Riv. Mat. Univ. Parma (6) **2*** (1999), 259-279

SALOMON OFMAN (*)

Formule de transformation pour les courants-résidus (**)

1 - Quelques propriétés des courant-résidus

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur un espace topologique W et b un fermé de W. On désigne par $H_c^\bullet(W, \mathcal{F})$ (resp. $H_{\{b\}}^\bullet(W, \mathcal{F})$) les groupes de cohomologie à supports compacts (resp. à support dans b) de $\mathcal{F}$. Pour abréger, on notera également $\mathcal{F}_c(W)$ pour $H_c^0(W, \mathcal{F})$. Dans la suite Y' désigne une variété analytique complexe de dimension n. On note $\mathcal{A}^\bullet$ (resp. $\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}$) le faisceacu de germes de formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ gradué par le degré (resp. bigradué par le type), l'espace de définition étant indiqué par le contexte.

– La bidimension d'un courant (ou d'une forme différentielle) de type (r, s) sur une variété Y' est le couple $(n-r, n-s)$.

– Une forme différentielle ψ' est semi-méromorphe si elle s'écrit localement comme quotient d'une forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ et d'une fonction holomorphe; le faisceau des germes de formes différentielles semi-méromorphes $SM^{\bullet,\bullet}$ est un faisceau de $\mathcal{O}$-modules qui s'identifie donc au produit tensoriel $M \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathcal{A}^{\bullet,\bullet}$ où M est le faisceau des germes de fonctions méromorphes.

– Une famille d'hypersurfaces $c_1, \ldots, c_p$ est en position générale si pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, p\}$, l'intersection $\bigcap_{i \in I} c_i$ est une sous-variété (lisse) de Y' de codimension k.

Soit $I = (i_1, \ldots, i_p)$ un p-uple d'entiers positifs, J un sous-ensemble de I. On note $I(\widehat{J})$ le complémentaire ensembliste I—J de J dans I et $I(\hat{j})$ pour $I(\widehat{\{j\}})$; en outre pour abréger, on pose $1_h = \{1, \ldots, h\}$ et $J^c = 1_p(\widehat{J})$ i.e. le complémentaire

---

(*) Université Paris 7-Institut de Mathématiques, UMR 9994 du CNRS-Géométrie et Dynamique, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France. E-mail: ofman@math.jussieu.fr

(**) Reçu le 8 Novembre 1999. Classification AMS 32 A 27, 32 A 40.

de J dans $\{1, \ldots, p\}$. Si $(u_i)_{i \in I}$ (respectivement $(\psi_i)_{i \in I}$) est une famille de fonctions (respectivement de formes différentielles) dans Y', on note u_I (respectivement ψ_I) le produit $\prod_{i \in I} u_i$ (respectivement $\bigwedge_{i \in I} \psi_i$).

Soit U un polydisque de $\mathbb{C}^n$, ψ une forme différentielles $\mathcal{C}^\infty$ de type (r, s) dans U, $C' = (c_1', \ldots, c_p')$ une famille d'hypersurfaces de U d'équation respective $v_1 = 0, \ldots, v_p = 0$; on note dans ce paragraphe $V\colon U \to \mathbb{C}^p$ l'application définie par le p-uple $(v_1, \ldots, v_p)$. Dans la suite, sauf indication du contraire, on supposera que la famille C' définit une intersection complète (i.e. codim $\bigcap_{i=1}^{p} c_i' = p$).

Soit $\mathbb{R}_>$ l'intervalle $]0, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)\colon \mathbb{R}_> \to (\mathbb{R}_>)^p$ une application (qu'on supposera $\mathcal{C}^\infty$) définie dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}_>$. Suivant [**C-H**], ε est appelée une trajectoire admissible si $\lim_{s \to 0} \varepsilon_p(s) = 0$ et si en outre lorsque s tend vers 0, $\varepsilon_i(s)$ tend vers 0 plus vite que toute puissance polynomiale de $\varepsilon_{i+1}(s)$ $(i = 1, \ldots, p-1)$. Soit ε une trajectoire admissible, $D_{\varepsilon(s)}$ l'ensemble défini par $D_{\varepsilon(s)} = \{z \in U;\ |v_i(z)| = \varepsilon_i(s),\ i = 1, \ldots, p\} = |V|^{-1}(\varepsilon(s))$, h une fonction analytique dans U non nulle en dehors de $\bigcup_{i=1}^{p} c_i'$ et $\alpha \in \mathcal{A}_c^{2n-p-r-s}(U)$ une forme à support compact dans U.

La famille de nombres complexes $R_\varepsilon(\psi, h, C', \alpha) = \int_{D_{\varepsilon(s)}} ((\psi/h) \wedge \alpha)$ admet, lorsque s tend vers 0, une limite $R(\psi, h, C', \alpha)$ indépendante du choix des fonctions de définition $(v_1, \ldots, v_p)$ de la famille C' (mais pas bien sûr de l'ordre des $(c_1, \ldots, c_p)$); la fonction associant à toute $\alpha \in \mathcal{A}_c^\bullet(U)$ la valeur $R(\psi, h, C', \alpha)$ définit un courant sur U. Cette construction reste encore valide si le support de c' est compact et celui de α quelconque. Ce courant est appelé le courant-résidu (ou courant résiduel) associé à ψ et C'; on le notera indifféremment par $\mathrm{Res}_{C'}(\psi/h)$ ou $\mathrm{Res}_V(\psi/h)$.

En utilisant une partition de l'unité, on peut «recoller» les courants-résidus, ce qui permet de les définir sur toute variété analytique complexe Y (et même tout espace analytique réduit) ([**C-H**], théorème 1.7.2). Si ϕ est une forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ de degré r et A un courant de degré s dans Y', le produit $\phi \wedge A$ est le courant défini par $\langle \phi \wedge A, \theta \rangle = (-1)^{rs} \langle A, \phi \wedge \theta \rangle$. Soit ψ une forme différentielle semi-méromorphe de degré k et C un p-uple d'hypersurfaces de Y'; on a:

$$\langle \mathrm{Res}_C(\phi \wedge \psi), \theta \rangle = (-1)^{ks} \langle \mathrm{Res}_C \psi, \phi \wedge \theta \rangle$$

$$= (-1)^{ks} (-1)^{(k-p)r} \langle \phi \wedge \mathrm{Res}_C \psi, \theta \rangle = (-1)^{pr} \langle \mathrm{Res}_C(\phi \wedge \psi), \theta \rangle.$$

Le courant-résidu est ainsi $\mathcal{A}^\bullet(Y)$-linéaire ou anti-linéaire (relativement au produit extérieur).

Les principales propriétés des résidus que nous utiliserons sont rappelées ci-après (les renvois sont à [**C-H**]).

Propriétés. Avec les notations précédentes, on a

(i) si $d''\psi = 0$, le courant-résidu $\mathrm{Res}_{C'}(\psi/h)$ est d''-fermé dans Y (th. 1.7.2);

(ii) sous l'hypothèse C' famille intersection complète, le support de $\mathrm{Res}_{C'}(\psi/h)$ est une réunion de composantes irréductibles de l'intersection $\bigcap_{i=1}^{p} c_i'$ (éventuellement vide) (th. 1.7.6);

(iii) s'il existe $i \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $|(h)^+| \subset c_1' \cap \ldots \cap c_{i-1}' \cap c_{i+1}' \cap \ldots c_p'$, alors $\mathrm{Res}_{C'}(\psi/h) = 0$ (th. 1.7.6);

(iii') si $C'' = (c_1'', \ldots, c_p'')$ est une autre famille d'hypersurfaces de Y contenant C' (i.e. $c_i' \subset c_i''$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$) avec codim $\cap C'' = p$, on a $\mathrm{Res}_{C''}(\psi/h) = \mathrm{Res}_{C'}(\psi/h)$ (th. 1.7.6);

(iv) $\mathrm{Res}_{C'}(\psi/h)$ est antisymétrique relativement à l'ordre de la famille C' (th. 1.7.6);

(v) soit $v_i = 0$ une équation de c_i' dans Y ($i \in \{1, \ldots, p\}$), $V = (v_1, \ldots, v_p)$ et $\{c'\}$ le courant d'intégration associé au cycle $c' = \cap c_i'$; on a (formule du résidu logarithmique 1.9 (1))

$$(\mathrm{Res}_V(\psi/V)) \wedge dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_p = (2i\pi)^p \psi \wedge \{c'\} = (2i\pi)^p \{c'\} \wedge \psi$$

(où $\{c'\}$, désignant le courant d'intégration sur c', est un courant de degré pair);

vi) le courant-résidu n'a pas de «masse» concentrée en une hypersurface de son support.

Dans la suite, on se référera à ces propriétés par leur numéro de (i) à (vi) ci-dessus. Pour une bonne introduction à la construction des courants-résidus, on pourra consulter [**Y1**]; dans [**Y2**], on trouvera la démonstration du rôle le rôle essentiel joué par les résidus dans les formules de divisions analytiques.

