioni σ e ϱ definite in (2.17) e quindi da tutte le matrici di \mathcal{G}' .

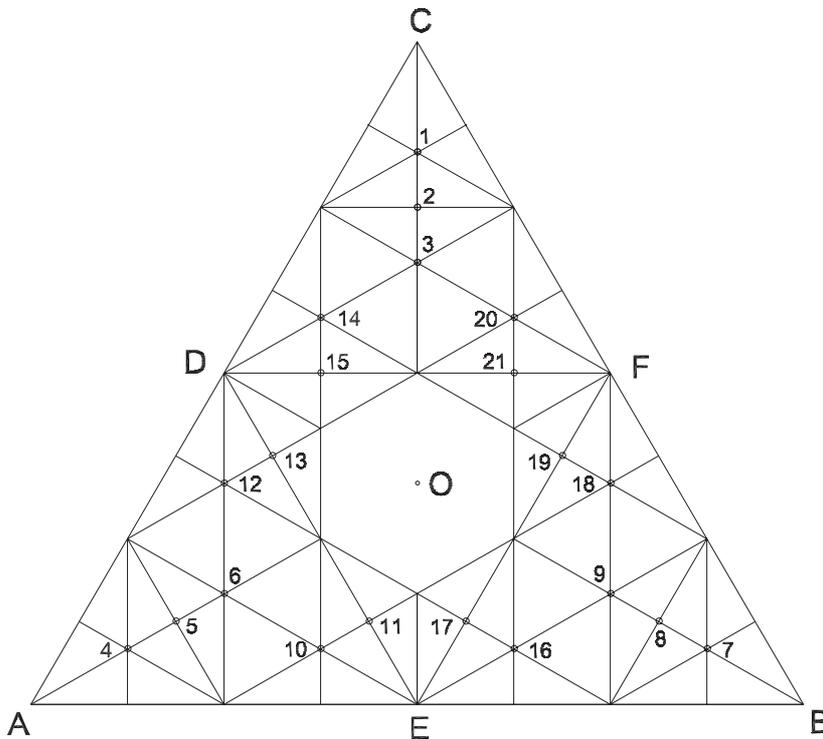


Figura 1 - Regione \tilde{T} .

Si consideri quindi una triangolazione non necessariamente uniforme invariante rispetto al gruppo \mathcal{G}' . Convienne poi numerare gli n nodi interni della triangolazione nel modo seguente: dapprima i nodi dell'asse x_2 , poi i nodi dell'asse AF e i nodi dell'asse BD, infine i nodi rimanenti con ascissa negativa e i loro simmetrici rispetto all'asse x_2 . Se n_1 è il numero di nodi sull'asse x_2 e n_2 il numero

di nodi all'interno dell'angolo AOE, le quattro matrici di restrizione avranno le seguenti dimensioni

$$R_1 \in \mathfrak{R}^{(n_1+n_2) \times n}, \quad R_2 \in \mathfrak{R}^{n_2 \times n}, \quad R_3, R_4 \in \mathfrak{R}^{(n_1+2n_2) \times n}.$$

Relativamente alla triangolazione fissata in Figura 1, risulta $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, e le matrici di restrizione sono

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} R_1^{(1)} & \\ & R_1^{(2)} \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} R_2^{(1)} & R_2^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$R_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} R_3^{(1)} & \\ & R_3^{(2)} \end{pmatrix}, \quad R_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} R_4^{(1)} & \\ & R_4^{(2)} \end{pmatrix},$$

con

$$R_1^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$R_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$R_2^{(1)}$ matrice nulla e

$$R_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R_3^{(2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$R_4^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$R_4^{(2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Le matrici di restrizione introdotte in questi esempi rappresentano la *discretizzazione* degli operatori di proiezione $P_j, j = 1, \dots, M$ che decompongono $V(\Omega)$ come nella (2.33). Tali matrici, applicate al vettore $\Phi := [\phi_1, \dots, \phi_n]^T$ contenente le funzioni di base in U_h , forniscono una base $\Phi_j := [\phi_{j,1}, \dots, \phi_{j,n_j}]^T$ per i sottospazi $U_{j,h}, j = 1, \dots, M$ tali che $U_h = \bigoplus_{i=1}^M U_{i,h}$, cioè

$$(3.7) \quad R_j \Phi = \Phi_j, \quad j = 1, \dots, M.$$

In questo modo, il metodo proposto in [10] risulta equivalente al metodo della decomposizione in sottospazi presentato nella Sezione 2. Sussiste infatti il seguente

