Riv. Mat. Univ. Parma (6) **2** (1999), 69-76

GIORDANO GALLINA (*)

Sotto-quasi-anelli di quasi-anelli di Fröhlich (**)

1 - Introduzione

Per $n \in \mathbb{N}$, I_n indica qui l'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$.

In [**2**] Fröhlich ha introdotto i seguenti quasi-anelli. Sia M l'insieme delle serie formali nelle n indeterminate $X_1, X_2, \dots, X_n$ sopra un anello commutativo unitario R, a termine costante zero, ossia $M = R[[X_1, X_2, \dots, X_n]]_0$. Si ponga $N = M^n$. È un quasi-anello destro la struttura $[N; +, \circ]$ dove $+$ è eseguita componente per componente, $\circ$ definita nel modo seguente. Se $f, g \in N$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$, allora $f \circ g \in N$ è tale che $\forall i \in I_n (f \circ g)_i = f_i(g_1, g_2, \dots, g_n)$. N ha unitá $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Per $n = 1$ si determina un quasi-anello che è possibile chiamare di Cartan (la sua origine trovasi infatti in [**1**]); in [**3**] si dimostra che esso è locale, dove dicesi locale un quasi-anello unitario (destro) $[\Gamma; +, .]$ nel quale $\{x \in \Gamma \mid \Gamma x \neq \Gamma\}$ è un Γ-sottogruppo.

Qualunque sia $\xi \in M$, $m \in \mathbb{N}$, indichiamo con $\xi^{(m)}$ la componente omogenea di grado m di ξ. Siano:

1) N' il sottoinsieme di N costituito dagli elementi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in N$ tali che $\forall i \in I_n$ $f_i^{(1)}$ è ridotto ad $\bar{a}_i X_i$ per $\bar{a}_i \in R$;

2) N'' l'insieme degli $f \in N'$ nei quali, posto $f_i^{(1)} = \bar{a}_i X_i$ per $i \in I_n$, risulti, in R, $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = \dots = \bar{a}_n$.

Qui si dimostra che N' è un sottoquasi-anello di N, avente a sua volta N'' come sottoquasi-anello, e che l'insieme degli $f \in N'$ in cui $\forall i \in I_n f_i$ ha nulli particolari coefficienti è un sottoquasianello di N'. Nell'ipotesi in cui R è un campo, si deter-

---

(*) Dipartimento di Matematica, Università, Via D'Azeglio, 85, 43100 Parma, Italy.
(**) Ricevuto il 21 Maggio 1999. Classificazione AMS 16 Y 30.

mina il sottosemigruppo di $[N'; \circ]$ degli elementi sinistro-invertibili e si dimostra che N'' è locale. Nel paragrafo **4** si prova che anche sottoinsiemi di quasi-anelli di Cartan, costituiti da serie formali dove siano nulli determinati coefficienti, sono sottoquasi-anelli i quali, in particolari condizioni, possono essere modificati secondo il processo di Dickson ([**4**], [**5**]).

In un prossimo articolo, si determineranno tutti gli unitari di $[N; +, \circ]$.

2 - Premesse

Nel seguito, per $f, g \in N'$, si denota $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$, $\forall i \in I_n\, f_i = \overline{a}_i X_i + f_i'$, $g_i = \overline{b}_i X_i + g_i'$ dove $\overline{a}_i X_i = f_i^{(1)}$, $\overline{b}_i X_i = g_i^{(1)}$. Per ogni $i \in I_n$, si ponga $L_i = \{f \in N | f_i^{(1)} = \underline{0}\}$, $L_i' = L_i \cap N'$, $L' = \bigcup_{i \in I_n} L_i'$. Si noti che $L_1' \cap N'' = L_2' \cap N'' = \dots = L_n' \cap N'' = L' \cap N''$ è uguale all'ideale di N (quindi anche di N' e di N'' stesso) degli $f \in N$ tali che $f_i^{(1)} = \underline{0}$ qualunque sia $i \in I_n$. Se $\xi \in M$, $m \in \mathbb{N}$, poniamo $\xi^{[m]} = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \dots \xi^{(m)}$.