2 - Quelques résultats pour les classes-résidus de Leray

On peut se référer pour les détails des constructions à [**L**] ou [**N**]. Nous suivons ici le point de vue cohomologique de [**N**]; toutefois, afin de rester entièrement en cohomologie, nous utiliserons la d-cohomologie à supports compacts au lieu de l'homologie, cette présentation étant plus aisément susceptible de généralisation à des faisceaux quelconques.

Soit Y' une variété analytique complexe de dimension n et b une hypersurface lisse; pour tout $k \in \mathbb{N}$, le morphisme cobord pour la cohomologie à supports fermés (resp. à supports compacts) ∂ (resp. δ) envoie $H^k(Y'-b, \mathbb{C})$ dans $H^{k+1}_{\{b\}}(Y', \mathbb{C})$ (resp. $H^{2n-k-1}_c(b, \mathbb{C})$ dans $H^{2n-k}_c(Y'-b, \mathbb{C})$). Ces morphismes

$$H^k(Y'—b, \mathbb{C}) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}_{\{b\}}(Y', \mathbb{C})$$

$$H^{2n-k}_c(Y'—b, \mathbb{C}) \xleftarrow{\delta} h^{2n-k-1}_c(b, \mathbb{C})$$

sont transposés l'un de l'autre (c'est une conséquence immédiate du théorème de dualité de de Rham); en particulier $H^{k+1}_{\{b\}}(Y', \mathbb{C})$ est isomorphe au dual (topologique) de $H^{2n-k-1}_c(b, \mathbb{C})$. La dimension réelle de b étant $2n-2$, on peut identifier le dual de $H^{2n-k-1}_c(b, \mathbb{C})$ et $H^{k-1}(b, \mathbb{C})$ d'où un isomorphisme j de $H^{k+1}_{\{b\}}(Y', \mathbb{C})$ sur $H^{k-1}(b, \mathbb{C})$. Le morphisme composé $j \circ \partial : H^k(Y'—b, \mathbb{C}) \to H^{k-1}(b, \mathbb{C})$ est noté $\dot{\mathrm{r}}\dot{\mathrm{e}}\mathrm{s}_b$ et appelé le morphisme résidu. Puisque b est elle-même une variété analytique, on peut itérer le procédé. Ainsi soit $C = (c_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille d'hypersurfaces en position générale (au moins au voisinage de $c = \bigcap_{i=1}^{p} c_i$ et dans ce cas on restreint la variété Y' en sorte qu'elle soit incluse dans ce voisinage); pour tout multi-indice $J \subset 1_p$, on pose $C_J = (c_i)_{i \in J}$ et $\cap C_J = \bigcap_{i \in J} c_i$ d'où, avec les abus habituels de notation, $C_i = c_i$, $c = \cap C_{1_p}$ et $C_{1_{p+1}} = \emptyset$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, p-1\}$, on a des morphismes résidus

$$\dot{\mathrm{r}}\dot{\mathrm{e}}\mathrm{s}_{\cap C_{1_j}, 1_j^c} : H^k\left((\cap C_{1_j}) — \left((\cap C_{1_j}) \cap \bigcup_{i=j+1}^{p} c_i\right), \mathbb{C}\right)$$

$$\to H^{k-1}\left((\cap C_{1_{j+1}}) — \left((\cap C_{1_{j+1}}) \cap \bigcup_{i=j+2}^{p} c_i\right), \mathbb{C}\right).$$

Le morphisme composé

$$\dot{\mathrm{r}}\dot{\mathrm{e}}\mathrm{s}_{C_1} \circ \dot{\mathrm{r}}\dot{\mathrm{e}}\mathrm{s}_{C_1, C_{1_1^c}} \circ \ldots \circ \dot{\mathrm{r}}\dot{\mathrm{e}}\mathrm{s}_{\cap C_{1_{p-1}}, C_p} : H^k\left(Y' — \bigcup_{i=1}^{p} c_i, \mathbb{C}\right) \to H^{k-p}(c, \mathbb{C}),$$

défini pour tout $k \geqslant p$, est appelé le morphisme résidu composé et noté $\dot{\mathrm{r}}\dot{\mathrm{e}}\mathrm{s}_C$ (pour $k < p$ on peut encore le définir comme le morphisme identiquement nul).

Lorsque c a des singularités, cette construction est encore possible, mais à condition de définir le morphisme-résidu à valeurs dans $H^{k+1}_{\{c\}}(Y')$, ou bien utiliser l'homologie de Borel-Moore, car on ne peut plus appliquer le théorème de dualité de de Rham.

Soit $\mathcal{Z}^k$ le faisceau des germes de formes différentielles d-fermées de degré k, l'espace de définition étant indiqué par le contexte; pour toute variété X l'isomorphisme de de Rham permet d'identifier les groupes de cohomologie $H^k(X, \mathbb{C})$ et les espaces quotients $\mathcal{Z}^k(X)/d\mathcal{A}^{k-1}(X)$. Si les c_i admettent dans Y' des équations globales $s_i = 0$, sous les hypothèses précédentes (les c_i en position générale) on peut calculer explicitement le morphisme $\mathrm{r\dot{e}s}_C$ grâce à l'algorithme de division de Gelfand-Leray-Shilov (ou algorithme G.L.S.) (cf. [**G-S**], [**L**], [**N**]). Ainsi pour $p = 1$ et c_1 sans multiplicité, soit ψ' un représentant dans $\dot{\psi}' \in H^k(Y - c_1, \mathbb{C}) \cong \mathcal{Z}^k(Y - c_1)/d\mathcal{A}^{k-1}(Y - c_1)$ de la forme $\psi' = (ds \wedge \psi/s) + \theta$, $\theta \in \mathcal{A}^k(Y)$ (l'existence d'un tel représentant est démontré au théorème I.1.5 de [**L**]); la restriction de ψ à c_1 est évidemment d-fermée et appartient à la classe de cohomologie $\mathrm{r\dot{e}s}_{c_1}\dot{\psi}' \in H^{k-1}(c_1, \mathbb{C})$. Plus généralement, soit ψ' une forme différentielle homogène semi-méromorphe admettant une décomposition (unique) $\psi' = \sum_{k=1}^{p} \sum_{|I|=k}^{p} ds_I \wedge \phi_I/s_I$ avec $\phi_I \in \mathcal{A}^\bullet(Y')$; si $d\psi = 0$ dans $Y' - \bigcap_{i=1}^{p} c_i$, la forme $\phi_{|c}$ est d-fermée et appartient à $\mathrm{r\dot{e}s}_C\psi' \in H^\bullet(c, \mathbb{C})$ (cela résulte facilement de l'algorithme G.L.S.). En particulier, si l'on pose $J = \{1, \dots, j\}$, $K = \{j+1, \dots, p\}$, $C_J = (c_1, \dots, c_j)$, $C_K = (c_{j+1}, \dots, c_p)$, $S = \prod_{i=1}^{p} s_i$, alors pour toute forme différentielle ψ d-fermée dans Y', on a «l'associativité» du morphisme-résidu: $\mathrm{r\dot{e}s}_C(\psi/S) = \mathrm{r\dot{e}s}_{C_J}(1/S_J[\mathrm{r\dot{e}s}_{C_K}(\psi/S_K)])$. Les démonstrations de V.32 de [**L**] se généralisent de la manière suivante.

Soit ψ une forme différentielle homogène $\mathcal{C}^\infty$ sur Y', $C = (c_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille d'hypersurfaces de Y' d'équation respective $u_i = 0$ $(i = 1, \dots, p)$, $c = \bigcap_{i=1}^{p} c_i$ leur intersection (en tant que cycle); on suppose dans ce paragraphe que la forme $du_1 \wedge \dots \wedge du_p$ ne s'annule pas dans Y', en particulier c est une sous-variété (sans multiplicités).

Lemme 2.1. (i) *Si pour tout multi-indice $I = (i_1, \dots, i_k)$, les fonctions $f_I \in \mathcal{A}^\bullet(Y')$ vérifient*

$$\sum_{i=I}^{k} (-1)^{j-1} u_{I(\hat{\imath}_j)} f_{I(\hat{\imath}_j)} = 0 \tag{1}$$

il existe θ_J fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans Y' en sorte que l'on ait

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \theta_{I(j)} = 0 \tag{2}$$

et

(3) $$f_I = u_{I^c}\theta_I$$

(ii) *Les conditions suivantes sont équivalentes*

(4) (a) $d(u_1 \dots u_p) \wedge \psi = 0$

(b) *il existe* $\phi, \phi_I \in \mathcal{A}^{\bullet}(Y')$ *ne contenant aucune différentielle* du_j $(j = 1, \dots, p)$ *vérifiant les conditions suivantes*

(5) $$\psi = du_1 \wedge \dots \wedge du_p \wedge \phi + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{|I|=k} u_{I^c} du_I \wedge \phi_I$$

et

(6) $$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \phi_{I(\hat{\imath}_j)} = 0$$

les I *décrivant les sous-ensembles croissants de* 1_p *de longueur* $k \in \{1, \dots, p\}$.

Démonstration. Il suffit de montrer le lemme au voisinage de tout point y de Y'; on peut donc supposer $Y' = U$ est un polydisque de $\mathbb{C}^n$ centré en $y = 0$. Les u_i n'ayant pas de singularités dans U, on peut choisir des coordonnées $(z^1, \dots, z^n)$ en sorte que l'on ait $z^l = u_l$ pour $l = \{1, \dots, p\}$.