Teorema 2. *Sotto l'ipotesi (3.7), i sistemi (3.4) $R_j A R_j^T \xi_j = R_j F$, $j = 1, \dots, M$ coincidono con i corrispondenti sistemi (2.36) $A_j u_j = F_j$, $j = 1, \dots, M$.*

Dim. La matrice A si può scrivere in forma compatta

$$A = \langle \Phi, \mathcal{L} \Phi^T \rangle.$$

Ora

$$\begin{aligned} R_j A R_j^T &= R_j \langle \Phi, \mathcal{L} \Phi^T \rangle R_j^T = \langle R_j \Phi, \mathcal{L}(\Phi^T R_j^T) \rangle = \\ &= \langle R_j \Phi, \mathcal{L}(R_j \Phi)^T \rangle = \langle \Phi_j, \mathcal{L} \Phi_j^T \rangle = A_j. \end{aligned}$$

Per il termine noto si ha:

$$R_j F = R_j \langle \Phi, f \rangle = \langle R_j \Phi, f \rangle = \langle \Phi_j, f \rangle = F_j.$$

4 - Algoritmi paralleli ed applicazioni

Se si utilizzano M processori in grado di lavorare concorrentemente, il metodo della decomposizione in sottospazi si può tradurre nel seguente

Algoritmo 1

I Passo Calcolare *in parallelo* le matrici A_j e i corrispondenti termini noti F_j , $j = 1, \dots, M$

II Passo Risolvere *in parallelo* i sistemi: $A_j u_j = F_j$, $j = 1, \dots, M$

III Passo Porre: $u = \sum_{j=1}^M u_j$

Si osservi che solo nell'ultimo passo è necessario uno scambio di informazioni fra i processori.

D'altra parte, anche il metodo proposto in [10] si può tradurre nel seguente

Algoritmo 2

I Passo Calcolare la matrice A e il corrispondente termine noto F

II Passo Calcolare *in parallelo* le matrici $R_j A R_j^T$ e i termini noti $R_j F$, $j = 1, \dots, M$

III Passo Risolvere *in parallelo* i sistemi: $R_j A R_j^T \xi_j = R_j F$, $j = 1, \dots, M$

IV Passo Porre: $\xi = \sum_{j=1}^M \xi_j$.

Anche in questo algoritmo l'ultimo passo prevede uno scambio di informazione fra i processori.

Utilizzando l'Algoritmo 1, si generano e si memorizzano direttamente le matrici ridotte A_j evitando la costruzione della matrice globale A e quindi una notevole occupazione di memoria. Inoltre il calcolo diretto dei sistemi lineari ridotti può avvenire in parallelo con risparmio sul tempo complessivo di esecuzione, mentre la costruzione di $A\xi = F$ nell'Algoritmo 2 riduce notevolmente lo *speed-up* finale, come si può notare nella Tabella 2. D'altra parte, l'Algoritmo 2, una volta che siano note le matrici di restrizione, ha il vantaggio di non dover costruire le funzioni di base negli M sottospazi $U_{j,h}$, $j = 1, \dots, M$ e di calcolare quindi la matrice A e il termine noto F con il classico metodo di Galerkin agli elementi finiti. Inoltre le matrici R_j non vengono generate e memorizzate effettivamente; infatti è possibile considerare algoritmi che operano sulla matrice A e sul termine noto F , ottenendo direttamente le matrici $R_j A R_j^T$ e i corrispondenti termini noti $R_j F$, $j = 1, \dots, M$. Un esempio di tali algoritmi verrà dato nella prima applicazione descritta qui di seguito.

Consideriamo la risoluzione del problema diretto dell'elettrocardiologia: nota la distribuzione di cariche elettriche nel miocardio e l'intensità della corrente da esse prodotte, determinare il potenziale cardiaco. Su questo problema il Prof. G. Di Cola, insieme ad alcuni suoi allievi, ha sviluppato interessanti ricerche ottenendo ottimi risultati raccolti in diverse pubblicazioni scientifiche ([7], [8], [14], [19], [17]).

Il modello di miocardio a cui si fa riferimento è quello descritto da Keener ([16], [18]), che con opportune semplificazioni si riduce al seguente problema modello bidimensionale.