Enunciato di base nel presente lavoro è quello del

Teorema 1. *N' è un sottoquasianello di N, N'' è un sottoquasianello di N'.*

Dimostrazione. $[N'; +]$ è ovviamente un sottogruppo di $[N; +]$. Proviamo che N' è chiuso rispetto alla composizione definita in N. Qualunque siano $f, g \in N'$, risulta che

$$\begin{aligned} f \circ g &= (f_1, \dots, f_n) \circ (g_1, \dots, g_n) = (\overline{a}_1 X_1 + f_1', \overline{a}_2 X_2 + f_2', \dots, \overline{a}_n X_n + f_n') \\ &\circ (\overline{b}_1 X_1 + g_1', \overline{b}_2 X_2 + g_2', \dots, \overline{b}_n X_n + g_n') = (\overline{a}_1(\overline{b}_1 X_1 + g_1') + f_1'(g_1, g_2, \dots, g_n), \\ &\overline{a}_2(\overline{b}_2 X_2 + g_2') + f_2'(g_1, g_2, \dots, g_n), \dots, \overline{a}_n(\overline{b}_n X_n + g_n') + f_n'(g_1, g_2, \dots, g_n)) \\ &= (\overline{a}_1 \overline{b}_1 X_1 + \overline{a}_1 g_1' + f_1'(g_1, g_2, \dots, g_n), \overline{a}_2 \overline{b}_2 X_2 + \overline{a}_2 g_2' + f_2'(g_1, g_2, \dots, g_n), \\ &\dots, \overline{a}_n \overline{b}_n X_n + \overline{a}_n g_n' + f_n'(g_1, g_2, \dots, g_n)). \end{aligned} \tag{1}$$

Tenuto presente che $\forall i \in I_n$ in f_i', g_i' compaiono effettivamente al più termini di grado totale $\geqslant 2$, risulta da (1) che $f \circ g \in N'$. Si noti che l'unità $(X_1, \dots, X_n)$ appartiene ad N'' e ad N'.

Osservazione 2. Ogni L_i è un sottogruppo di $[N; +]$ tale che $L_i \circ N \subseteq L_i$. Siano inoltre f, h arbitrari in N. Se $g \in L_i$ allora $(g + h) \circ f - h \circ f \in L_i$; se $g \in L_i'$, allora $(f \circ (g + h) - f \circ h)_i^{(1)}$ è privo del termine in X_i.

Dimostrazione. Per uno $j \in I_n$, siano $f, g \in N$, $g \in L_j$. Allora $g_j^{(1)} = \underline{0}$ da cui $((g+h) \circ f - h \circ f)_j^{(1)} = (g_j^{(1)} + h_j^{(1)})(f_1^{(1)}, \dots, f_n^{(1)}) - h_j^{(1)}(f_1^{(1)}, \dots, f_n^{(1)})$ $= h_j^{(1)}(f_1^{(1)}, \dots, f_n^{(1)}) - h_j^{(1)}(f_1^{(1)}, \dots, f_n^{(1)}) = \underline{0}$ onde $(g+h) \circ f - h \circ f \in L_j$.

Se $g \in L_j'$ allora

$$(f \circ (g+h) - f \circ h)_j^{(1)} = f_j^{(1)}(g_1^{(1)} + h_1^{(1)}, \dots, g_{j-1}^{(1)} + h_{j-1}^{(1)}, h_j^{(1)}, g_{j+1}^{(1)}$$

$$+ h_{j+1}^{(1)}, \dots, g_n^{(1)} + h_n^{(1)}) - f_j^{(1)}(h_1^{(1)}, \dots, h_j^{(1)}, \dots, h_n^{(1)})$$

$$= f_j^{(1)}(\overline{b}_1 X_1, \dots, \overline{b}_{j-1} X_{j-1}, \underline{0}, \overline{b}_{j+1} X_{j+1}, \dots, \overline{b}_n X_n)$$

$$+ f_j^{(1)}(h_1^{(1)}, \dots, h_n^{(1)}) - f_j^{(1)}(h_1^{(1)}, \dots, h_n^{(1)})$$

$$= f_j^{(1)}(\overline{b}_1 X_1, \dots, \overline{b}_{j-1} X_{j-1}, \underline{0}, \overline{b}_{j+1} X_{j+1}, \dots, \overline{b}_n X_n).$$

Osservazione 3. Ogni L_i' un ideale ad un N-sottogruppo di N', tale che $\forall f,\ h \in N'$ $\forall g \in L_i'$ $(g+h) \circ f - h \circ f \in L_i'$.