(i) On fait une récurrence sur p et k.

α) Cas $k = 2$.

1) Pour $p = k = 2$, l'hypothèse s'écrit $z^1 f_1 - z^2 f_2 = 0$ et c'est essentiellement le premier lemme du paragraphe V.32 de [**L**] dont on résume la démonstration pour la commodité du lecteur. La fonction $\theta = f_1/z^2 = f_2/z^1$ s'étend de manière $\mathcal{C}^\infty$ dans U—c et $f_2 = z^1\theta$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur U; par continuité, pour tout $L = (l_2, \dots, l_m) \in \mathbb{N}^{m-1}$, il existe $R \in \mathbb{R}$ en sorte que l'on ait $\sup_U \left| \frac{\partial^{|L|}(z^1\theta)}{\partial^{l_2}(z^2) \dots \partial^{l_m}(z^m)} \right| < R|z^1|$. Les dérivées partielles en $z^2, \dots, z^p$ de θ sont donc toutes bornées au voisinage de 0; par changement linéaire de coordonnées sur (z^1, z^2), cela reste vrai pour toutes les dérivées partielles de θ qui est ainsi $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.

2) Soit alors $p \geqslant 2$ fixé et $k = 2$. La condition (1) pour les multi-indices I sous-ensembles de $\{2, \dots, p\}$ équivaut aux égalités $z^{I(\hat{1})} f_i - z^{I(\hat{\imath})} f_1 = z^{I(\widehat{(1, i)})}(z^i f_1 - z^1 f_i) = 0$ $(i = 2, \dots, p)$; par continuité, on a encore $(z^j f_1 - z^1 f_i) = 0$. En particulier

pour $i = p$, le 1) donne $f_1 = z^p g_1$; la fonction g_1 vérifie $z^{I(\widehat{(1, p)})}(z^p g_1) - z^{I(\widehat{(l, p)})} f_j = 0$ $(l = 2, \dots, p-1)$ et par récurrence $z^1 g_1 = z^2 \dots z^{p-1} \theta'_1$; en appliquant à nouveau le 1) on en tire $\theta'_1 = z^1 \theta_1$ d'où $g_1 = z^2 \dots z^{p-1} \theta_1$ et $f_1 = z^2 \dots z^p \theta_1$; par symétrie l'égalité (3) est vraie pour toutes les fonctions f_j et en remplaçant f_j dans (1), on obtient la formule (2).

β) On suppose le résultat vérifié pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{2, \dots, m\}$ avec $m < p$; on considère le cas $k = m+1$. En regroupant dans (1) les termes contenant un facteur z^1, on a

$$z^1 \Big(\sum_{j=2}^{m+1} (-1)^{j-1} (z^2 \dots \widehat{z^j} \dots z^{m+1} f_{I(\widehat{1_j})}) - z^2 (z^3 \dots z^{m+1} f_{I(\widehat{1})}) = 0 \, .$$

D'après le α), les fonctions

$$z^3 \dots z^{m+1} f_{I(\widehat{1})} \qquad \text{et} \qquad z^1 \sum_{j=2}^{m+1} (-1)^{j-1} z^2 \dots \widehat{z^j} \dots z^{m+1} f_{I(\widehat{1_j})}$$

sont respectivement multiples de z^1 et z^2.

Il en est alors de même pour $f_{I(\widehat{1})}$ et $\sum_{j=2}^{m+1} (-1)^{j-1} z^2 \dots \widehat{z^j} \dots z^{m+1} f_{I(\widehat{1_j})}$. On applique l'hypothèse de récurrence à $\sum_{j=2}^{m+1} (-1)^{j-1} z^2 \dots \widehat{z^j} \dots z^{m+1} f_{I(\widehat{1_j})}$ et l'on obtient des fonctions θ_j vérifiant $f_{I(\widehat{1_j})} = z^j \theta_j$. Enfin la formule $\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} z^1 \dots \widehat{z^j} \dots z^k f_{I(\widehat{1_j})} = 0$ donne $\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \theta_j = 0$ dans $U — \bigcup_{j=1}^{k} c_j$ et cette égalité reste vraie par continuité dans U tout entier.

(ii) On va montrer les équivalences entre (a) et (b).

α) Dans U, ψ se décompose de manière unique en $\psi = dz^1 \wedge \dots \wedge dz^p \wedge \phi + \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{|I|=k} dz^I \wedge \phi'_I$ où les ϕ, ϕ'_I sont des formes $\mathcal{C}^\infty$ dans U ne contenant pas de différentielles $dz^1, \dots, dz^p$; en particulier, on a $\phi'_I = \sum_J u_{I,J} dz^J$ avec J décrivant les sous-ensemble de I^c et $u_{I,J}$ appartenant à $\mathcal{A}^0(U)$ où $\phi'_\emptyset$ est de la forme $\sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} u_{\{\emptyset\}, J} dz^J$. Pour J fixé, l'égalité

$$d(z^1 \dots z^p) \wedge \psi = 0 = \sum_{i=1}^{p} z^1 \dots \widehat{z^j} \dots z^p dz^j \wedge \sum_{I,J} u_{I,J} dz^I \wedge dz^J$$

implique par homogénéité

$$\sum_{j=1}^{k} u_{I(\hat{j}),\,J} z^1 \ldots \widehat{z^j} \ldots z^p\, dz^j \wedge dz^{I(\hat{j})} = \phi'_{\{\emptyset\}} = 0$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} u_{I(\hat{j}),\,J} z^1 \ldots \widehat{z^j} \ldots z^p\, dz^I = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} u_{I(\hat{j}),\,J} z^1 \ldots \widehat{z^j} \ldots z^p$$

pour tout I de longueur $k > 1$. D'après le (i), on peut écrire $u_{I,J} = z^{I^c} v_{I,J}$ avec $v_{I,J} \in \mathcal{A}^0(U)$ vérifiant $\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} v_{I(\hat{j}),\,J} = 0$; en posant $\phi_I = \sum_J v_{I,J}\, dz^J$, on obtient les égalités (5) et (6) cherchées.

β) Inversement, supposons les formules (5) et (6) vérifiées. On a alors $d(z^1 \ldots z^p) \wedge \psi = \sum_{j=1}^{p} z^1 \ldots \widehat{z^j} \ldots z^p \wedge dz^j \wedge \sum_{k \geqslant 1} \sum_{|I|=k} z^{I^0} \phi_I\, dz^J$ et la condition (6) donne immédiatement la nullité du produit $d(z^1 \ldots z^p) \wedge \psi$. ■

Corollaire 2.2. *Soit φ une forme différentielle ayant une singularité à l'ordre 1 sur $\bigcup_{i=1}^{p} c_i$, d-fermée dans $Y' - \bigcup_{i=1}^{p} c_i$; il existe des formes différentielles $\varphi_I \in \mathcal{A}^\bullet(Y')$ dont les restrictions à $Y' - \bigcup_{i=1}^{p} c_i$ vérifient*

$$\varphi = \sum_{k=0}^{p} \sum_{|I|=k} (du_I/u_I) \wedge \varphi_I.$$

Démonstration. Il suffit de répéter celle du troisième lemme de V.32 de [**L**] en utilisant le lemme précédent. ■

Soit ψ une forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ et $F = (f_1, \ldots, f_p)$ un p-uple de fonctions méromorphes dans Y; on note c_i (resp. c_i') le diviseur $(f_i)^+$ (resp. $(f_i)^-$), C le p-uple $(c_1, \ldots, c_p)$ et on suppose que $dF = df_1 \wedge \ldots \wedge df_p$ ne s'annule pas dans $Y' - \bigcup_{i=1}^{p} c_i'$.

Proposition 2.3. *Si pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ les formes différentielles ψ et ψ/f_i sont d-fermées là où elles sont définies, il existe $\phi \in \mathcal{A}^\bullet(Y')$ identiquement nulle sur $\bigcup_{i=1}^{p} c_i'$ et vérifiant*

(1) $$\psi/F = (dF/F) \wedge \phi$$

la restriction de ϕ *à* $c - \left(c \cap \bigcup_{i=1}^{p} c_i'\right)$ *se prolonge par* 0 *à* c *tout entier et appartient à la classe de d-cohomologie* $\operatorname{r\dot{e}s}_C(\psi/F)$.

Démonstration. Par une partition de l'unité on se ramène comme précédemment au cas où $Y = U$ est un polydisque de $\mathbb{C}^n$ et l'on peut écrire $f_i = v_i/u_i$ avec $v_i = 0$ (resp. $u_i = 0$) étant des équations minimales de c_i (resp. c_i') pour $i \in \{1, \ldots, p\}$. On note $U' = U - \bigcup_{i=1}^{p} c_p'$ et $\psi' = \psi_{|U'}$.