Sia Ω un dominio rettangolare di \mathbb{R}^2 definito dalle disuguaglianze $|x_1| < a$, $|x_2| < b$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ contenente un mezzo omogeneo anisotropo composto da fibre parallele all'asse x_1 , con coefficienti di conduttività σ_l variabile con x_2 e costante nella direzione x_1 e σ_t costante in entrambe le direzioni. Indicato con $V(\Omega)$ lo spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$, si consideri in $V(\Omega)$ il seguente problema di Neumann

$$(4.1) \quad -\nabla \cdot (\Sigma \nabla) u = f \quad \text{in } \Omega$$

$$(4.2) \quad \Sigma \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega$$

dove \mathbf{n} è la normale esterna a $\partial\Omega$, f rappresenta lo stimolo elettrico dovuto all'applicazione di n sorgenti dipolari; in particolare se q_i è la carica positiva dell' i -esimo dipolo si ha per f la seguente rappresentazione

$$f = \sum_{i=0}^n q_i [\delta(x'_{i1}, x'_{i2}) - \delta(x''_{i1}, x''_{i2})]$$

con la condizione di compatibilità

$$\int_{\Omega} f d\Omega = 0 ;$$

infine $\Sigma = \Sigma(x_2)$ è la matrice diagonale

$$\Sigma = \begin{pmatrix} (\sigma_l - \sigma_t) \cos^2\left(x_2 \frac{\pi}{3b}\right) + \sigma_t & 0 \\ 0 & \sigma_t \end{pmatrix}.$$

Posto

$$\sigma_1(x_2) = (\sigma_l - \sigma_t) \cos^2\left(x_2 \frac{\pi}{3b}\right) + \sigma_t, \quad \sigma_2 = \sigma_t$$

e indicato con \mathcal{L} l'operatore $-\nabla \cdot (\Sigma \nabla)$, la (4.1) assume la seguente forma

$$\mathcal{L}u(x_1, x_2) = -\sigma_1(x_2) \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} - \sigma_2 \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = f.$$

I coefficienti σ_1 e σ_2 sono funzioni simmetriche rispetto alle variabili x_1 e x_2 , ne segue che l'operatore \mathcal{L} e l'operatore relativo alla condizione di Neumann (4.2) soddisfano rispettivamente la (2.27) e la (2.31). Possiamo quindi spezzare il problema (4.1)-(4.2) nei quattro problemi

$$(4.3) \quad -\nabla \cdot (\Sigma \nabla) u = P^{\alpha\beta} f \quad \text{in } \Omega, u \in V^{\alpha\beta}(\Omega), \alpha, \beta = 0, 1,$$

$$(4.4) \quad \Sigma \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega$$

dove $V^{\alpha\beta}(\Omega)$, $(\alpha, \beta = 0, 1)$ sono i quattro sottospazi della decomposizione (2.13).

Sia $U_h^{\alpha\beta}$ un sottospazio di $V^{\alpha\beta}(\Omega)$ di dimensione finita. Al fine di determinare un'approssimazione della soluzione di ogni problema (4.3)-(4.4) con il metodo di

Galerkin, abbiamo costruito in ciascun sottospazio $U_h^{\alpha\beta}$ un sistema di funzioni linearmente indipendenti. A tale scopo abbiamo considerato una decomposizione uniforme dell'intervallo $[-a, a]$ formata da $2N$ sottointervalli e abbiamo definito un sistema di $2N + 1$ B-spline lineari. Analogo procedimento è stato seguito sull'intervallo $[-b, b]$ utilizzando una decomposizione uniforme con $2L$ sottointervalli.

Indicate con $B_j(x_1)$ ($j = 1, \dots, 2N + 1$) le spline costruite nella direzione x_1 e con $B_k(x_2)$, ($k = 1, \dots, 2L + 1$) quelle costruite nella direzione x_2 , possiamo definire le funzioni

$$(4.5) \quad B_{jk}(x_1, x_2) = B_j(x_1) B_k(x_2) \quad (j = 1, \dots, 2N + 1; k = 1, \dots, 2L + 1).$$

Mediante le $B_{jk}(x_1, x_2)$ è possibile costruire in modo semplice un sistema di funzioni linearmente indipendenti per ciascun sottospazio $U_h^{\alpha\beta}$.