Dimostrazione. Dall'Osservazione 2 rimane solamente da provare che, per uno $j \in I_n$, $N' \circ L_j' \subseteq L_j'$. Siano $f \in N'$, $g \in L_j'$. Si ha $(f \circ g)_j^{(1)} = f_j^{(1)}(g_1^{(1)}, \dots, g_n^{(1)})$ $= \overline{a}_j \cdot \underline{0} = \underline{0}$ essendo $g_j^{(1)} = \underline{0}$, $f_j^{(1)} = \overline{a}_j X_j$.

2 - Quasi-anelli di Fröhlich

Sia $t \in \mathbb{N}$ tale che $2 \leqslant t \leqslant n$, siano $j_1, j_2, \dots, j_t$ elementi di I_n due a due distinti. Mediante il simbolo $N'_{\{j_1, \dots, j_t\}}$ si denoti il sottoinsieme di N' costituito da tutti gli $f \in N'$ tali che, qualunque sia $2 \leqslant u \leqslant t$, qualunque sia il sottoinsieme $\{j_{k_1}, \dots, j_{k_u}\}$ di cardinalità u di $\{j_1, j_2, \dots, j_t\}$, in ogni $f_i (i \in I_n)$ «mancano» i termini in $X_{j_{k_1}} X_{j_{k_2}} \dots X_{j_{k_u}}$.

Teorema 4. *$N'_{\{j_1, j_2, \dots, j_t\}}$ è un sottoquasi-anello di N'.*

Dimostrazione. È possibile supporre $t \geqslant 3$, poiché la dimostrazione dei casi $t = 2$ è inclusa in esso. Siano l_1, l_2 elementi distinti di $\{j_1, j_2, \dots, j_t\}$, siano $f, g \in N'_{\{j_1, \dots, j_t\}}$. Per $j \in I_n$ si ha $(f \circ g)_j = f_j(g_1, \dots, g_n)$, da cui i termini della $(f \circ g)_j^{(2)}$ sono da determinarsi tra i termini dello sviluppo di

$$\overline{a}_j g_j + f_j^{(2)}(g_1, g_2, \dots, g_n). \tag{2}$$

Si ponga

$$f_j^{(2)}(g_1, g_2, \ldots, g_n) = \sum_{\substack{(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 2}} a_{k_1 k_2 \ldots k_n} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \ldots X_n^{k_n}.$$

Di qui e da (2), i termini della $(f \circ g)_j^{(2)}$ sono tra quelli di:

$$\bar{a}_j \bar{b}_j X_j + \bar{a}_j g_j^{(2)} + \sum_{\substack{(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 2}} a_{k_1 k_2 \ldots k_n} (\bar{b}_1 X_1)^{k_1} (\bar{b}_2 X_2)^{k_2} \ldots (\bar{b}_n X_n)^{k_n}.$$

In $\bar{a}_j g_j^{(2)}$ mancano i termini in $X_{l_1} X_{l_2}$ essendo $g \in N'_{\{j_1, j_2, \ldots, j_t\}}$, mentre se $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $k_{l_1} = 1$, $k_{l_2} = 1$, $k_r = 0$ per $r \notin \{l_1, l_2\}$, allora $a_{k_1 k_2 \ldots k_n} = 0$, essendo $f \in N'_{\{j_1, \ldots, j_t\}}$. Si è allora dimostrato che in $f \circ g$ mancano i termini in $X_{l_1} X_{l_2}$. Continuiamo induttivamente. Sia $3 \leqslant m \leqslant t$, si supponga che, qualunque sia $2 \leqslant u \leqslant m-1$, nella $f \circ g$ manchino i termini in $X_{l_1} X_{l_2} \ldots X_{l_u}$ per ogni sottoinsieme, di cardinalità u, $\{l_1, l_2, \ldots, l_u\}$ di $\{j_1, j_2, \ldots, j_t\}$. Sia $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ un sottoinsieme di cardinalità m di $\{j_1, j_2, \ldots, j_t\}$. Per $j \in I_n$, i termini di $(f \circ g)_j^{(m)}$ sono tra i termini di