(i) On considère d'abord le cas $p = 1$ en omettant l'écriture de l'indice 1. Dans U', l'hypersurface c a pour équation $f = 0$ et l'hypothèse implique $d(f\psi') = df \wedge \psi' = 0$. Il existe alors $\phi \in \mathcal{A}^\bullet(U')$, d-fermée vérifiant

$$\psi' = df \wedge \phi \; ; \tag{2}$$

la forme ϕ s'écrit de manière unique

$$\phi = du \wedge dv \wedge \phi_1' + du \wedge \phi_2' + dv \wedge \phi_3' + \phi_4' \tag{3}$$

où les ϕ_i' ne contiennent pas les différentielles du et dv; en remplaçant f par le quotient v/u, on obtient $\psi' = (-du \wedge dv/u^2) \wedge (u\phi_2' + v\phi_3') + (udv - vdu/u^2) \wedge \phi_4'$.

Puisque ψ' est la restriction à U' de ψ définie dans U tout entier, les formes différentielles $-du \wedge dv \wedge (u\phi_2' + v\phi_3')/u^2$ et $(udv - vdu) \wedge \phi_4'/u^2$ se prolongent de manière $\mathcal{C}^\infty$ dans U (car ϕ_4' ne contient ni du ni dv). D'après le lemme 2.1, il existe alors $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^\bullet(U)$ vérifiant $-du \wedge dv \wedge (u^2 \alpha_{|U'}) = -du \wedge dv \wedge (\phi_2' + \phi_3')$ et $(udv - vdu) \wedge (u^2 \beta_{|U'}) = (udv - vdu) \wedge \phi_4'$. On en tire $u^2 \psi' = u^2(-du \wedge dv \wedge \alpha_{|U'} + (udv - vdu) \wedge \beta_{|U'})$; puisque toutes ces formes sont bien définies dans U, on obtient par continuité $\psi = (-du \wedge dv \wedge \alpha + (udv - vdu) \wedge \beta)$.

Dans U', l'égalité $u\,du \wedge dv = -(u\,dv - v\,du) \wedge du = -u^2 df \wedge du$ donne alors $\psi_{|U'} = \psi' = df \wedge u(du \wedge \alpha_{|U'} + u\beta_{|U'})$ et l'on peut choisir $\phi = u(du \wedge \alpha + u\beta)$ qui s'annule bien sur c.

(ii) Cas général: récurrence sur p.

On suppose le lemme vérifié pour $k = p - 1$; par construction du résidu (et l'algorithme de division G.L.S.), on a $\operatorname{r\dot{e}s}_{C'}(\psi/F) = \operatorname{r\dot{e}s}_{c_1'}((1/f_1)\operatorname{r\dot{e}s}_{D'}(\psi/F'))$ où $F' = (f_2, \ldots, f_p)$ et $D' = (F')^+ = (c_2, \ldots, c_p)$. L'hypothèse de récurrence donne l'existence de $\phi_2 \in \mathcal{A}^\bullet(U)$ s'annulant sur $\bigcap_{i=2}^{p} c_i'$, vérifiant $\psi/F' = (dF'/F') \wedge \phi_2$ avec $\phi_2' = \phi_{2|\cap D'} \in \operatorname{r\dot{e}s}_{D'}(\psi/F')$. La forme ϕ_2' est d-fermée ainsi que ϕ_2'/f_1; on peut donc lui appliquer le (i), ce qui termine la démonstration de la proposition. ■

3 - Continuité de certains courants-résidus

Dans ce paragraphe on montre un lemme de continuité concernant les courants-résidus d-fermés. Il permet en particulier de ramener certaines situations au cas où tous les cycles de la famille C' sont sans multiplicités.

Pour tout ouvert $W \subset \mathbb{C}^n$, on munit $\mathcal{O}(W)$ de la topologie habituelle de convergence uniforme sur les compacts ainsi que de leurs dérivées; la topologie de $\mathcal{O}(\overline{W})$ étant celle de la limite inductive sur les ouverts contenant $\overline{W}$. Une famille de fonctions holomorphes v_s au voisinage de W dépendant d'un paramètre $s \in P \subset \mathbb{C}$ est dite continue (par rapport à ce paramètre) si l'application qui à s associe v_s est continue relativement à cette topologie; de même, si P est un ouvert de $\mathbb{C}^p$, $S = (s_1, \dots, s_p) \in P \subset \mathbb{C}^p$ un p-uple d'indices et $V_S = (v_{1,s_1}, \dots, v_{p,s_p})$ un p-uple de familles de fonctions de $\mathcal{O}(W)$, chacune des fonctions v_{i,s_i} dépendant d'un paramètre s_i, on munit $\mathcal{O}(W)^p$ de la topologie-produit; la famille V_S est dite continue en S, si l'application qui à S associe V_S est continue pour cette topologie.

Soit $\Delta' = (\delta'_1, \dots, \delta'_p) \in (\mathbb{R}_>)^p$ et X un sous-ensemble analytique de W défini par des équations $f_1 = \dots = f_p = 0$; on note $T_F(\Delta')$ le «tube» autour de X défini par $T_F(\Delta') = \{z \in W;\ |f_1(z)| = \delta'_1, \dots, |f_p(z)| = \delta'_p\}$ qui est un ensemble semi-analytique de W. L'orientation de ces tubes est induite par l'image inverse de Δ' par $|f| = (|f_1|, \dots, |f_p|)$ (cf. **[C-H]** paragraphe 1.5).

Soit P un polydisque de $\mathbb{C}^p$ centré en 0 et $V_S = (v_{1,s_1}, \dots, v_{p,s_p}) \in \mathcal{O}(W)^p$, une famille de p-uples de fonctions holomorphes définies dans un même voisinage W de 0. On pose

$$c_{i,s_i} = (v_{i,s_i})^+, \quad C_S = (c_{1,s_1}, \dots, c_{p,s_p}), \quad c_i = c_{i,0}, \quad c_S = \bigcap_{i=1}^{p} c_{i,s_i},$$

$$C = C_0 = (c_{1,0}, \dots, c_{p,0}) \text{ et } c = c_0.$$

Soit ψ une forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ de degré $(2n-k)$ à support compact dans W, ou encore sans condition de support si celui de c est compact; on suppose que la famille V_S dépend continûment du paramètre $S \in P$ et qu'il existe un voisinage U de $|c|$ dans W tel que pour tout $S \in P$, $\psi/V_S = \psi/(v_1 \dots v_p)$ est d-fermée dans $U - \bigcup_{i=1}^{p} |c_{i,s_i}|$. Sous ces hypothèses, on obtient

Lemme 3.1. *Pour toute fonction $\varrho \in \mathcal{A}^0(W)$ identiquement égale à* 1 *dans un voisinage du support de* c, *on a*:

$$(*) \qquad \lim_{S \to 0} \langle \mathrm{Res}_{V_S}(\psi/V_S), \varrho \rangle = \langle \mathrm{Res}_V(\psi/V), \varrho \rangle.$$

Remarque 1. *La forme différentielle* ψ *étant de degré* $2n-k$, *les courants* $\operatorname{Res}_{V_S}(\psi/V_S)$ *sont en fait des distributions dans W. Leurs supports étant contenus dans le support de* ψ, *ces courants sont à supports compacts dans W et même dans U d'après la propriété* (ii) *des résidus; pour tout* $S \in P$, *les termes* $\langle \operatorname{Res}_{V_S}(\psi/V_S), \varrho \rangle$ *ont donc bien un sens.*

Démonstration. Elle résulte essentiellement du théorème de Stokes pour les ensembles semi-analytiques et de la construction des tubes autour de c.

Les courants-résidus $\operatorname{Res}_{V_S}(\psi/V_S)$ ayant leurs supports contenus dans $|c|$ et dans celui de ψ, on peut supposer, quitte à le restreindre, que U est un ouvert relativement compact de W. Soit $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$ un p-uple de trajectoires admissibles défini sur P.

1) Homologie des tubes (pour Δ assez petit).

On fixe $\Delta^0 = (\delta_1^0, \ldots, \delta_p^0) \in (\mathbb{R}_>)^p$, en sorte que l'adhérence $\overline{U}_{2\Delta^0}(c)$ du voisinage «tubulaire» $U_{2\Delta^0}(c) = \{z \in W;\ |v_i(z)| \leq 2\delta_i^0,\ i = 1, \ldots, p\}$ de c soit contenu dans U; il est clair que l'on peut choisir une trajectoire admissible Δ vérifiant pour tout $t \neq 0$, $\prod_{j=1}^{p} \delta_j(t) \neq 0$. En outre la famille V_S étant continue en S, on peut supposer, en restreignant éventuellement P, que l'on a

$$\sup_{z \in \overline{U}} \sup_j |v_{j,s_j}(z) - v_j(z)| < \inf_j \delta_j^0/2 . \tag{1}$$

Par continuité des trajectoires admissibles, il existe $t' \in \mathbb{R}_>$ dépendant de S en sorte que pour tout $t \in]0, t']$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$, on ait

$$0 < \delta_j(t) < \delta_j^0/2 . \tag{1'}$$

Pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on pose

$$D_{S,t,\lambda} = \bigcap_{j=1}^{p} \{x \in W;\ |(1-\lambda)\, v_j(x) + \lambda v_{j,s_j}(x)| = (1-\lambda)\, \delta_j^0 + \lambda \delta_j(t),$$

et

$$D_{S,t} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} D_{S,t,\lambda}. \tag{2}$$