Indicato con $\{\varphi_i\}_{i=1}^P$ il sistema di funzioni ottenuto in un dato sottospazio e procedendo mediante una quadratura imperfetta (è stata utilizzata la regola dei trapezi), la matrice $A^{\alpha\beta}$, ($\alpha, \beta = 0, 1$) dei coefficienti del sistema

$$(4.6) \quad \sum_{i=1}^P \gamma_i \int_{\Omega} \Sigma \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\Omega = \int_{\Omega} f \varphi_j \, d\Omega, \quad j = 1, \dots, P$$

risulta quadrata, simmetrica, semi-definita positiva e singolare, con struttura tridiagonale a blocchi, dove i blocchi diagonali sono tridiagonali, mentre i rimanenti blocchi hanno struttura diagonale. Tutti gli elementi sulla diagonale principale sono positivi, mentre i rimanenti elementi sono negativi o nulli. Le matrici $A^{\alpha\beta}$ sono quindi matrici singolari di Stieltjes. Per il calcolo della soluzione abbiamo usato il metodo del gradiente coniugato preconditionato. Si dimostra infatti ([15]) che la fattorizzazione incompleta di Cholesky di una matrice singolare di Stieltjes genera una matrice triangolare inferiore C non singolare; quindi la matrice simmetrica, definita positiva CC^T può essere utilizzata come preconditionatore. In questo modo possiamo calcolare una delle infinite soluzioni che ogni sistema lineare (4.6) possiede, e quindi ricostruire una soluzione del problema iniziale (4.1)-(4.2) sommando i contributi determinati nei quattro sottospazi.

Abbiamo poi utilizzato il metodo descritto nella Sezione 3. Sia $A\xi = F$ la rappresentazione algebrica del problema di Galerkin agli elementi finiti relativa alla formulazione variazionale del problema (4.1)-(4.2). In questo caso sono stati

utilizzati come elementi finiti le funzioni di forma bilineari (4.5). Il problema è ricondotto quindi alla risoluzione di un sistema lineare di ordine $(2N + 1)(2L + 1)$, in cui la matrice dei coefficienti ha la seguente struttura tridiagonale a blocchi:

$$A = \begin{bmatrix} D_0 & C_0 & & & & \\ C_0 & D_1 & C_1 & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & \\ & & \dots & \dots & C_{2L-1} & \\ & & & C_{2L-1} & D_{2L} & \end{bmatrix}.$$

Ogni blocco della matrice A è di ordine $(2N + 1)$; i blocchi D_i sono tridiagonali simmetrici mentre i blocchi C_i sono diagonali. Per costruire le matrici $R_{\alpha_1 \alpha_2} A R_{\alpha_1 \alpha_2}^T$, $\alpha_i = 0, 1, i = 1, 2$ è possibile sfruttare la particolare struttura della matrice A . Infatti indicato con d_0 il vettore contenente gli elementi della diagonale principale e con d_1, d_2 i due vettori contenenti rispettivamente le due sopradiagonali della matrice A , gli elementi delle matrici ridotte, memorizzati nei vettori d'_0, d'_1, d'_2 si ottengono con i seguenti semplici algoritmi

1. per $j = 1, \dots, N + 1 + j_s$
per $k = 0, \dots, L + k_s$
 $i_1 = j + k(2N + 1)$
 $i_2 = (k + 1)(2N + 1) - j + 1$
 $i_3 = (2N + 1)(2L - k) + j$
 $i_4 = (2N + 1)(2L + 1 - k) - j + 1$
 $i = (j - 1)(L + k_s + 1) + k + 1$
 $d'_0(i) = \frac{1}{4} (d_0(i_1) + d_0(i_2) + d_0(i_3) + d_0(i_4))$
fine ciclo k
fine ciclo j
2. $c = 1$
per $j = 1, \dots, N + j_s$
se $j = N$, allora $c = \sqrt{2}$
per $k = 0, \dots, L + k_s$
 $i_1 = j + k(2N + 1)$
 $i_2 = (k + 1)(2N + 1) - j$
 $i_3 = (2N + 1)(2L - k) + j$
 $i_4 = (2N + 1)(2L + 1 - k) - j$
 $i = (j - 1)(L + k_s + 1) + k + 1$

$$d_2'(i) = \frac{c}{4} (d_1(i_1) + d_1(i_2) + d_1(i_3) + d_1(i_4))$$

fine ciclo k
fine ciclo j

3. per $j = 1, \dots, N + 1 + j_s$

$$c = 1$$

per $k = 0, \dots, L - 1 + k_s$

se $k = L - 1$, allora $c = \sqrt{2}$

$$i_1 = j + k(2N + 1)$$

$$i_2 = (k + 1)(2N + 1) - j + 1$$

$$i_3 = (2N + 1)(2L - k - 1) + j$$

$$i_4 = (2N + 1)(2L - k) - j + 1$$

$$i = (j - 1)(L + k_s + 1) + k + 1$$

$$d_1'(i) = \frac{c}{4} (d_2(i_1) + d_2(i_2) + d_2(i_3) + d_2(i_4))$$

fine ciclo k

fine ciclo j

dove i vettori d_0' , d_1' , d_2' contengono rispettivamente gli elementi della diagonale principale e delle due sopradiagonali. I valori dei parametri j_s e k_s sono contenuti nella Tabella 1.

