Riv. Mat. Univ. Parma (6) 2 (1999), 103-118

M. D'Aprile e V. Marino (*)

Sulla geometria di varietà ortogonali di codimensione alta nello spazio euclideo(**)

1 - Introduzione

M. A. Cheshkova in [**C**] ha studiato la geometria di due sottovarietà n-dimensionali tra loro ortogonali nello spazio euclideo E^{2n}, cioé due varietà M ed $\overline{M}$ per le quali esista un diffeomorfismo $f\colon M \to \overline{M}$ tale che, per ogni $p \in M$, lo spazio M_p tangente ad M in p sia ortogonale allo spazio $\overline{M}_{f(p)}$ tangente ad $\overline{M}$ in $f(p)$.

Un esempio classico di questa situazione geometrica è fornito da una curva piana e la sua evoluta.

In questa nota estendiamo la ricerca di Cheshkova al caso di due sottovarietà di codimensione molto alta (superiore alla loro dimensione) in spazi euclidei. Lo studio di immersioni di questo tipo viene condotto, secondo una tecnica ormai classica [**S**], e utilizzata ad esempio da Cattaneo-Gasparini e Romani in [**CG-R**], decomponendo il fibrato normale ad una sottovarietà in sottofibrati normali dei vari ordini. In questo lavoro si considerano in particolare quelle sottovarietà «nicely curved» per le quali il primo spazio normale ha in ogni punto esattamente la dimensione dello spazio tangente.

Supponendo dato un diffeomorfismo $f\colon M \to \overline{M}$ tra due varietà del tipo ora descritto, diciamo che $\overline{M}$ è «1-ortogonale» ad M se in punti corrispondenti lo spazio tangente a $\overline{M}$ coincide con il primo spazio normale di M. Questa ipotesi permette di definire un isomorfismo ω, tra spazio tangente e primo spazio normale di M, del quale evidenziamo alcune proprietà. Mediante ω colleghiamo la geometria di

---

(*) Dipartimento di Matematica - Università della Calabria - 87036 Arcavacata di Rende, Cosenza, Italia. E-mail: daprile@unical.it marino@unical.it

(**) Ricevuto il 17 Maggio 1999. Classificazione AMS 53 B 25, 53 A 07. Ricerca finanziata dall'Università della Calabria e, per il secondo autore, anche dal CNR-GNSAGA.

$\overline{M}$ a quella di M. Ricaviamo inoltre una equazione di tipo «Ricci» per la connessione sul primo fibrato normale (Teorema 1), che usiamo per stabilire relazioni tra i tensori di curvatura delle due varietà (Teorema 2). Infine otteniamo una condizione, sul vettore di curvatura media di $\overline{M}$, perché M sia minima (Teorema 3) e la condizione perché il diffeomorfismo f sia armonico (Teorema 4).

2 - Gli spazi normali successivi e le equazioni di Frenet generalizzate

Richiamiamo in questo paragrafo alcuni risultati, relativi agli spazi normali dei vari ordini, che useremo nel seguito.

Sia $i: M \to M'$ una immersione isometrica fra due varietà riemanniane di dimensione rispettivamente m ed m', con $m < m'$. Indichiamo con $\langle , \rangle$ il prodotto scalare su M'; nel seguito, identificheremo sempre ogni punto $p \in M$ con la sua immagine $i(p) \in M'$ ed il prodotto scalare su M con quello indotto da i. Lo spazio M'_p tangente a M' nel punto p si scompone nella somma diretta

$$M'_p = M_p \oplus M_p^{\perp} \tag{1}$$

dello spazio M_p tangente ad M e del suo complemento ortogonale $M_p^{\perp}$. Indichiamo con ∇ e ∇' le connessioni di Levi-Civita rispettivamente su M e M', e con $\mathcal{X}(M)$ ed $\mathcal{N}(M)$ i moduli dei campi vettoriali tangenti e dei campi normali ad M.

Dati $X \in \mathcal{X}(M)$ e $p \in M$, useremo indifferentemente le scritture $X(p)$ o X_p per indicare il valore della sezione X nel punto p; useremo notazioni analoghe per valori di sezioni di altri fibrati.

Da (1) si deduce, per ogni coppia X, $Y \in \mathcal{X}(M)$, ed ogni $p \in M$, la nota «*formula di Gauss*»:

$$\nabla'_{X_p} Y = \nabla_{X_p} Y + s(X_p, Y_p)\,; \tag{2}$$

$s(,)$: $M_p \times M_p \to M_p^{\perp}$ viene detta *seconda forma fondamentale di i.*

Analogamente, dati $\xi \in \mathcal{N}(M)$ e $X \in \mathcal{X}(M)$, vale la *equazione di Weingarten*:

$$\nabla'_{X_p} \xi = -A_{\xi_p}(X_p) + D_{X_p} \xi\,, \tag{3}$$

nella quale figurano la *connessione normale* $D: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{N}(M) \to \mathcal{N}(M)$ e l'*operatore di Weingarten* A_{ξ_p}: $M_p \to M_p$ che è legato alla seconda forma fondamentale s dalla seguente relazione: per ogni scelta di $X_p, Y_p \in M_p$, si ha

$$\langle A_{\xi_p}(X_p), Y_p \rangle = \langle s(X_p, Y_p), \xi_p \rangle . \tag{4}$$