$$\bar{a}_j g_j^{(m)} + \sum_{u=2}^{m-1} f_j^{(u)}(g_1^{[m-1]}, g_2^{[m-1]}, \ldots, g_n^{[m-1]}) + f_j^{(m)}(\bar{a}_1 X_1, \bar{a}_2 X_2, \ldots, \bar{a}_n X_n).$$

Per le ipotesi sopra f, g, in $\bar{a}_j g_j^{(m)}$ ed in $f_j^{(m)}(\bar{a}_1 X_1, \bar{a}_2 X_2, \ldots, \bar{a}_n X_n)$ tutti i coefficienti di $X_{v_1} X_{v_2} \ldots X_{v_m}$, sono zero. Per $2 \leqslant u \leqslant m-1$ si ponga

$$f_j^{(u)}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{\substack{(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ k_1 + k_2 + \ldots + k_n = u}} a_{k_1 k_2 \ldots k_n} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \ldots X_n^{k_n}.$$

Quindi

$$f_j^{(u)}(g_1^{[m-1]}, g_2^{[m-1]}, \ldots, g_n^{[m-1]} = \sum_{\substack{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ k_1 + \ldots + k_n = u}} a_{k_1 k_2 \ldots k_n} (g_1^{[m-1]})^{k_1} \ldots (g_n^{[m-1]})^{k_n}. \tag{3}$$

Poiché $u \leqslant m-1$, un termine di (3) in $X_{v_1} X_{v_2} \ldots X_{v_m}$ è del tipo

$$a_{k'_1 k'_2 \ldots k'_n} d_1 d_2 \ldots d_u \tag{4}$$

dove ogni d_j è un termine di qualche $g_i^{[m-1]}$. Nella (4) esiste un $2 \leqslant r \leqslant m-1$, esiste un sottoinsieme $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}\}$, di cardinalità r, di $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m\}$, esiste un $1 \leqslant q \leqslant u$, esiste un $p \in I_n$, tali che d_q è un termine di $g_p^{[m-1]}$ in $X_{v_{i_1}} X_{v_{i_2}} \ldots X_{v_{i_r}}$. A causa delle ipotesi, il coefficiente $(\in R)$ di d_q è nullo, da cui (4) è nullo.

Teorema 5. *Sia R un campo. Allora il semigruppo degli elementi sinistro-invertibili di N' è $N' \backslash L'$; inoltre, N'' è locale.*

Dimostrazione. Si prova che un elemento di N' ha inverso sinistro se e solo se non appartiene ad L'. Sia $g \in N'$. Se $f \in N'$ è tale che $f \circ g = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, allora, dall'espressione (1),

$$\forall i \in I_n \quad \overline{a}_i \overline{b}_i X_i + \overline{a}_i g_i' + f_i'(g_1, g_2, \dots, g_n) = X_i \tag{5}$$

da cui $\overline{a}_i \overline{b}_i = 1 \ \forall i$. Quindi una c. nec. affinché g sia sin. - invertibile in N' è che sia $g \in N' \backslash L'$. Si dimostra che tale condizione è anche sufficiente. Sia $g \in N' \backslash L'$. Vediamo di individuare un $f \in N'$ tale che $f \circ g = (X_1, X_2, \dots, X_n)$; qui i coefficienti in f sono le incognite del problema. Ancora dalle uguaglianze (5) si trae che $\forall \ i \in I_n \ \overline{a}_i \overline{b}_i = 1$, da cui $\overline{a}_i$ è univocamente individuato dallo $\overline{a}_i = \overline{b}_i^{-1}$.