Soit $x \in D_{S,t}$; on a

a) $|v_j(x)| - (1-\lambda)|v_j(x) - v_{j,s_j}(x)| \leq |(1-\lambda)\, v_j(x) + \lambda v_{j,s_j}(x)| = (1-\lambda)\, \delta_j^0 + \lambda \delta_j(t)$ et d'après (1) et (1'), on obtient $|v_j(x)| < (1-\lambda)\, \delta_j^0 + \delta_j^0 \leq 2\delta_j^0$ d'où

$D_{S,t} \subset \overline{U}_{2\varDelta^0(c)}$ (en particulier $D_{S,t}$ est un compact de U car fermé dans $\overline{U}_{2\varDelta^0(c)}$).

b) Soit $z \in c_{j,s_j}$ (i.e. $v_{j,s_j}(z) = 0$); l'inégalité (1) donne pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $|(1-\lambda)\, v_j(z) + \lambda v_{j,s_j}(z)| = |(1-\lambda)\, v_j(z)| < (1-\lambda)\delta_j^0 + \delta_j(t)$, d'où $z \notin D_{S,t}$; on a donc pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$

$$c_{j,s_j} \cap D_{S,t} = \emptyset\,. \tag{3'}$$

c) Le bord orienté $\partial D_{S,t}$ de $D_{S,t}$ vérifie $\pm \partial D_{S,t} = T_{V_S}(\varDelta(t)) - T_V(\varDelta^0)$ (voir également [**C-H**] formule (2) de 1.4.2) ; pour tout $t \in [0, t']$, les tubes $T_{V_S}(\varDelta(t))$ et $T_V(\varDelta^0)$ sont donc homologues pour l'homologie à supports compacts de U.

2) Soit ψ à support compact. En restreignant éventuellement P, on peut supposer $\varrho = 1$ dans P tout entier. D'après (3′) pour $S \in P$ fixé on a $D_{S,t} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p} c_{i,s_i}\right) = \emptyset$ et la forme ψ/V_S n'a pas de singularités dans $D_{S,t}$; pour tout t dans l'intervalle $[0, t']$, ψ/V_S est d-fermée dans $D_{S,t}$ et le théorème de Stokes donne $\int_{T_{V_S}(\varDelta(t))} \psi/V_S = \int_{T_V(\varDelta)} \psi/V_S$; on en tire

$$\langle \mathrm{Res}_{V_S}(\psi/V_S),\, 1\rangle = \lim_{t\to 0} \int_{T_{V_S}(\varDelta(t))} \psi/V_S = \int_{T_V(\varDelta)} \psi/V_S \tag{4}$$

d'où

$$\lim_{S\to 0} \langle \mathrm{Res}\, V_S(\psi/V_S),\, 1\rangle = \lim_{S\to 0} \int_{T_V(\varDelta)} \psi/V_S. \tag{5}$$

Par construction aucune des fonctions v_i ne s'annule sur le tube $T_V(\varDelta)$, d'où $M = \inf_{T_{V(\varDelta)}} \inf_i |v_i| > 0$; il existe alors $S^0 = (s_1^0, \dots, s_p^0) > 0$ tel que pour tout $S = (s_1, \dots, s_p) \in (\mathbb{R}_>)^p$ vérifiant $S < S^0$, on ait $\sup_{T_{V(\varDelta)}} \sup_i |(v_{i,s_i} - v_i)| < M/2$; les fonctions $v_i - M/2$ ne s'annulant pas sur $T_{V(\varDelta)}$, leurs inverses sont intégrables sur ce tube (compact) et majorent $|1/v_{i,s_i}|$ pour tout réel $s_i \in]0, s_i^0[$. Le théorème de convergence de Lebesgue et les égalités (4) et (5) donnent

$$\lim_{S\to 0} \langle \mathrm{Res}_{V_S}(\psi/V_S),\, 1\rangle = \lim_{S\to 0} \int_{T_V(\varDelta)} \psi/V_S = \int_{T_V(\varDelta)} \psi/V = \langle \mathrm{Res}_V(\psi/V),\, 1\rangle.$$

3) Si $|c|$ est compact et ψ est à support quelconque, en la multipliant par une fonction à support compact dans W identiquement égale à 1 dans U, on est ramené au cas précédent. ■

Remarque 2. *Soit* $S_k \in P \subset \mathbb{C}^p$ *une suite de points de* $\mathbb{C}^p$ *convergents vers* 0 *en sorte que les formes (à support compact)* ψ/V_{S_k} *soient d-fermées en dehors de la réunion* $\bigcup_{i=1}^{p} |(V_{S_k})^+|$; *la démonstration montre que sous les hypothèses du lemme, on a encore*

$$\lim_{k\to\infty} \langle \mathrm{Res}_{V_{S_k}}(\psi/V_{S_k}),\ \varrho\rangle = \langle \mathrm{Res}_V(\psi/V),\ \varrho\rangle .$$

4 - Formule de transformation.

Notations. Soit Y une variété analytique complexe de dimension n. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $l \in \{0, \dots, k\}$, $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^k) \in \mathbb{N}^k$ et $h = (h_1, \dots, h_k)$ un k-uple de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, on note $h^\alpha = ((h_1)^{\alpha^1}, \dots, (h_k)^{\alpha^k})$, $dh = dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k$, $\mathbf{1}_l = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^l$, $dh_{\mathbf{1}_l} = dh_1 \wedge \dots \wedge dh_l$, $dh_{\hat{\mathbf{1}}_l} = dh_{l+1} \wedge \dots \wedge dh_k$ (pour $l = 0$ on pose $dh_{\mathbf{1}_l} = 1$ et $dh_{\hat{\mathbf{1}}_l} = dh$). Ces notations s'étendent de manière évidente lorsque l'index des p-uples de fonctions est noté en exposant.

Soit $(z^1, \dots, z^n)$ un système de coordonnées de $\mathbb{C}^n$, on note π'_k la projection de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}^{n-k}$ définie par $\pi'_k(z) = (z^{k+1}, \dots, z^n)$; si $k = n$, on omet l'indice dans $\mathbf{1}_k$ et $\hat{\mathbf{1}}_k$.

Pour tout ouvert $U \subset Y$, on note $\mathrm{Mat}_{p\times p}(U)$ l'ensemble des (p, p)-matrices carrées de fonctions holomorphes sur U. Pour toute matrice $m = (m_j^i)_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le p}} \in \mathrm{Mat}_{p\times p}(U)$, on note m^+ (resp. m_+) le vecteur ligne (resp. le vecteur colonne) $m^+ = \sum_{i=1}^{p} (m_1^i, \dots, m_p^i)$ (resp. ${}^t m_+ = \sum_{j=1}^{p} (m_j^1, \dots, m_j^p)$ où ${}^t m_+$ dénote la transposée de m_+). Soit $F = (f_1, \dots, f_p)$, $G = (g_1, \dots, g_p)$ deux p-uples de fonctions méromorphes sur U. S'il existe une matrice $N = (n_j^i) \in \mathrm{Mat}_{p\times p}(U)$ telle que $G = NF$ (i.e. $g_i = \sum_{j=1}^{p} n_j^i f_j$), on pose $\det_F(G) = \det(N)$.

On rappelle que si X est un sous-espace de Y, on note $\{X\}$ le courant d'intégration qui lui est associé par: $\mathcal{Q}_c^\bullet(U) \ni \phi \mapsto \int_X \phi$.

Lemme 4.1. *Soit* $(z^1, \dots, z^n)$ *un système de coordonnées d'un polydisque* U *de* $\mathbb{C}^n$, $Z_p = (L_1, \dots, L_p)$ *la famille d'hyperplans d'équation respective* $z^i = 0$ $(i = 1, \dots, p)$, $\alpha \in \mathbb{N}^p$ *un p-uple d'entiers. On a l'égalité en tant qu'opérateurs sur* $\mathcal{Q}_c^0(U)$

$$\mathrm{Res}_{Z_p}(dz \wedge d\bar{z}^{\hat{\mathbf{1}}_p}/z^{\alpha+\mathbf{1}_p}) = \frac{(2i\pi)^p}{\alpha!}\ \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha}\, dz^{\hat{\mathbf{1}}_p} \wedge d\bar{z}^{\hat{\mathbf{1}}_p} \wedge \{\cap Z_p\}$$

(*i.e. pour tout* $\varrho \in \mathcal{A}^0_c(U)$,

$$\langle \mathrm{Res}_{Z_p}(dz \wedge d\bar{z}^{\hat{\mathbf{1}}_p}/z^{\alpha+\mathbf{1}_p}), \varrho\rangle = \frac{(2i\pi)^p}{\alpha!}\int_{\cap Z_p} \frac{\partial^{|\alpha|}\varrho}{\partial z^\alpha}\, dz^{\hat{\mathbf{1}}_p} \wedge d\bar{z}^{\hat{\mathbf{1}}_p}).$$

Démonstration. Pour abréger on notera $z' = z^{\mathbf{1}_p} = (z^1, \ldots, z^p)$, $z'' = z^{\hat{\mathbf{1}}_p} = (z^{p+1}, \ldots, z^n)$. Soit $\psi = \sum_{I, J \subset \{1, \ldots, n\}} \psi_{I,J}\, dz^I \wedge d\bar{z}^J$ une forme différentielle et $T_\varepsilon = \{z \in U;\ |z^1| = \varepsilon_1, \ldots, |z^1| = \varepsilon_p\}$.