Si chiama *k-spazio osculatore* $Osc^k M_p$ ad M in p il sottospazio di M'_p generato da

$$X_1(p), \quad \nabla'_{X_1} X_2(p), \quad \nabla'_{X_1} \nabla'_{X_2} X_3(p), \; \dots, \; \nabla'_{X_1} \nabla'_{X_2} \dots \nabla'_{X_{k-1}} X_k(p),$$

al variare di $X_1, X_2, \dots, X_k$ in $\mathcal{X}(M)$. Si pone

$$Osc^{-1} M_p = Osc^0 M_p = \{0\}.$$

Una sottovarietà M è detta «*nicely curved*» se la dimensione di ogni spazio osculatore $Osc^k M_p$ è costante al variare di $p \in M$.

Gli spazi osculatori dei vari ordini costituiscono una successione crescente di sottospazi di M'_p:

$$\{0\} = Osc^0 M_p \subset Osc^1 M_p \subset \dots \subset Osc^l M_p = Osc^{l+1} M_p = \dots \tag{5}$$

La dimensione di $Osc^l M_p$ è detta *numero di immersione formale di M* ed è indicata con $\#(M)$.
Data una varietà M «nicely curved», per ogni $k \geq -1$ si definiscono due fibrati vettoriali:

$$Osc^k M,$$

la cui fibra su $p \in M$ è $Osc^k M_p$, e

$$Nor^k M,$$

la cui fibra in p è il sottospazio $Nor^k M_p$ di M'_p, detto spazio *normale di ordine k* o *k-esimo spazio normale* di M in p, definito da

$$Osc^{k+1} M_p = Osc^k M_p \oplus Nor^k M_p . \tag{6}$$

Risulta $Nor^0 M_p = M_p$ e $Nor^k M_p = \{0\}$ per $k = -1$, $k > \#(M) - 1$.

Indicheremo con $\mathcal{N}^k(M)$ il modulo delle sezioni di $Nor^k M$.

In definitiva, su una varietà «nicely curved» si ha, per ogni $k \geq -1$

$$Osc^{k+1} M_p = M_p \oplus Nor^1 M_p \oplus Nor^2 M_p \oplus \dots \oplus Nor^k M_p \tag{7}$$

ed è ben definita una proiezione $\top^k : M'_p \to Nor^k M_p$.

Vale la notevole relazione ([S]): dati $\xi \in \mathcal{N}^k(M)$ e $X_p \in M_p$,

$$\nabla'_{X_p} \xi \in Nor^{k-1} M_p \oplus Nor^k M_p \oplus Nor^{k+1} M_p . \tag{8}$$

In analogia con la seconda forma fondamentale, è possibile definire, per ogni $k > 0$, la *forma fondamentale k-esima* (o di ordine k) dell'immersione i come l'applicazione $(k+1)$-lineare su M_p a valori in $Nor^k M_p$ data da

$$s^k(X_{1_p}, \ldots, X_{k+1_p}) = \top^k (\nabla'_{X_1} \nabla'_{X_2} \ldots \nabla'_{X_k} X_{k+1}(p)) . \tag{9}$$

Si definisce anche una applicazione bilineare

$$\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}} \colon M_p \times Nor^k M_p \to Nor^{k+1} M_p$$

ponendo

$$\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}(X_p, s^k(X_{1_p}, \ldots, X_{k+1_p})) = s^{k+1}(X_p, X_{1_p}, \ldots, X_{k+1_p}) .$$

La *connessione normale k-esima* (per $k > 0$) è la connessione D^k sul fibrato $Nor^k M$ assegnata, per ogni $\xi \in \mathcal{N}^k(M)$ e ogni $X \in \mathcal{X}(M)$, da

$$D^k_X \xi = \top^k \nabla'_X \xi . \tag{10}$$

Infine, si chiama *k-esima applicazione di Weingarten* la applicazione

$$A^k \colon Nor^k M_p \times M_p \to Nor^{k-1} M_p$$

tale che, per ogni $\xi \in \mathcal{N}^k(M)$ e $X_p \in M_p$, sia ([1])

$$A^k_{\xi_p} X_p = - \top^{k-1} \nabla'_{X_p} \xi ;$$

vale la proprietà, per ogni $\eta \in \mathcal{N}^{k-1}(M)$,

$$\langle \top^{k-1} \nabla'_{X_p} \xi , \eta_p \rangle = - \langle \xi_p , \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k-1}}(X_p, \eta_p) \rangle . \tag{11}$$

Si noti che per $k = 1$ è $A^1_{\xi_p} = A_{\xi_p}$: infatti, se è $k > 1$, allora dalla (8) si ricava che nella (3) è $A_\xi \equiv 0$.