TABELLA 1

α_1	α_2	j_s	k_s
0	0	0	0
0	1	-1	0
1	0	0	-1
1	1	-1	-1

Nella Figura 2 sono rappresentate linee equipotenziali ottenute applicando, nell'ordine, una sorgente dipolare orizzontale, una sorgente dipolare verticale e infine un quadrupolo in un dominio di $4 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ su cui si è utilizzata una decomposizione uniforme con 200×50 nodi; la distanza fra le cariche dei dipoli è di 0.04 cm ; i coefficienti di conduttività considerati sono $\sigma_l = 1$ e $\sigma_t = \frac{1}{9}$. I grafici presentati si ottengono con entrambi i procedimenti descritti. Nella Tabella 2 sono riportati gli *speed-up* scalati dei due Algoritmi utilizzati, al variare delle

dimensioni del problema discreto, avendo utilizzato per l'esecuzione in parallelo una rete di quattro *transputer*.

TABELLA 2 - *Confronto fra speed-up scalati.*

	50×50	100×50	200×50
<i>Alg. 1</i>	3.75	3.77	3.90
<i>Alg. 2</i>	1.20	1.21	1.27

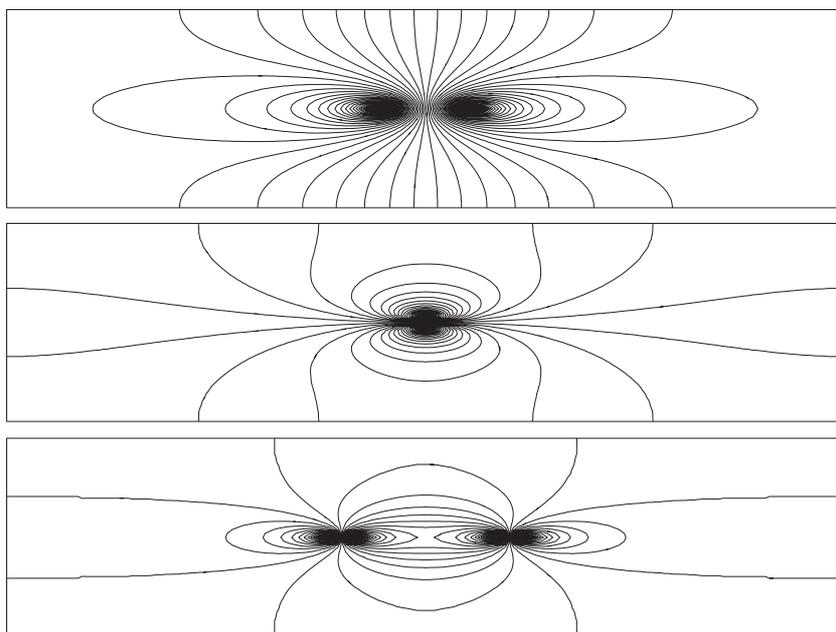


Figura 2 - Linee equipotenziali ottenute, nell'ordine, con un dipolo orizzontale, un dipolo verticale e un quadrupolo.

Come secondo problema modello, consideriamo il problema connesso alla deformazione di una piastra quadrata incastrata lungo il suo bordo, sottoposta a forze agenti nel piano della piastra, perpendicolarmente ai suoi lati, con intensità uguali fra loro e costanti.

Gli autovalori di questo problema consentono di scrivere le posizioni di equilibrio instabile della piastra. In particolare risulta importante calcolare con la massima precisione il primo autovalore o *primo carico critico*.

Il classico metodo di Rayleigh-Ritz permette di determinare approssimazioni per eccesso di tali valori critici.

Sia A il campo definito dalle disuguaglianze $|x_i| < \frac{\pi}{2}$ ($i = 1, 2$) e $V(A) = H_0^2(A)$; consideriamo il problema di autovalori

$$(4.7) \quad \Delta \Delta u + \lambda \Delta u = 0 \quad \text{in } A, \quad u \in V(A)$$

$$(4.8) \quad u = 0; \quad \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{su } \partial A$$

dove \mathbf{n} indica la normale interna a ∂A .

Come è noto (vedi [12]), il problema (4.7)-(4.8) ha un insieme infinito e numerabile di autovalori, tutti reali positivi e di molteplicità finita. Esiste quindi un insieme infinito e numerabile di valori del parametro λ rispetto al quale la piastra incastrata al bordo perde di stabilità.