Continuiamo per induzione. Sia $m \in \mathbb{N}$ $m \geqslant 2$. Si supponga che $\forall u \leqslant m-1$ $\forall i \in I_n$ $f_i^{(u)}$ sia univocamente determinata. Sia $j \in I_n$. Si consideri $f_j^{(m)}$

$$f_j^{(m)} = \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ k_1 + \dots + k_n = m}} a_{k_1 \dots k_n} X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}. \tag{6}$$

Risulta che

$$(f \circ g)_j = \overline{a}_j g_j + \sum_{s \geqslant 2} f_j^{(s)}(g_1, g_2, \dots, g_n).$$

Sia $(l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{N}_0^n$ tale che $l_1 + l_2 + \dots + l_n = m$. Il termine in $X_1^{l_1} X_2^{l_2} \dots X_n^{l_n}$ in $(f \circ g)_j$ è la somma dei termini in $X_1^{l_1} X_2^{l_2} \dots X_n^{l_n}$ presenti in

$$\overline{a}_j g_j + \sum_{s=2}^{m} f_j^{(s)}(g_1, g_2, \dots, g_n),$$

poiché qualunque sia $s \geqslant m+1$ ogni termine di $f_j^{(s)}(g_1, g_2, \dots, g_n)$ è di grado totale $\geqslant m+1$, essendo $g_1, g_2, \dots, g_n$ a termine noto zero. Si dimostra che l'unico termine in $X_1^{l_1} X_2^{l_2} \dots X_n^{l_n}$ di

$$f_j^{(m)}(g_1, \dots, g_n) \quad \text{è} \quad a_{l_1 l_2 \dots l_n} \overline{b}_1^{l_1} \ \overline{b}_2^{l_2}, \dots, \overline{b}_n^{l_n} \ X_1^{l_1} X_2^{l_2} \dots X_n^{l_n}.$$

Infatti da (6)

$$\begin{aligned} f_j^{(m)}(g_1, g_2, \dots, g_n) &= f_j^{(m)}(\overline{b}_1 X_1 + g_1', \overline{b}_2 X_2 + g_2', \dots, \overline{b}_n X_n + g_n') \\ &= \sum_{\substack{(k_1, k_2 \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ k_1 + \dots + k_n = m}} a_{k_1 k_2 \dots k_n} (\overline{b}_1 X_1 + g_1')^{k_1} \dots (\overline{b}_n X_n + g_n')^{k_n}. \end{aligned}$$

Nello sviluppo di $a_{l_1 l_2 \dots l_n}(\bar{b}_1 X_1 + g_1')^{l_1} \dots (\bar{b}_n X_n + g_n')^{l_n}$ ogni termine diverso da $a_{l_1 l_2 \dots l_n} \bar{b}_1^{l_1} \bar{b}_2^{l_2} \dots \bar{b}_n^{l_n} X_1^{l_1} X_2^{l_2} \dots X_n^{l_n}$ ha grado totale $\geqslant m+1$, poiché i termini di $g_1', g_2', \dots, g_n'$ hanno tutti grado totale $\geqslant 2$. Se $v_1 + v_2 + \dots + v_n = m$ ($v_i \in \mathbb{N}_0$ $\forall i$), $(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq (l_1, l_2, \dots, l_n)$, allora l'unico termine di grado m nello sviluppo di $a_{v_1 v_2 \dots v_n} \cdot (\bar{b}_1 X_1 + g_1')^{v_1} (\bar{b}_2 X_2 + g_2')^{v_2} \dots\dots (\bar{b}_n + g_n')^{v_n}$ è $a_{v_1 v_2 \dots v_n} \bar{b}_1^{v_1} \bar{b}_2^{v_2} \dots \bar{b}_n^{v_n} X_1^{v_1} X_2^{v_2} \dots X_n^{v_n}$, ma $X_1^{v_1} X_2^{v_2} \dots X_n^{v_n} \neq X_1^{l_1} X_2^{l_2} \dots X_n^{l_n}$. Allora, altri termini in $X_1^{l_1} X_2^{l_2} \dots X_n^{l_n}$ di $f_j(g_1, g_2, \dots, g_n)$ sono da determinarsi tra gli sviluppi degli $f_j^{(s)}(g_1, g_2, \dots, g_n)$ per $1 \leqslant s \leqslant m-1$. Per ipotesi induttiva, tutti i coefficienti di $f_j^{(s)}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sono determinati per ogni $1 \leqslant s \leqslant m-1$; inoltre, tutti i coefficienti di $g_1, g_2, \dots, g_n$ sono noti. Allora, il coefficiente di $X_1^{l_1} X_2^{l_2} \dots X_n^{l_n}$ nello sviluppo di $f_j(g_1, g_2, \dots, g_n)$, coefficiente che chiamiamo $c_{l_1 l_2 \dots l_n}$, è descrivibile nel modo seguente. Sia $A \subseteq R$ il sottoinsieme di R i cui elementi sono i coefficienti di $g_1, g_2, \dots, g_n$ ed i coefficienti degli $f_i^{(s)}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ per $1 \leqslant s \leqslant m-1$. Allora