Usando le definizioni ora introdotte, dalla (8) si ottiene ([S]) il *teorema* (*equa-*

([1]) Per alleggerire le notazioni, ed ove non sia pericolo di ambiguità, in luogo di $A(x)$, $f(X)$, … scriveremo Ax, fX, …

zioni di Frenet generalizzate): *per ogni* $\xi \in \mathcal{N}^k(M)$ *e per ogni* $X_p \in M_p$ *si ha*

$$\nabla'_{X_p} \xi = -A^k_{\xi_p} X_p + D^k_{X_p} \xi + \mathbf{s}^{\mathbf{k}}(X_p, \xi_p). \tag{12}$$

3 - Sottovarietà 1-ortogonali in uno spazio euclideo

3.1 - *Definizioni e relazioni fondamentali*

È noto (si veda ad es. [**S**], [**dC**]) che se M è una sottovarietà di uno spazio euclideo, il suo tensore di curvatura R verifica la *equazione di Gauss*

$$R(X, Y) Z = A_{s(Y, Z)} X - A_{s(X, Z)} Y, \tag{13}$$

con $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$; inoltre, presi comunque $\xi, \eta \in \mathcal{N}(M)$, valgono le *equazioni di Codazzi*

$$(\nabla_X A)(Y, \xi) = (\nabla_Y A)(X, \xi)$$

e le *equazioni di Ricci*

$$R^{\perp}(X, Y)\xi = s(X, A_\xi Y) - s(Y, A_\xi X)$$

oppure

$$\langle R^{\perp}(X, Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta] X, Y\rangle.$$

Per $\xi \in \mathcal{N}^k(M)$ le *equazioni generalizzate di Codazzi-Mainardi* (cfr. [**S**]) si riducono a:

$$D^{k+1}_X(\boldsymbol{s}^k(Y, \xi)) - \boldsymbol{s}^k(\nabla_X Y, \xi) - \boldsymbol{s}^k(Y, D^k_X \xi) =$$

$$= D^{k+1}_Y(\boldsymbol{s}^k(X, \xi)) - \boldsymbol{s}^k(\nabla_Y X, \xi) - \boldsymbol{s}^k(X, D^k_Y \xi).$$

Siano ora M e $\overline{M}$ due sottovarietà riemanniane n-dimensionali dello spazio euclideo E^{2n+q}, per $q > 0$, e sia dato un diffeomorfismo

$$f \colon M \to \overline{M}.$$

Si supponga che M, e di conseguenza $\overline{M}$, sia «nicely curved» e che sia esattamente

$$dim\, Nor^1 M_p = n\,;$$

in altre parole, per ogni $p \in M$, lo spazio tangente ad E^{2n+q} si decompone nella somma diretta

$$E_p^{2n+q} = M_p \oplus Nor^1 M_p \oplus C_p,$$

con $dim\, C_p = q$.

Osservazione 1. Di conseguenza, risultano escluse dalle nostre considerazioni le varietà totalmente ombelicali (cfr. ad es. [**D**a]), per le quali la dimensione del primo spazio normale è 1, e le varietà totalmente geodetiche (in cui il primo spazio normale è ridotto a $\{0\}$).

Definizione 1. *Diciamo che $\overline{M}$ è 1-ortogonale a M se il diffeomorfismo f ha la proprietà che, per ogni $p \in M$, lo spazio tangente a $\overline{M}$ nel punto corrispondente $f(p)$, se trasportato parallelamente in p, coincide con il sottospazio $Nor^1 M_p$: ovvero, pensando tutti i vettori applicati in p, si verifica che*

$$\overline{M}_{f(p)} \equiv Nor^1 M_p.$$

Definizione 2. *Quando $\overline{M}$ è 1-ortogonale a M definiamo un isomorfismo*

$$\omega : M_p \to Nor^1 M_p$$

ponendo, per ogni $X \in \mathcal{X}(M)$

$$\omega X_p = df_p X_p.$$

Siano g, ∇, s^j, $\mathbf{s}^j$, D^j, A^j rispettivamente la metrica, la connessione riemanniana, le forme fondamentali generalizzate e le applicazioni bilineari ad esse associate, le connessioni normali e gli operatori di Weingarten generalizzati (per $j > 0$) di M (vedi il paragrafo 2) e $\overline{g}$, $\overline{\nabla}$, $\overline{s}^j$, $\mathbf{s}^j$ $\overline{D}^j$, $\overline{A}^j$ gli analoghi per $\overline{M}$. Indichiamo con $\langle , \rangle$, ∂ il prodotto scalare e la connessione usuali dello spazio euclideo E^{2n+q}.

Proposizione 1. *L'isomorfismo ω gode delle proprietà:*

(i) $A^1_{\omega X} Y = A^1_{\omega Y} X$,
(ii) $\omega[X, Y] = D^1_X \omega Y - D^1_Y \omega X$,
(iii) $\mathbf{s}^1(X, \omega Y) = \mathbf{s}^1(Y, \omega X)$.