Supportremo gli autovalori del problema (4.7)-(4.8) ordinati in successione non decrescente e ciascuno ripetuto un numero di volte uguale alla sua molteplicità

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \lambda_k \leq \dots$$

L'operatore $\mathcal{L} = \Delta \Delta + \lambda \Delta$ e gli operatori relativi alle condizioni al contorno (4.8) risultano invarianti rispetto al gruppo \mathcal{G}_0 delle matrici definite nella (2.9). Utilizzando la decomposizione (2.13) per lo spazio $V(A)$ il problema (4.7)-(4.8) si spezza nei quattro problemi

$$(4.9) \quad \Delta \Delta u + \lambda \Delta u = 0 \quad \text{in } A, \quad u \in V^{\alpha\beta}(A) \quad (\alpha, \beta = 0, 1)$$

$$(4.10) \quad u = 0; \quad \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{su } \partial A$$

La successione degli autovalori del problema (4.7)-(4.8) si ottiene riunendo in un'unica successione non decrescente gli autovalori $\lambda_k^{\alpha\beta}$ dei problemi (4.9)-(4.10).

Fissata una coppia (α, β) e un sistema $\{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}$ di funzioni in $V^{\alpha\beta}(A)$ nulle su ∂A insieme alla derivata normale, il metodo di Rayleigh-Ritz assicura che, se p è abbastanza grande, le radici $\mu_1^{\alpha\beta}, \dots, \mu_p^{\alpha\beta}$ dell'equazione

$$(4.11) \quad \det \left[\int_A \Delta \varphi_i \Delta \varphi_j dA + \lambda \int_A \Delta \varphi_i \varphi_j dA \right] = 0 \quad (i, j = 1, \dots, p),$$

disposte in ordine non decrescente e ciascuna ripetuta con la sua molteplicità, sono approssimazioni per eccesso dei primi autovalori di (4.9)-(4.10).

Per fissare le funzioni φ_i in $V^{\alpha\beta}(A)$ si è considerata una suddivisione dell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ in $2N$ sottointervalli di uguale ampiezza e un sistema di $2N + 3$ B-spline cubiche definito su una decomposizione estesa dell'intervallo. A partire da queste funzioni, è possibile costruire un sistema di $2N - 1$ spline

cubiche, nulle insieme alla derivata prima agli estremi dell'intervallo, da cui si generano funzioni pari e dispari nelle direzioni x_1 e x_2 . Si formano quindi, come descritto in [1], le funzioni φ_i , $i = 1, \dots, p$ in ciascun sottospazio.

L'equazione (4.11) è equivalente al problema di autovalori generalizzato

$$(4.12) \quad B^{\alpha\beta} u^{\alpha\beta} = \lambda C^{\alpha\beta} u^{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 0, 1)$$

dove le matrici $B^{\alpha\beta}$, $C^{\alpha\beta}$ i cui elementi sono rispettivamente $\int \Delta\varphi_i \Delta\varphi_j dA$, ($i, j = 1, \dots, p$) e $\int \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j dA$ ($i, j = 1, \dots, p$), (tutti calcolati in modo esatto), sono simmetriche definite positive con struttura a blocchi, dove ciascun blocco risulta una matrice eptadiagonale.

Applicando direttamente il metodo di Rayleigh-Ritz al problema (4.7)-(4.8) con il sistema di $(2N - 1)^2$ spline cubiche verificanti le condizioni al contorno descritto precedentemente, si perviene al problema di autovalori generalizzato

$$(4.13) \quad B\xi = \lambda C\xi$$

con B e C matrici quadrate di ordine $(2N - 1)^2$. Utilizzando le matrici di restrizione $R_{\alpha_1\alpha_2}$ (3.6), il problema (4.13) si spezza nei quattro problemi

$$(4.14) \quad R_{\alpha_1\alpha_2} B R_{\alpha_1\alpha_2}^T \xi^{\alpha_1\alpha_2} = \lambda R_{\alpha_1\alpha_2} C R_{\alpha_1\alpha_2}^T \xi^{\alpha_1\alpha_2}, \quad (\alpha_i = 0, 1, \quad i = 1, 2).$$

Dall'ultimo Teorema della sezione precedente segue che i quattro problemi (4.14) coincidono nell'ordine con i quattro problemi (4.12).