On a $\langle \mathrm{Res}_{Z_p}(\psi/(z^1)^{c_1}), \varrho\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{T_\varepsilon} \psi \wedge \varrho$ d'où $\mathrm{Res}_{Z_p}(\psi/(z^1)^{c_1}) = 0$ sauf si $I = \{1, \ldots, n\}$ et $J = \{p+1, \ldots, n\}$.

Soit $a_1 \in \mathbb{Z}$, $b_1 \in \mathbb{N}$; en posant $z^1 = \varepsilon_1 e^{i\theta^1}$, la formule de Cauchy donne

$$\int_{|z^1| = \varepsilon_1} (z^1)^{a_1}(\bar{z}^1)^{b_1}\, dz^1 = \varepsilon_1^{a_1+b_1+1}\int_0^{2i\pi} ie^{a_1-b_1+1}\, d\theta^1 = 2i\pi\varepsilon_1^{b_1} \qquad \text{si } a_1 - b_1 + 1 = 0$$

$$= 0 \qquad \text{sinon}$$

d'où pour tout $c_1, d_1 \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\langle \mathrm{Res}_{z^1}((1/z^1)^{c_1}\, dz^1), (z^1)^{d_1}(\bar{z}^1)^{b_1}\rangle = 2i\pi \qquad \text{pour } c_1 + d_1 + 1 = b_1 = 0$$

$$= 0 \qquad \text{sinon}.$$

En développant ϱ à l'ordre $k = |\alpha|$ au voisinage de $z' = 0$, on peut écrire $\varrho(z) = \sum_{|\beta| \leqslant k} \varrho_\beta(0, z'')\, z^\beta + |z'|^{k+1} O(1)$. Par continuité des applications $\varrho_\beta : z'' \mapsto \varrho_\beta(0, z'')$, on a $\lim_{\varepsilon \to 0}\int_{T_\varepsilon} |z|^{k+1} O(1)\, dz \wedge d\bar{z}''/z^\alpha = 0$, d'où

$$\langle \mathrm{Res}_{Z_p}(dz \wedge d\bar{z}''/z^{\alpha+\mathbf{1}_p}), \varrho\rangle = \sum_{\beta \leqslant |\alpha|} \langle \mathrm{Res}_{Z_p}(dz \wedge d\bar{z}''/z^{\alpha+\mathbf{1}_p}), \varrho_\beta\rangle$$

$$= \langle \mathrm{Res}_{Z_p}(dz \wedge d\bar{z}''/z^{\alpha+\mathbf{1}_p}), \varrho_\alpha\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0}((2i\pi)^p/\alpha!)\int_{T_\varepsilon}(\partial^k \varrho_\alpha/\partial z^\alpha)\, dz \wedge d\bar{z}''$$

$$= ((2i\pi)^p/\alpha!)\int_{\cap Z_p}(\partial^k \varrho_\alpha/\partial z^\alpha)\, dz'' \wedge d\bar{z}''.$$

Finalement, on obtient

$$\langle \mathrm{Res}_{Z_p}(dz \wedge d\bar{z}''/z^{\alpha+\mathbf{1}_p}, \varrho\rangle = ((2i\pi)^p/\alpha!) \int_{\cap Z_p} (\partial^k \varrho/\partial z^\alpha)\, dz'' \wedge d\bar{z}''. \qquad \blacksquare$$

Soit $F = (f_1, \dots, f_p)$, $G = (g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{O}(Y)^p$ et $M = (m_j^i) \in \mathrm{Mat}_{p \times p}(Y)$ telles que $F = MG$ (i.e. $f_i = \sum_{j=1}^{p} m_j^i g_j$)) et $\psi \in \mathcal{A}^\bullet(Y)$ une forme différentielle d-fermée dans Y.

Proposition 4.2. *Si la famille de diviseurs* $(F)^+$ *est en position générale et* M *est inversible, on a*:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{r\dot{e}s}_G(\psi/G^{\alpha+\mathbf{1}_p}) = \sum_{\substack{b^+ = \alpha \\ \gamma \leq b_+}} \left(\prod_{i,j=1}^{p} (m_j^i)^{b_j^i}/b_j^i! \right) \left(\frac{\partial^{|b_+ - \gamma|} \det M}{\partial G^{b_+ - \gamma}} \right)_{|H_p} \mathrm{r\dot{e}s}_F(\psi/F^{\gamma+\mathbf{1}_p})$$

où $\left(\dfrac{\partial^{|I|}}{\partial G^I} \right)_{|H_P}$ *dénote les dérivées des formes différentielles au sens de Leray. De manière plus condensée, l'égalité* (1) *s'écrit*:

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{r\dot{e}s}_G(\psi/G^{\alpha+\mathbf{1}_p}) = \sum_{b^+ = \alpha} b_+! \left[\prod_{i,j=1}^{p} (m_j^i)^{b_j^i}/b_j^i! \right] \mathrm{r\dot{e}s}_F((\det M)\, \psi/F^{b_+ + \mathbf{1}_p}).$$

Démonstration. Par localisation, on peut supposer que Y est un polydisque U de $\mathbb{C}^n$ centré en 0. Le lemme résulte de la formule de Leibniz à plusieurs variables, qu'on obtient par changement de variables dans les séries entières.

1. Soient $(x^1, \dots, x^n)$ et $(z^1, \dots, z^n)$ deux systèmes de coordonnées dans U avec $x = N \cdot z$ où $N \in \mathrm{Mat}_{p \times p}(U)$. On a alors:

$$(z^i)^{\gamma^i} = \left(\sum_{j=1}^{p} n_j^i x^j \right)^{\gamma^i} = \sum_{|b^i| = \gamma^i} (|b^i|!/b^i!) \prod_{j=1}^{p} (n_j^i x^j)^{b_j^i}$$

où $b_j^i \in \{0, \dots, \gamma^i\}$ et $b^i = (b_1^i, \dots, b_p^i) \in \mathbb{N}^p$; on notera b la matrice de coefficients (b_l^i). Pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(U)$ telle que $f(x) = \sum_\alpha A_\alpha x^\alpha = f(z) = \sum_\beta B_\beta z^\beta$, on peut écrire:

$$\sum_\alpha A_\alpha x^\alpha = \sum_\beta B_\beta z^\beta = \sum_\beta B_\beta (Nx)^\beta = \sum_\beta B_\beta \prod_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^p n_j^i x^j\right)^{\beta^i} = \sum_\beta B_\beta \prod_{i=1}^p \sum_{|b^i| = \beta^i} (\beta^i!/b^i!) \left[\prod_{j=1}^p (n_j^i x^j)^{b_j^i}\right]$$

$$= \sum_\beta B_\beta \sum_{|b^i| = \beta^i} (\beta!/b!) \prod_{i,j=1}^p (n_j^i x^j)^{b_j^i} = \sum_\beta B_\beta \sum_{|b^i| = \beta^i} (\beta!/b!) \prod_{j=1}^p \left[\prod_{i=1}^p (n_j^i)^{b_j^i}\right] (x^j)^{b_j^1 + \dots + b_j^p},$$

en notant $\beta! = \prod_{i=1}^p (\beta^i!)$ et $b! = \prod_{i,j=1}^p (b_j^i!)$.

L'unicité du développement analytique donne alors

$$A_\alpha = \sum_{b^+ = \alpha} b_+! \left[\prod_{i,j=1}^p (n_j^i)^{b_j^i} / b_j^i!\right] B_{b_+}. \tag{1}$$

2. La matrice M étant inversible, on peut alors, quitte à restreindre éventuellement U, choisir $F = (x^1, \dots, x^p)$ et $G = (z^1, \dots, z^p)$ et $x^i = z^i$ pour tout $i > p$. La variété H_p étant analytique (i.e. détermine un courant d'intégration de bicodimension (p, p)) on peut supposer que ψ est de type $(n, n-p)$ et s'écrit $\psi = \tilde{h}\, dx \wedge d\bar{x}^{\hat{1}_p} = \tilde{h}'\, dz \wedge d\bar{z}^{\hat{1}_p}$ où $\tilde{h}$ et $\tilde{h}'$ sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans U. D'après les égalités

$$\tilde{h}\, dx \wedge d\bar{x}^{\hat{1}_p} = \tilde{h}\, dx^{1_p} \wedge dx^{\hat{1}_p} \wedge d\bar{x}^{\hat{1}_p} = (\det M)\, \tilde{h}\, dz^{1_p} \wedge dx^{\hat{1}_p} \wedge d\bar{x}^{\hat{1}_p}$$

$$= (\det M)\, \tilde{h}\, dz^{1_p} \wedge dz^{\hat{1}_p} \wedge d\bar{z}^{\hat{1}_p},$$

on peut choisir $\tilde{h}' = (\det M)\, \tilde{h}$.