Dimostrazione. Come in [**C**], siano r il vettore delle coordinate euclidee di $p \in M$ ed fr quello delle coordinate del punto immagine $fp \in \overline{M}$. Ogni campo vettoriale Y tangente ad M si può identificare con un campo vettoriale Y^* su E^{2n+q} in modo che sia

$$Y = \partial_{Y^*} r, \qquad \omega Y = \partial_{Y^*} fr .$$

Per semplicità, nel seguito ometteremo l'asterisco e scriveremo

$$Y = \partial_Y r .$$

Allora si ha

$$\partial_X \omega Y = \partial_X \partial_Y fr$$

e quindi

$$\partial_X \omega Y - \partial_Y \omega X = (\partial_X \partial_Y - \partial_Y \partial_X)\, fr = \omega([X, Y]) .$$

Per la (12) l'equazione precedente diviene

$$-A^1_{\omega Y} X + D^1_X \omega Y + \mathbf{s}^1(X, \omega Y) - (-A^1_{\omega X} Y + D^1_Y \omega X + \mathbf{s}^1(Y, \omega X)) = \omega([X, Y]).$$

Poiché ω e D^1 hanno come codominio $Nor^1 M_p$ mentre A^1_ξ prende valori in $Nor^0 M_p = M_p$ e $\mathbf{s}^1$ ha valori in $Nor^2(M)$, dalla decomposizione in somma diretta ortogonale

$$E^{2n+q}_p = M_p \oplus Nor^1 M_p \oplus Nor^2 M_p \oplus \ldots$$

si ottiene la tesi. C.v.d.

Corollario 1. *Se $\overline{M}$ è 1-ortogonale a M, l'equazione di Gauss* (13) *per M può essere scritta nella forma*

$$R(X, Y)\, Z = A^1_{\omega X} \omega^{-1} s^1(Y, Z) - A^1_{\omega Y} \omega^{-1} s^1(X, Z) . \tag{14}$$

Dimostrazione. Poiché ω è surgettiva, esiste $Q \in \mathcal{X}(M)$ per cui $\omega Q = s^1(Y, Z)$. Da questo e dalla (i) della Proposizione 1 si ricava

$$A^1_{s^1(Y, Z)} X = A^1_{\omega Q} X = A^1_{\omega X} Q = A^1_{\omega X} \omega^{-1} s^1(Y, Z)$$

e un'analoga espressione per l'altro addendo dell'equazione di Gauss. C.v.d.

Corollario 2. *Si ponga, per ogni scelta di* $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$,

$$h(X, Y, Z) = \langle A^1_{\omega X} Y, Z \rangle = \langle \omega X, s^1(Y, Z) \rangle . \tag{15}$$

La forma h è simmetrica.

Dimostrazione. Basta dimostrare che valgono le due identità

$$h(X, Y, Z) = h(X, Z, Y), \qquad h(X, Y, Z) = h(Y, X, Z) .$$

La prima discende dalla proprietà di simmetria di s^1:

$$h(X, Y, Z) = \langle \omega X, s^1(Y, Z) \rangle = \langle \omega X, s^1(Z, Y) \rangle = h(X, Z, Y) ,$$

la seconda dalla (i) della Proposizione 1:

$$h(X, Y, Z) = \langle A^1_{\omega X} Y, Z \rangle = \langle A^1_{\omega Y} X, Z \rangle = h(Y, X, Z) .$$

C.v.d.

3.2 - *La geometria indotta dall'isomorfismo* ω

L'isomorfismo ω introdotto con la Definizione 2 consente di trasportare la metrica $\bar{g}$ di $\overline{M}$ su M.

Definizione 3. *Per ogni* $p \in M$, *e* $X, Y \in \mathcal{X}(M)$,

$$\bar{g}(X, Y)_p = \langle \omega X_p, \omega Y_p \rangle .$$

Lemma 1. *Esiste un endomorfismo B di* $\mathcal{X}(M)$ *tale che, per ogni scelta di* $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, *si abbia*

$$\bar{g}(X, Y) = g(BX, Y) . \tag{16}$$

Dimostrazione. Localmente, le metriche g e $\bar{g}$ sono determinate da due matrici G e $\overline{G}$ (funzioni differenziabili delle coordinate locali) tali che, indicati con x, y i vettori delle coordinate dei campi X, Y, si abbia

$$g(X, Y) = x^T G y , \qquad \bar{g}(X, Y) = x^T \overline{G} y .$$

L'endomorfismo associato alla matrice $G^{-1}\overline{G}$ soddisfa la (16). C.v.d.

Osservazione 2. Per $q = 0$, le ipotesi, le definizioni e le costruzioni compiute fin qui coincidono con quelle del lavoro di Cheshkova [**C**]. Se è $q > 0$, avendo noi preso in considerazione la decomposizione del fibrato normale in sottofibrati normali di vari ordini, otterremo conseguenze diverse.

Definiamo tramite f una seconda connessione su M, utilizzando la connessione normale su $Nor^1 M$ introdotta con la (10), in cui si ponga $k=1$, $\nabla' = \partial$.

Definizione 4. *Per ogni scelta di* X, $Y \in \mathcal{X}(M)$,

$$\overline{\nabla}_X Y = \omega^{-1} D^1_X \omega Y .$$

Mostriamo ora che $\overline{\nabla}$ è la connessione associata alla metrica $\overline{g}$.