Nella Tabella 3 sono riportate le approssimazioni dei primi autovalori ottenute in ciascuno dei 4 sottospazi, che, ordinate in sequenza non decrescente, rappresentano approssimazioni per eccesso dei primi 15 autovalori del problema (4.7)-(4.8).

TABELLA 3 - *Approssimazioni per eccesso dei primi autovalori.*

	Sottospazi			
	$V^{00}(A)$	$V^{01}(A)$	$V^{10}(A)$	$V^{11}(A)$
λ_1	5.3036267	9.3341571	9.3341571	12.990351
λ_2	15.616202	19.207669	19.207669	27.267741
λ_3	16.923631	24.957798	24.957798	28.276724
λ_4	24.958193	33.095986	33.095986	

Lo *speed-up* scalato dell'algoritmo per la risoluzione dei 4 problemi (4.12) tende a 4 all'aumentare di N , mentre quello dell'algoritmo per la risoluzione dei

problemi (4.14) rimane sempre prossimo a 1, come accade per la precedente applicazione (Tabella 2).

In Figura 3 sono rappresentate le autofunzioni relative agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_3, \lambda_4$ che appartengono rispettivamente ai sottospazi $V^{00}(A), V^{01}(A), V^{10}(A), V^{11}(A)$. I grafici evidenziano, oltre alle proprietà di simmetria o antisimmetria rispetto agli assi derivanti dall'appartenenza delle autofunzioni agli spazi $V^{\alpha\beta}(A)$, anche le proprietà di simmetria rispetto alle bisettrici.

5 - Conclusioni

In questa breve nota abbiamo inizialmente presentato, anche attraverso alcuni significativi esempi, due differenti metodi che definiscono algoritmi simili di decomposizione per problemi differenziali lineari al contorno con proprietà di invarianza rispetto ad un assegnato gruppo di trasformazioni. Quindi, abbiamo dimostrato che questi metodi, sotto particolari ipotesi, risultano equivalenti, cioè conducono alla medesima decomposizione e alla risoluzione di uguali problemi discreti. Utilizzando poi il parallelismo intrinseco dei due algoritmi, essi sono stati applicati alla risoluzione di alcuni problemi modello evidenziandone gli aspetti computazionali e i vantaggi che il metodo di decomposizione in sottospazi offre rispetto al metodo proposto in [10].

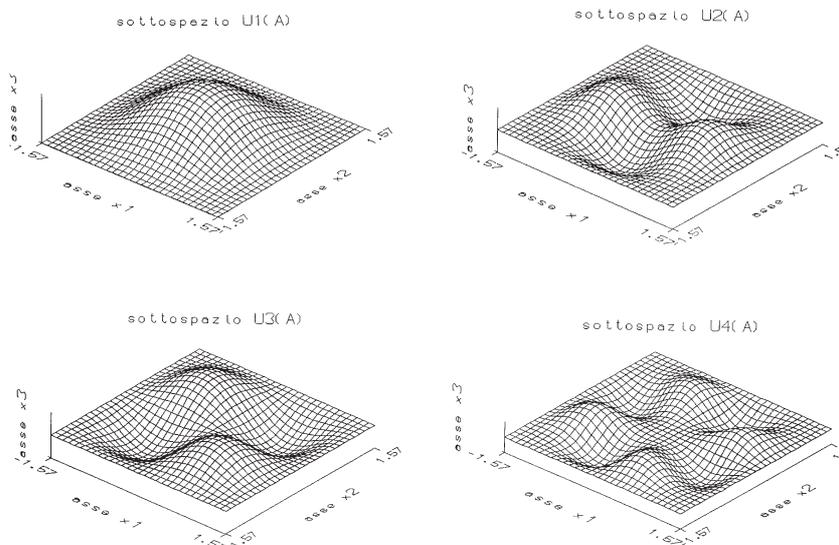


Figura 3 - Autofunzioni relative a $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_3, \lambda_4$.