Soit h (resp. h') la partie holomorphe de $\tilde{h}$ (resp. $\tilde{h}'$); $\det M$ étant holomorphe, on aura encore $h' = (\det M)\, h$. En développant h' en série entière on obtient:

$$h'(x) = (\det M)\, h(x) = \sum_\alpha A_\alpha x^\alpha \qquad \text{et} \qquad h'(z) = \sum_\beta B_\beta z^\beta, (A_\alpha, B_\beta \in \mathcal{A}^0(\pi'_p(U)) \text{ d'où}$$

$$\mathrm{r\dot{e}s}_G(\psi/z^{\alpha + 1_p}) = \mathrm{r\dot{e}s}_G\left(\frac{h'\, dz^{1_p}}{z^{\alpha + 1_p}} \wedge dz^{\hat{1}_p} \wedge d\bar{z}^{\hat{1}_p}\right)$$

$$= (2i\pi)^p \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} h'}{\partial z^\alpha} dz^{\hat{1}_p} \wedge d\bar{z}^{\hat{1}_p}\right)_{|H_p} = (2i\pi)^p (A_\alpha\, dz^{\hat{1}_p} \wedge d\bar{z}^{\hat{1}_p})_{|H_p} \tag{2}$$

$$= (2i\pi)^p (A_\alpha\, dx^{\hat{1}_p} \wedge d\bar{x}^{\hat{1}_p})_{|H_p} \quad \text{(puisque } x^i = z^i \text{ pour } i > p)$$

et d'autre part

(3)
$$\begin{aligned}&\dot{\mathrm{r}}\mathrm{\dot{e}s}_F((\det M)\,\psi/x^{\beta+\mathbf{1}_p})\\ &=\dot{\mathrm{r}}\mathrm{\dot{e}s}_F\left(\frac{(\det M)\,h\,dx^{\mathbf{1}_p}}{x^{\beta+\mathbf{1}_p}}\wedge dx^{\hat{\mathbf{1}}_p}\wedge d\overline{x}^{\hat{\mathbf{1}}_p}\right)=(2i\pi)^p(B_\beta\,dx^{\hat{\mathbf{1}}_p}\wedge d\overline{x}^{\hat{\mathbf{1}}_p})_{|H_p}\end{aligned}$$

D'après l'égalité (1) on obtient:

(4)
$$\dot{\mathrm{r}}\mathrm{\dot{e}s}_G(\psi/G^{\alpha+\mathbf{1}_p})=\sum_{b^+=\alpha}b_+!\left[\prod_{i,j=1}^{p}(m_j^i)^{b_j^i}/b_j^i!\right]\dot{\mathrm{r}}\mathrm{\dot{e}s}_F((\det M)\,\psi/F^{b_++\mathbf{1}_p})$$

c'est-à-dire la seconde formule de la proposition.

D'après le lemme 4.1 appliquée aux classes-résidus de Leray, la formule (3) s'écrit encore:

$$\dot{\mathrm{r}}\mathrm{\dot{e}s}_F((\det M)\,\psi/x^{\beta+\mathbf{1}_p})=(2i\pi)^p\,\frac{1}{\beta!}\left(\frac{\partial^{|\beta|}((\det M)\,h)}{\partial x^\beta}\,dx^{\hat{\mathbf{1}}_p}\wedge d\overline{x}^{\hat{\mathbf{1}}_p}\right)_{|H_p}$$

$$=(2i\pi)^p\,\frac{1}{\beta!}\sum_{\gamma\leqslant\beta}\left(\frac{\partial^{|\beta-\gamma|}\det M}{\partial x^{\beta-\gamma}}\;\frac{\partial^{|\gamma|}h}{\partial x^\gamma}\,dx^{\hat{\mathbf{1}}_p}\wedge d\overline{x}^{\hat{\mathbf{1}}_p}\right)_{|H_p}=(2i\pi)^p(B_\beta\,dx^{\hat{\mathbf{1}}_p}\wedge d\overline{x}^{\hat{\mathbf{1}}_p})_{|H_p}.$$

D'après le caractère global des dérivées partielles de formes différentielles de Leray (cf. [**L**]), la formule (4) se globalise et donne:

$$\dot{\mathrm{r}}\mathrm{\dot{e}s}_G(\psi/G^{\alpha+\mathbf{1}_p})=\sum_{\substack{b^+=\alpha\\0\leqslant\gamma\leqslant b_+}}\left(\prod_{i,j=1}^{p}(m_j^i)^{b_j^i}/b_j^i!\right)\left(\frac{\partial^{|b_+-\gamma|}\det M}{\partial F^{b_+-\gamma}}\right)_{|H_p}\dot{\mathrm{r}}\mathrm{\dot{e}s}_F(\psi/F^{\gamma+\mathbf{1}_p}).\qquad\blacksquare$$

Théorème 4.3. *Soit ψ une forme $\mathcal{C}^\infty$ et $(F)^+$ famille intersection complète dans Y. On a la relation*

(1)
$$\mathrm{Res}_G(\psi/G^{\alpha+\mathbf{1}_p})=(\det M)\sum_{b^+=\alpha}\left(b_+!\prod_{i,j=1}^{p}\frac{(m_j^i)^{b_j^i}}{b_j^i!}\right)\mathrm{Res}_F(\psi/F^{b_++\mathbf{1}_p})$$

l'égalité étant prise au sens des courants.

Démonstration. Par localisation, on se ramène encore au cas où Y est un polydisque U de $\mathbb{C}^n$. D'après la propriété de $\mathcal{A}^\bullet(Y)$-linéarité (ou anti-linéarité) du résidu, on peut supposer que ψ est de degré $2n-p$ et même, l'opérateur résidu étant de type $(n,n-p)$, que tel est le type de ψ, autrement dit $\mathrm{Res}_F(\psi/F^{\alpha+\mathbf{1}_p})$ est en fait une distribution (i.e. un courant s'appliquant à des fonctions).

1. Soit ψ d-fermée dans Y et à support compact. Tout d'abord supposons M inversible. Si $(F)^+$ est en position générale, d'après le lemme 4.1, la formule (2) de la proposition 4.2 passe aux courants-résidus et le théorème résulte alors par $\mathcal{O}$-linéarité (ou anti-linéarité) des courants-résidus. Si $\cap(F)^+$ est une sous-variété lisse (de codimension p), on se ramène, en multipliant la famille F par une matrice convenable, au cas précédent (cf. [**C-G-G**] par exemple).

Lorsque la famille $\cap(F)^+$ est sans multiplicités, soit S l'ensemble de singularité de $\cap H_p$, $U' = U$—S. Dans U', la formule (1) est vérifiée; d'après la propriété vi) des résidus (th. 1.7.6 de [**C-H**]), le courant-résidu n'a pas de «masse» concentrée en une hypersurface de son support; le support de $\mathrm{Res}_F(\psi/F^{\alpha+\mathbf{1}_p})$ est une réunion de composantes irréductibles de $\cap H_p$ car $(F)^+$ est une famille intersection complète H_p (propriété ii) des résidus) et S étant de codimension au moins égale à 1 dans $\cap H_p$, l'égalité (1) est encore vraie.

Enfin, si $\cap(F)^+$ est un cycle quelconque et det M s'annulant éventuellement dans U, on considère une famille F_s de fonctions holomorphes en sorte que chaque $(F_s)^+$ soit sans multiplicités et la suite $(F_s)^+$ converge vers $(F)^+$ (l'existence d'une telle famille résulte par exemple du théorème de Bertini). Soit M_t une famille de matrices holomorphes qui convergent vers M en sorte que det $M_t \neq 0$; on pose $F_{s,t} = M_t F_s$. L'égalité étant vérifiée pour tout couple $(F_{s,t}, G)$ avec $st \neq 0$, d'après le lemme de continuité 3.4 (pour les formes d-fermées à support compact), on a l'égalité:

$$(1)\quad \langle \mathrm{Res}_G(\psi/G^{\alpha+\mathbf{1}_p}), 1\rangle = (\det M) \sum_{b^+=\alpha} \left(b_+!\prod_{i,j=1}^{p} \frac{(m_j^i)^{b_j^i}}{b_j^i!} \right) \langle \mathrm{Res}_F(\psi/F^{b_++\mathbf{1}_p}), 1\rangle$$

où 1 est une fonction identiquement égale à 1 au voisinage du support de $\cap(F)^+$.