Lemma 2. $\overline{\nabla}$ *è la connessione riemanniana su M che è compatibile con la metrica $\overline{g}$; ovvero, per ogni scelta di campi vettoriali X, Y, Z tangenti ad M, valgono le due proprietà*:

1. $X\overline{g}(Y, Z) = \overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) + \overline{g}(\overline{\nabla}_X Z, Y)$,
2. $\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X = [X, Y]$.

Dimostrazione. Per definizione di $\overline{g}$ si ha

$$X\overline{g}(Y, Z) = X\langle \omega Y, \omega Z\rangle = \langle \partial_X \omega Y, \omega Z\rangle + \langle \omega Y, \partial_X \omega Z\rangle .$$

Poiché $\omega Y \in \mathcal{N}^1(M)$, dalle equazioni di Frenet generalizzate (12) si deducono le eguaglianze

$$\langle \partial_X \omega Y, \omega Z\rangle = \langle D^1_X \omega Y, \omega Z\rangle, \qquad \langle \partial_X \omega Z, \omega Y\rangle = \langle D^1_X \omega Z, \omega Y\rangle .$$

Ancora per la Definizione 3, è:

$$\langle D^1_X \omega Y, \omega Z\rangle = \overline{g}(\omega^{-1} D^1_X \omega Y, Z), \qquad \langle D^1_X \omega Z, \omega Y\rangle = \overline{g}(\omega^{-1} D^1_X \omega Z, Y),$$

da cui segue la proprietà 1.

Dalla Definizione 4 si trae:

$$\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X = \omega^{-1}(D^1_X \omega Y - D^1_Y \omega X)$$

e dalla (ii) della Proposizione 1

$$\omega^{-1}(D^1_X \omega Y - D^1_Y \omega X) = \omega^{-1}(\omega[X, Y]),$$

da cui segue la proprietà 2, c.v.d.

Definizione 5. *Dati* $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, *si ponga*

$$\overline{\alpha}_1(X, Y) = \partial_X \omega Y - \omega \overline{\nabla}_X Y .$$

Proposizione 2. *Per ogni* $p \in M$, *l'applicazione*

$$\overline{\alpha}_1 \colon M_p \times M_p \to M_p \oplus Nor^2 M_p$$

risulta essere bilineare e simmetrica; inoltre:

$$\overline{\alpha}_1(X, Y) = -A^1_{\omega Y} X + \mathbf{s}^1(X, \omega Y) .$$

Dimostrazione. Per l'equazione di Frenet generalizzata (12) e dalle definizioni, si ha

$$\overline{\alpha}_1(X, Y) = -A^1_{\omega Y} X + D^1_X \omega Y + \mathbf{s}^1(X, \omega Y) - D^1_X \omega Y$$

che rappresenta $\overline{\alpha}_1(X, Y)$ come somma di un campo tangente ed un elemento di $\mathcal{N}^2(M)$. Da questa espressione, per la Proposizione 1, segue la simmetria di $\overline{\alpha}_1(X, Y)$, in quanto si ha

$$-A^1_{\omega Y} X + \mathbf{s}^1(X, \omega Y) = -A^1_{\omega X} Y + \mathbf{s}^1(Y, \omega X) ,$$

da cui si ricava inoltre che $\overline{\alpha}_1$ è bilineare. C.v.d.

È possibile costruire un operatore associato ad $\overline{\alpha}_1$ in maniera analoga a quella che associa l'operatore di Weingarten A^1 alla seconda forma fondamentale s^1, secondo la

Definizione 6. *Fissato* $X \in \mathcal{X}(M)$, *per ogni* $p \in M$ *sia*

$$\overline{A}^1_X \colon Nor^1 M_p \to Nor^1 M_p$$

l'operatore tale che, per ogni scelta di campi tangenti Y, Z *si abbia*

$$\langle \overline{A}^1_X \omega Y_p, \omega Z_p \rangle = \langle X_p, \overline{\alpha}_1(Y_p, Z_p) \rangle .$$

L'operatore $\overline{A}^1_X$ gode delle proprietà enunciate dalla

Proposizione 3. *Per ogni scelta di* $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, *si ha*

(1) $\langle \overline{A}^1_X \omega Y, \omega Z \rangle = -\langle X, A^1_{\omega Y} Z \rangle$
(2) $\overline{A}^1_X \omega Y = -s^1(X, Y)$

(3) $\langle \overline{A}^1_X \omega Y, \omega Z\rangle = \langle \overline{A}^1_Z \omega X, \omega Y\rangle = \langle \overline{A}^1_Y \omega Z, \omega X\rangle$
(4) $B\omega^{-1}\overline{A}^1_X \omega Y = -A^1_{\omega X} Y$.

Dimostrazione. Dalla Definizione 6 e dalla Proposizione 2 si deduce:

$$\langle \overline{A}^1_X \omega Y, \omega Z\rangle = \langle X, \overline{\alpha}_1(Y, Z)\rangle = \langle X, -A^1_{\omega Y} Z\rangle + \langle X, \mathbf{s}^1(Z, \omega Y)\rangle$$

da cui, essendo X e $\mathbf{s}^1(Z, \omega(Y))$ tra loro ortogonali, discende la (1).