References

- [1] A. AIMI e M. DILIGENTI, *Difetti ed eccessi degli autovalori del classico problema di «buckling»*, *Calcolo* **29** (1992), 313-328.
- [2] L. BASSOTTI, *Operatori lineari T-invarianti rispetto ad un gruppo di congruenze*, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **148** (1987), 173-205.
- [3] L. BASSOTTI, *Sottospazi invarianti per operatori differenziali lineari a coefficienti costanti*, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) **22** (1973), 157-184.
- [4] L. BASSOTTI e G. DI COLA, *Difetti ed eccessi degli autovalori di un problema di elasticità relativa a un cubo*, *Riv. Mat. Univ. Parma* (4) **4** (1978), 413-432.
- [5] A. BOSSAVIT, *Symmetry, groups and boundary value problems. A progressive introduction to noncommutative harmonic analysis of partial differential equations in domains with geometrical symmetry*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **56** (1986), 167-215.
- [6] J. F. BOURGAT, R. GLOWINSKI, P. LE TALLEC and M. VIOHASCU, *Variational formulation and algorithm for trace operator in decomposition calculations*, in *Domain Decomposition Methods*, T. F. Chau, R. Glowinski, J. Périaux and O.B. Widlund eds., SIAM, Philadelphia 1989, 3-16.
- [7] G. DI COLA et al., *Numerical simulation of electric fields generated by dipolar sources in tridimensional anisotropic non homogeneous media*, 17th International Congress on Electrophysiology, Florence, 26-29 Sept. 1990.
- [8] G. DI COLA, T. MORREA and M. PENNACCHIO, *The inverse potential problem of electrocardiology in terms of sources*, *Ratio Math.* **4** (1992), 61-70.
- [9] C. C. DOUGLAS and J. MANDEL, *The domain reduction method: high way reduction in three dimensions and convergence with inexact solvers*, in *Fourth Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*, J. Mandel and S. F. McCormick, eds., SIAM, Philadelphia 1989.
- [10] C. C. DOUGLAS and B. F. SMITH, *Using symmetries and antisymmetries to analyze a parallel multigrid algorithm: the elliptic boundary value problem case*, *SIAM J. Numer. Anal.* **26** (1989), 1439-1461.
- [11] A. FÄSSLER, *Application of group theory to the method of finite elements for solving boundary value problems*, *Diss.* **5696**, ETH Zürich (1976).
- [12] G. FICHERA, *Upper bounds for orthogonal invariants of some positive linear operators*, *Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste* **1** (1969), 1-8.
- [13] R. GLOWINSKI, Q. V. DINH and J. PÉRIAUX, *Domain decomposition methods for nonlinear problems in fluid dynamics*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **40** (1983), 27-109.
- [14] M. GROPPi, P. COLLI FRANZONE, G. DI COLA, L. GUERRI, E. MACCHI and M. PENNACCHIO, *Numerical simulation of electric fields generated by oblique dipole layers in anisotropic media*, in «*Electrocardiology 93*», Eds. P.W. MacFarlane and P. Rautaharju, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1994, 113-116.
- [15] E. F. KAASSCHIETER, *Preconditioned conjugate gradients for solving singular systems*, *J. Comput. Appl. Math.* **24** (1988), 265-275.

- [16] J. P. KEENER, *An eikonal-curvature equation for action potential propagation in myocardium*, J. Math. Biol. **29** (1991), 629-651.
- [17] E. MACCHI, M. MANGHI, G. DI COLA, M. GROPPI, M. PENNACCHIO, P. COLLI FRANZONE, L. GUERRI, B. TACCARDI and R. L. LUX, *Identification of ventricular fibre architecture from electronic epicardial potentials elicited by dipolar stimulation: numerical and experimental models*, Medical & Biological Engineering & Computing **34**, Suppl. 1, Part 2 (1996), 83-84.
- [18] A. V. PANFILOV and J. P. KEENER, *Generation of Reentry in Anisotropic Myocardium*, J. Cardiovasc Electrophysiol **4** (1993), 412-421.
- [19] M. PENNACCHIO, P. COLLI FRANZONE, G. DI COLA, M. GROPPI, L. GUERRI and E. MACCHI, *Current stimulations in a tridimensional model of cardiac muscle*, in «Electrocardiology 93», Eds. P. W. Macfarlane and P. Rautaharju, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 1994, 109-112.
- [20] G. F. SMITH, *Projection operators for symmetric regions*, Arch. Rational Mech. Anal. **54** (1974), 161-174.
- [21] O. B. WIDLUND, *Some Schwarz methods for symmetric and nonsymmetric elliptic problems*, in Fifth International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, D. E. Keyes, T. F. Chau, G. Meurant, J. S. Scroggs and R. G. Voigt eds., SIAM, Philadelphia 1992, 19-36.
- [22] W. ZHONG and C. QIU, *Analysis of symmetric or partially symmetric structures*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **38** (1983), 1-18.

Abstract

We analyse two different procedures for the parallel numerical solution of elliptic boundary value problems with simmetry properties. We demonstrate, under suitable conditions, their equivalence and we show in this case the different characteristics of their implementation. At last, we present two applications, involving the direct problem in electrocardiology and the classical «buckling» eigenvalue problem.