$$c_{l_1 l_2 \dots l_n} = z + a_{l_1 l_2 \dots l_n} \bar{b}_1^{l_1} \bar{b}_2^{l_2} \dots \bar{b}_n^{l_n}$$

dove z è una somma (finita) di prodotti di elementi di A. Dalla $f \circ g = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, deve essere $c_{l_1 l_2 \dots l_n} = 0$, mentre $\bar{b}_1 \neq 0, \bar{b}_2 \neq 0, \dots, \bar{b}_n \neq 0$; da ciò è determinato unicamente $a_{l_1 l_2 \dots l_n} \in R$.

Da quello che si è potuto dire sino a questo punto, risulta quasi immediato che l'insieme degli elementi sinistro-invertibili in N'' è $N'' \setminus (L' \cup N'')$; come osservato nel paragrafo 2, $L' \cap N''$ è ideale ed N''-sottogruppo, dunque N'' è locale.

4 - Quasi-anelli di Cartan

Per R continuativo unitario, siano $l, u \in \mathbb{N}$, tali che $l^2 \equiv l (\mathrm{mod}\, u)$; sia $B(l, u)$ il sottoinsieme di $R[[X]]_0$ costituito dalle serie formali aventi i coefficienti nulli, tranne al più quelli degli X^j, per $j \in \mathbb{N}$, $j \equiv l (\mathrm{mod}\, u)$.

Teorema 6. *$B(l, u)$ è un sottoquasi-anello di $[R[[x]]_0; +, \circ]$.*

Dimostrazione. Sia $t \in \mathbb{N}$ tale che $l^2 = l + ut$, siano $f, g \in B(l, u)$. Qualunque sia $m \in \mathbb{N}$, esiste un $s \in \mathbb{N}$ tale che il coefficiente di X^m in $f \circ g$ è uguale a quello di X^m nello sviluppo di $f^{[s]} \circ g^{[s]}$. Tenute presenti le ipotesi sopra f, g, $f^{[s]} \circ g^{[s]}$ è una somma (finita) di termini del tipo

$$a_j \cdot (b_{i_1} X^{i_1} + b_{i_2} X^{i_2} + \dots + b_{i_n} X^{i_n})^j \tag{7}$$

dove $j, i_1, i_2, \dots, i_n$ sono elementi di $\mathbb{N}$ congrui ad l mod u.

Si ponga $j = l + zu$, $i_k = l + uv_k$ per $k = 1, 2, \dots, n$. La (7) è a sua volta una somma (finita) di termini del tipo

$$c\cdot X^{i_{h_1}+i_{h_2}+\ldots+i_{h_j}}$$

dove

$$h_1, h_2, \ldots, h_j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Risulta:

$$i_{h_1}+i_{h_2}+\ldots+i_{h_j} = l+uv_{h_1}+l+uv_{h_2}+\ldots+l+uv_{h_j}$$

$$= lj+u\cdot(v_{h_1}+v_{h_2}+\ldots+v_{h_j}) = l\cdot(l+zu)+u\cdot(v_{h_1}+v_{h_2}+\ldots+v_{h_j})$$

$$= l+u\cdot(t+zl+v_{h_1}+v_{h_2}+\ldots+v_{h_j}) \equiv l(\mathrm{mod}\ u).$$

Per ogni $f\in R[[X]]_0^*$ se il termine non nullo di grado piú basso di f è cX^r, si ponga $c=w(f)$, $r=\circ(f)$.