2. Cas général: $\psi \in \mathcal{A}^\bullet(U)$. Soit $(y^1, \ldots, y^n)$ des coordonnées holomorphes dans U, ϱ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans U; on pose $\psi' = \varrho\psi$. En renumérotant éventuellement le système de coordonnées, on peut écrire: $\psi' = hdy \wedge d\overline{y}^{\hat{\mathbf{1}}_p}$ où h est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dans U. Soit $\tilde{h}_k$ le développement limité à l'ordre k de h et h_k sa partie holomorphe; on note $\psi_k = h_k \wedge dy \wedge d\overline{y}^{\hat{\mathbf{1}}_p}$. Il existe alors $q' \in \mathbb{N}$ assez grand (dépendant de F, G, ψ, α et ϱ) tel que pour tout $q > q'$, les égalités

$$(2)\qquad \langle \mathrm{Res}_G(\psi/G^{\alpha+\mathbf{1}_p}), \varrho\rangle = \langle \mathrm{Res}_G(\psi'/G^{\alpha+\mathbf{1}_p}), 1\rangle = \langle \mathrm{Res}_G(\psi_q/G^{\alpha+\mathbf{1}_p}), 1\rangle$$

et

$$(3)\qquad \langle \mathrm{Res}_F(\psi/F^{\beta+\mathbf{1}_p}), \varrho\rangle = \langle \mathrm{Res}_F(\psi_q/F^{\beta+\mathbf{1}_p}), 1\rangle$$

soient vraies pour tout $|\beta| \leqslant |\alpha|$ (para. 3.5.4 et 4.2.6 de [**C-H**]). La forme ψ_q est évidemment à support compact, d''-fermée dans U et même, par raison de type, d-fermée. D'après l'égalité (1), on a donc:

$$\langle \mathrm{Res}_G(\psi_q/G^{\alpha+\mathbf{1}_p}), 1\rangle = (\det M) \sum_{b^+ = \alpha} b_+ ! \left(\prod_{i,j=1}^{p} \frac{(m_j^i)^{b_j^i}}{b_j^i !} \right) \langle \mathrm{Res}_F(\psi_q/F^{\alpha+\mathbf{1}_p}), 1\rangle$$

d'où, d'après (2) et (3)

$$\langle \mathrm{Res}_G(\psi/G^{\alpha+\mathbf{1}_p}), \varrho\rangle = (\det M) \sum_{b^+ = \alpha} b_+ ! \left(\prod_{i,j=1}^{p} \frac{(m_j^i)^{b_j^i}}{b_j^i !} \right) \langle \mathrm{Res}_F(\psi/F^{b_+ +\mathbf{1}_p}), \varrho\rangle .$$

Ceci étant vrai pour toute fonction $\varrho \in \mathcal{A}_c^0(U)$, le théorème est démontré. ■

En faisant $\alpha = 0$ dans le théorème 4.3, on obtient

Corollaire 4.4.

$$\mathrm{Res}_G(\psi/G) = (\det M)\ \mathrm{Res}_F(\psi/F).$$

Remarque. *Des cas particuliers du Théorème 4.3 ont été obtenus par des méthodes différentes.* [**K**] *et* [**T**] *établissent essentiellement la formule* (1) *du Théorème* 4.3 *dans le cadre ponctuel* ($p = n$) *où le produit* $\varrho\psi$ *est d-fermée et* $\cap(F)^+$ *est une famille d'hypersurfaces lisses transverses* (ϱ *étant la fonction test*). *Elle est généralisée au cas d'hypersurfaces non nécessairement lisses dans* [**B-H**], *la démonstration reposant sur les formules intégrales de Bochner-Martinelli et le résidu des formes différentielles à singularités de Martinelli, dans l'esprit de* [**Y2**]. *Avec p et* ψ *quelconques, elle est prouvée pour* $\alpha = 0$ (*c'est le résultat du corollaire* 4.4) *dans* [**D-S**] (*prop.* 2.2), *à partir de la théorie des résidus-fibrés de Coleff-Herrera.*

Le corollaire suivant est l'outil de base pour la construction du fibré de Radon dans [**O2**].

Corollaire 4.5. *Soient* Y' *une variété analytique complexe,* ψ *une forme différentielle* $\mathcal{C}^\infty$ *dans* Y', $\delta = (\delta_i^j)$ *et* $\lambda = (\lambda_i^j)$ *des matrices de fonctions holomorphes dans* Y' *et* $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_p^0) \in \mathcal{O}(Y')^p$. *Soient* $F = (f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{M}_p$ *un p-uple de fonctions méromorphes ayant toutes même diviseur polaire* $(f_i)^-$ *et*

$G \in \mathcal{M}_p$ vérifiant $G = \delta \cdot F/(\lambda^0 + \lambda \cdot F)$. On a alors

$$\left(\prod_{i=1}^{p} \lambda_i^0\right) \operatorname{Res}_F(\psi/F) = \det(\delta)\ \operatorname{Res}_G(\psi/G).$$

Démonstration. Par une partition de l'unité, on se ramène au cas d'un polydisque W de $\mathbb{C}^n$. Soit $G = (g_1 \ldots, g_p)$; dans W, on peut écrire $f_i = v_i/u$, avec u, $v_i \in \mathcal{O}(W)$ $(i \in \{1, \ldots, p\})$; on a alors $g_i = v_i'/u_i'$ où, pour garder la cohérence des notations avec [**O1**], $v_i' = \sum_{k=1}^{p} \delta_i^k v_k$ et $u_i' = \lambda_i^0 u + \sum_{j=1}^{p} \lambda_i^j v_j$. On obtient $\psi/G = \psi \prod_{i=1}^{p} \left(\left(\lambda_i^0 u \Big/ \sum_{k=1}^{p} \delta_i^k v_k\right) + \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_i^j v_j \Big/ \sum_{k=1}^{p} \delta_i^k v_k\right)\right)$. D'après la propriété iii) des résidus, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, on a:

$$\operatorname{Res}_G\left(\psi\left(v_j \Big/ \sum_{j=1}^{p} \delta_i^j v_j\right)\right) = 0,\ \text{d'où}\ \operatorname{Res}_G(\psi/G) = \left(\prod_{i=1}^{p} \lambda_i^0\right) \operatorname{Res}_G\left(\psi\left(u^p \Big/ \prod_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{p} \delta_i^j v_j\right)\right)\right).$$

Le corollaire 4.4 donne alors

$$\det(\delta)\ \operatorname{Res}_G(\psi/G) = \left(\prod_{i=1}^{p} \lambda_i^0\right) \operatorname{Res}_F\left(\psi\left(\prod_{i=1}^{p} (u/v_i)\right)\right). \qquad \blacksquare$$

Bibliographie

[**B-H**] J. Y. Boyer et M. Hickel, *Une généralisation de la loi de transformation pour les résidus*, Bull. Soc. Math. France **125** (1997), 315-335.

[**C-G-G**] L. Caniglia, J. Guccione and J. Guccione, *Local membership problems for polynomial ideals*, Effective Methods in Algebraic Geometry, Progress in Math. **94**, Birkhäuser, Berlin 1991, 31-45.

[**C-H**] N. Coleff et M. Herrera, *Les Courants Résiduels Associés à une Forme Méromorphe*, Lect. Notes in Math. **633**, Springer Verlag, Berlin 1978.

[**D-S**] A. Dickenstein et C. Sessa, *Résidus de formes méromorphes et cohomologie modérée*, in Géométrie Complexe, F. Norguet, S. Ofman, J. J. Szczeciniarz ed., Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris 1996.

[**G-S**] I. Gelfand et G. Shilov, *Les distributions* **1**, Dunod, Paris 1972.

[**K**] A. Kytamov, *A transformation formula for Grothendick residues and some of its applications*, Siberian Math. J. (1989), 495-499.

[**L**] J. Leray, *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe, problème de Cauchy III*, Bull. Soc. Math. France **87** (1959), 81-180.

[**N**] F. Norguet, *Sur la théorie des résidus*, C. R. Accad. Sci. **248** (1959), 2057-2059.

[**O1**] S. Ofman, *La transformation de Radon analytique en codimension 1*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **20** (1993), 415-459.

[**O2**] S. Ofman, *La transformation de Radon analytique en dimension quelconque*, in Géometrie Complexe 1998, F. Norguet, S. Ofman ed., International Press, à paraître.

[**T**] A. Tsikh, *Multidimensional Residues and Their Applications*, Amer. Math. Soc. monography **103** (1992).

[**Y1**] A. Yger, *Courants résidus et applications*, Publications de l'Ecole Doctorale, Bordeaux 1994.

[**Y2**] A. Yger, *Résidus, courants résiduels et courants de Green*, in Géométrie Complexe, F. Norguet, S. Ofman, J. J. Szczeciniarz ed., Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris 1996.

Abstract

In this article, we give a «transformation» formula for the Residue-currents, i.e. we compute the Residue-current $1\Big/\left(\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{l} u_k^j f_k\right)^{\alpha_j}\right)$ (u_k^j *and* α_j *are respectively holomorphic functions and natural integers*) *with respect to the Residue-currents of the powers of* $1/f_k$. *This is obtained through the use of both the construction of Leray's Residues and the theory of Coleff-Herrera's Residue-currents. This transformation formula has several applications, in particular it is used in* [**O2**], *in the form of the corollary* 4.5, *to generalize to any dimension the results on the analytic Radon Transformation obtained in* [**O1**]. *In the first paragraph, we give the properties of the Residue-currents we need later. In the second one, we give an abstract of the classical theory of cohomological residues and we generalize a formula of Leray on the division of the differential forms, useful for the computations of some integral Transformations. In the third one, we prove a continuity formula for Residue-currents depending of a parameter when the differential form is d-closed* (*otherwise, it is easy to get counter-examples, cf. remark* II.6 *in* [**O1**]). *In the last one, we prove the transformation formula* (*proposition* 4.2 *and theorem* 4.3).

* * *