Da questa, per la Proposizione 1 e la relazione fondamentale tra A^1 e s^1 (4) si deduce la (2):

$$\langle \overline{A}^1_X \omega Y, \omega Z\rangle = \langle X, -A^1_{\omega Y} Z\rangle = \langle X, -A^1_{\omega Z} Y\rangle = \langle -s^1(X, Y), \omega Z\rangle .$$

Le (3) scendono dalla (1) e dal Corollario 2. Per ottenere la (4), riscriviamo la (1), utilizzando ancora il Corollario 2, nella forma

$$g(\omega(\omega^{-1}\overline{A}^1_X \omega Y), \omega Z) = g(-A^1_{\omega X} Y, Z)$$

e ricordiamo la Definizione 3

$$g(\omega(\omega^{-1}\overline{A}^1_X \omega Y), \omega Z) = \overline{g}(\omega^{-1}\overline{A}^1_X \omega Y, Z);$$

la tesi segue dal Lemma 1. C.v.d.

3.3 - *Esempi*

Consideriamo nello spazio euclideo E^6 il prodotto di due elicoidi:

(17) $$\mathcal{E}: (s, t) \mapsto (\cos s, \sin s, s, \cos t, \sin t, t).$$

Si verifica che in ogni punto $p \in \mathcal{E}$ gli spazi $Nor^1 \mathcal{E}_p$ e $Nor^2 \mathcal{E}_p$ hanno entrambi dimensione 2 e sono complementari. La superficie parametrizzata

(18) $$\mathcal{Z}: (s', t') \mapsto (-\sin s', \cos s', 0, -\sin t', \cos t', 0)$$

è 1-ortogonale a $\mathcal{E}$ tramite l'applicazione F definita dalle equazioni

$$s' = s, \qquad t' = t .$$

Si può notare che in punti corrispondenti p ed $F(p)$ si ha $Nor^1 \mathcal{Z}_{F(p)} \neq \mathcal{E}_p$.

Le varietà prodotto non sono gli unici esempi di varietà in cui lo spazio tangente in ogni punto abbia la stessa dimensione del primo spazio normale; un altro esempio nello spazio euclideo E^6 è dato dalla superficie rigata parametrizzata

$$(u, v) \mapsto (u, uv, uv^2, v, v^2, v^3).$$

4 - Relazioni fra i tensori di curvatura di due varietà 1-ortogonali

4.1 - *L'equazione di «tipo Ricci» per la prima connessione normale*

Consideriamo, come nella sezione **2**, una immersione $i: M \to M'$ tra varietà riemanniane. Le classiche equazioni di Codazzi, Mainardi, Ricci (si veda ad es. [**S**]) si generalizzano nello studio dei fibrati normali dei vari ordini. In particolare, ci occupiamo qui della equazione «di Ricci» che caratterizza la proiezione del tensore di curvatura della varietà ambiente M' sul primo spazio normale della varietà immersa M.

Indichiamo, per $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, con $R(X, Y)$ il tensore di curvatura su M, con $R'(X, Y)$ quello su M' e con R^1 il tensore di curvatura associato alla connessione normale D^1 su $Nor^1 M$: per ogni $\xi \in \mathcal{N}^1(M)$ definiamo

$$R^1(X, Y)\, \xi = D^1_X D^1_Y \xi - D^1_Y D^1_X \xi - D^1_{[X, Y]} \xi \tag{19}$$

Teorema 1. *Nelle ipotesi enunciate sopra, per ogni* $\xi \in \mathcal{N}^1(M)$, *si ha*

$$\begin{aligned} &\top^1 R'(X, Y)\, \xi = \\ &= R^1(X, Y)\, \xi - s^1(X, A^1_\xi Y) + s^1(Y, A^1_\xi X) - A^2_{\mathbf{s}^1(Y, \xi)} X + A^2_{\mathbf{s}^1(X, \xi)} Y . \end{aligned} \tag{20}$$

Dimostrazione. Esprimiamo $R'(X, Y)\xi$ utilizzando la formula di Gauss (2) e le formule di Frenet generalizzate (12). Otteniamo

$$\nabla'_X \nabla'_Y \xi = \nabla'_X(-A^1_\xi Y + D^1_Y \xi + \mathbf{s}^1(Y, \xi)) = -\nabla_X A^1_\xi Y - s^1(X, A^1_\xi Y)$$

$$-A^1_{D^1_Y \xi} X + D^1_X D^1_Y \xi + \mathbf{s}^1(X, D^1_Y \xi) - A^2_{\mathbf{s}^1(Y, \xi)} X + D^2_X \mathbf{s}^1(Y, \xi) + \mathbf{s}^2(X, \mathbf{s}^1(Y, \xi)).$$

Ne segue

$$\top^1 \nabla'_X \nabla'_Y \xi = -s^1(X, A^1_\xi Y) + D^1_X D^1_Y \xi - A^2_{\mathbf{s}^1(Y, \xi)} X \tag{21}$$

e, da calcoli analoghi,

$$\top^1 \nabla'_Y \nabla'_X \xi = -s^1(Y, A^1_\xi X) + D^1_Y D^1_X \xi - A^2_{s^1(X, \xi)} Y , \tag{22}$$

e

$$\top^1 \nabla'_{[X,Y]}\xi = D^1_{[X,Y]}\xi . \tag{23}$$

Ricordando la Definizione (19), da (21), (22) e (23) segue la tesi. C.v.d.