Teorema 7. *Si supponga*:

1) *R dominio di integrità*;

2) *φ una h-funzione di abbinamento sopra R* ([**5**]), *tale che $R^\varphi=[R;\ +,\ \circ']$ sia destro* $(a\circ' b=\varphi_b(a)\cdot b)$;

3) $\varphi(R^*)\subseteq Aut(R)$;

4) $\exp\varphi(R^*)\,|\,u$.

Risulta che è un quasi-anello la $[B(1,u);\ +,\ \circ_1]$ *dove per* $f,g\in B(1,u)$, $g\neq \underline{0}$, $f\circ_1\underline{0}=\underline{0}$, $f\circ_1 g=\overline{\varphi}_b(f)\circ g$, *essendo* $b=w(g)$, $\overline{\varphi}_b$ *l'estensione naturale di* φ_b *a* $B(1,u)\cdot[B(1,u);\ +,\ \circ_1]$ *è locale se* R^φ *è un quasi-corpo.*

Dimostrazione. Per $f,g,h\in B(1,u)^*$ $(f\circ_1 g)\circ_1 h=\overline{\varphi}_{w(h)}(\overline{\varphi}_{w(g)}(f)\circ g)\circ h$ $=(\overline{\varphi}_{w(h)}\circ\overline{\varphi}_{w(g)})(f)\circ\overline{\varphi}_{w(h)}(g)\circ h=$

$$=\overline{\varphi}_{w(h)\circ' w(g)}\circ\overline{\varphi}_{w(h)}(g)\circ h \tag{8}$$

$f\circ_1(g\circ_1 h)=f\circ_1(\overline{\varphi}_{w(h)}(g)\circ h)=$

$$=\overline{\varphi}_{w(\overline{\varphi}_{w(h)}(g)\circ_1 h)}(f)\circ\overline{\varphi}_{w(h)}(g)\circ h \tag{9}$$

dove $w(\overline{\varphi}_{w(h)}(g)\circ h)=w(\overline{\varphi}_{w(h)}(g))\cdot w(h)^{\circ(g)}=\varphi_{w(h)}(w(g))\cdot w(h)^{\circ(g)}$. Poiché $\circ(g)\equiv 1$ (mod $\exp\varphi(R^*)$) risulta che

$$\varphi_{w(h)^{\circ(g)}}=(\varphi_{w(h)})^{\circ(g)}=\varphi_{w(h)}.$$

Allora

$$\overline{\varphi}_{w(\overline{\varphi}_{w(h)}(g) \circ_1 h)} = \overline{\varphi}_{\varphi_{w(h)}(w(g)) \cdot w(h) \circ (g)} = \overline{\varphi_{\varphi_{w(h)(w(g))}} \circ \varphi_{w(h) \circ (g)}} = \overline{\varphi_{w(g)} \circ \varphi_{w(h)}} = \overline{\varphi_{w(g)} \circ'}_{w(h)}.$$

Di qui dalle (8), (9), si deduce l'associativitá della $\circ_1$.

References

[1] H. Cartan, *Theory of analytic funcyions*, Addison-Wesley, Reading Mass. 1963.

[2] A. Fröhlich, *Some examples of near-rings*, Oberwolfach 1968.

[3] C. J. Maxson, *On local near-rings*, Math. Z. **106** (1968), 197-205.

[4] C. J. Maxson, *Dickson near-rings*, J. Algebra **14** (1970), 152-169.

[5] H. Wähling, *Theorie der Fastkörper*, Thales-Verlag, Essen 1987.

Summary

We consider the near-rings of formal power series of [**2**]. *Subsets of they, constituted by elements in which certain classes of coefficients are null, are demonstrated to be sub-near-rings; in the case of Cartan's near-rings, for some of they modifications in the sense of the «Dickson process»* ([**5**]) *are possible.*

* * *