Corollario 3. *Se M' è uno spazio euclideo, per $\xi \in \mathcal{N}^1(M)$, si ha:*

$$R^1(X,Y)\,\xi = s^1(X, A^1_\xi Y) - s^1(Y, A^1_\xi X) + A^2_{\mathbf{s}^1(Y,\xi)}X - A^2_{\mathbf{s}^1(X,\xi)}Y . \tag{24}$$

4.2 - *Il teorema fondamentale sulle varietà* 1-*ortogonali*

Sia $\overline{M}$ 1-ortogonale a M. Dalla Definizione 4 della connessione $\overline{\nabla}$ si ricava che, per $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, il tensore di curvatura $\overline{R}$ ad essa associato è dato, per la (19), da

$$\overline{R}(X,Y)\,Z = \omega^{-1} R^1(X,Y)\,\omega Z . \tag{25}$$

Osservazione 3. D^1 è piatta $\Leftrightarrow$ $\overline{\nabla}$ è piatta.

Teorema 2. *Per ogni $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ si ha*

(a) $R(X,Y)\,Z = B\omega^{-1}[\overline{A}^1_X, \overline{A}^1_Y]\omega Z$
(b) $\overline{R}(X,Y)\,Z = B^{-1}[A^1_{\omega X}, A^1_{\omega Y}]\,Z + \omega^{-1}(A^2_{\mathbf{s}^1(Y,\omega Z)}X - A^2_{\mathbf{s}^1(X,\omega Z)}Y)$.

Dimostrazione. La dimostrazione di (a) ricalca quella contenuta in [**C**]: la equazione di Gauss nella forma (14), per la (2) della Proposizione 3 diviene

$$R(X,Y)\,Z = -A^1_{\omega X}\omega^{-1}\overline{A}^1_Y\omega Z + A^1_{\omega Y}\omega^{-1}\overline{A}^1_X\omega Z .$$

Usando la (4) della Proposizione 3, si ottiene infine

$$R(X,Y)\,Z = B\omega^{-1}\overline{A}^1_X\omega\omega^{-1}\overline{A}^1_Y\omega Z - B\omega^{-1}\overline{A}^1_Y\omega\omega^{-1}\overline{A}^1_X\omega Z = B\omega^{-1}[\overline{A}^1_X, \overline{A}^1_Y]\,\omega Z .$$

Per dimostrare (b) utilizziamo per R^1 la (24), da cui segue

$$\overline{R}(X,Y)\,Z = \omega^{-1}(s^1(X, A^1_{\omega Z}Y) - s^1(Y, A^1_{\omega Z}X) + A^2_{\mathbf{s}^1(Y,\omega Z)}X - A^2_{\mathbf{s}^1(X,\omega Z)}Y)$$

e per le (2) della Proposizione 3 e la (i) della Proposizione 1

$$\begin{aligned} R(X,Y)\,Z &= \omega^{-1}(-\overline{A}^1_X\omega A^1_{\omega Z}Y + \overline{A}^1_Y\omega A^1_{\omega Z}X + A^2_{\mathbf{s}^1(Y,\omega Z)}X - A^2_{\mathbf{s}^1(X,\omega Z)}Y) \\ &= \omega^{-1}(-\overline{A}^1_X\omega A^1_{\omega Y}Z + \overline{A}^1_Y\omega A^1_{\omega X}Z - A^2_{\mathbf{s}^1(Y,\omega Z)}X + A^2_{\mathbf{s}^1(X,\omega Z)}Y) \end{aligned} \tag{26}$$

da cui, avendosi, per la (4) della Proposizione 3,

$$-\omega^{-1}\overline{A}^1_X \omega A^1_{\omega Y} Z = B^{-1} A^1_{\omega X} A^1_{\omega Y} Z ,$$

si conclude che vale (b). C.v.d.

4.3 - *Casi notevoli: varietà minime, applicazioni armoniche*

Richiamiamo la definizione di vettore di curvatura media per una sottovarietà n-dimensionale M di uno spazio euclideo: fissati $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{X}(M)$ ortonormali, il campo vettoriale curvatura media $\eta \in \mathcal{N}^1(M)$ è dato da

$$\eta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s^1(X_i, X_i) . \tag{27}$$

Si vede subito che η non dipende dalla scelta della base $X_1, \ldots, X_n$: posto $\nu = dim\, \mathcal{N}^1(M)$ e scelta una base ortonormale $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ per $\mathcal{N}^1(M)$, si può scrivere, ricordando la relazione fondamentale (4) tra seconda forma fondamentale e operatore di Weingarten,

$$\eta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s^1(X_i, X_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\nu} tr A_{\xi_j} \xi_j .$$

Sia $\overline{M}$ 1-ortogonale a M, e quindi $\nu = n$. Osserviamo che la n-upla $\omega X_1, \ldots, \omega X_n$ risulta essere una base (in generale, non ortonormale) per $\mathcal{N}^1(M)$ e che, con calcolo analogo a quello fatto sopra, si ha

$$\langle \eta, \omega X_j \rangle = \frac{1}{n} tr A w x_j . \tag{28}$$

Poniamo ora (ricordando la Definizione 5)

Definizione 7.

$$\overline{\eta} = \frac{1}{n} \sum_i \overline{\alpha}_1(X_i, X_i) .$$

Il campo $\overline{\eta}$, che non è altro che il campo curvatura media di $\overline{M}$, trasportato parallelamente su M, risulta appartenere a $\mathcal{X}(M) \oplus \mathcal{N}^2(M)$.

Teorema 3. *M è una varietà minima se e solo se per ogni $p \in M$ il vettore $\overline{\eta}(p)$ giace in $Nor^2 M_p$.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 2 ed il Corollario 2, si ha

$$\langle \overline{\eta}, X_k \rangle = \frac{1}{n} \sum_i \langle -A^1_{\omega X_i} X_i, X_k \rangle = -\frac{1}{n} \sum_i \langle A^1_{\omega X_k} X_i, X_i \rangle = -\frac{1}{n} tr A_{\omega X_k}$$

dunque, dalla (28), i prodotti $\langle \overline{\eta}, X_k \rangle$ determinano η. Ne segue:

$$\eta = 0 \Leftrightarrow \overline{\eta} \in Nor^2 M ,$$

c.v.d.

Ricordiamo che ([**E-L**] o [**CG-R**]) un'applicazione tra varietà riemanniane $\phi: M \to N$ è armonica se e solo se è nullo il suo campo di tensione

$$\tau(\phi) = tr \nabla d\phi . \tag{29}$$

Dette ∇^M e ∇^N le connessioni sulle due varietà, si ha (nelle notazioni, di facile comprensione, di [**E-L**], 2.12) per $X, Y \in \mathcal{X}(M)$,

$$\nabla d\phi(X, Y) = \nabla_X^{\phi^{-1}TN} d\phi Y - d\phi \nabla_X^M Y . \tag{30}$$

Nel caso di una varietà $\overline{M}$ che è 1-ortogonale alla varietà M, l'isomorfismo df si identifica (si veda la sezione 3) con l'isomorfismo ω tra il fibrato tangente ad M ed il fibrato $Nor^1 M$, cosicché la (30) per df si può scrivere

$$\nabla df(X, Y) = \nabla\omega(X, Y) = D^1_X \omega Y - \omega \nabla_X Y . \tag{31}$$

Utilizzando la Definizione 4, dalla (31) si ricava

$$\nabla\omega(X, Y) = \omega(\overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y) .$$

Scelti $X_i \in \mathcal{X}(M)$ per $i = 1, \ldots, n$ ortonormali, da (29), si deduce, essendo ω un isomorfismo:

$$\sum_i \nabla\omega(X_i, X_i) = \omega \sum_i (\overline{\nabla}_{X_i} X_i - \nabla_{X_i} X_i)$$

da cui segue:

Teorema 4. *Il diffeomorfismo f da M alla varietà $\overline{M}$ ad essa* 1*-ortogonale è armonico se e solo se le due connessioni* ∇ *e* $\overline{\nabla}$ *su M hanno la stessa traccia.*

Bibliografia

[**CG-R**] I. Cattaneo Gasparini and G. Romani, *Normal and osculating maps for submanifolds of* R^n, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **114A** (1990), 39-55.

[**C**] M. A. Cheshkova, *On geometry of a pair of orthogonal n-surfaces in* E_{2n}, Siberian Math. J. **36** (1995), 208-212.

[**Da**] M. Dajczer, *Submanifolds and isometric immersions*, Mathematics Lectures Series **13**, Publish or Perish Inc., Houston, Texas 1990.

[**dC**] M. P. Do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin 1992.

[**Do**] P. Dombrowski, *Differentiable maps into riemannian manifolds of constant stable osculating rank,* II J. Reine Angew. Math. **289** (1977), 144-173.

[**E-L**] J. Eells and L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, Amer. Math. Soc., Regional conference series in Mathematics **50** (1983).

[**K-N**] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Interscience Pub., New York - London - Sidney I-1963, II-1969.

[**S**] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Publish or Perish Inc., Houston, Texas 1979.

Abstract

We generalize a paper of M.A. Cheshkova to the case of a diffeomorphism $f\colon M \to \overline{M}$, $M, \overline{M}$ *being n-dimensional submanifold of* E^{2n+q}, *such that for any* $p \in M$ *the first normal space* $Nor^1 M_p$ *coincides with the tangent space* $\overline{M}_{f(p)}$ *(1-orthogonal manifolds). We establish relations between the curvature tensors of* M *and* $\overline{M}$ *and find a condition on the mean curvature field of* $\overline{M}$ *for* M *to be minimal and a condition for* f *to be an harmonic map.*

* * *