Riv. Mat. Univ. Parma (6) 2 (1999), 49-55

CARLO SILLI (*)

Alcune osservazioni sul teorema delle forze vive nei continui bidimensionali. Una rettifica (**)

1 - Introduzione

C. Silli in un suo lavoro [**1**] ([1]) in collaborazione con P. Cargiolli esamina il teorema delle forze vive in un continuo bidimensionale in cui nella configurazione attuale ci sia un fronte di discontinuità per alcune grandezze caratteristiche del fenomeno in esame, teorema che in generale non è valido nella sua espressione classica quando siamo in presenza di discontinuità [**2**].

Nella redazione di questo lavoro gli Autori nel paragrafo **3** sono caduti in un errore materiale, errore che modifica solo parzialmente i risultati ottenuti nello stesso paragrafo **3** e nel lavoro, paragrafo questo che riportiamo al punto 2 nella forma rettificata.

2 - Il caso della superficie materiale con struttura

a) Sia ora S un continuo bidimensionale, cioè una superficie materiale in generale non perfettamente flessibile ed anche dotata di struttura, in cui lo sforzo interno è individuato in ogni suo punto da due sforzi $\boldsymbol{t}_1$ e $\boldsymbol{t}_2$ e da due momenti $\boldsymbol{M}_1$ e $\boldsymbol{M}_2$, vettori tutti questi non necessariamente situati nel piano tangente, soggetto oltre che a forze anche a momenti esterni distribuiti e tale che ogni elemento σ'' oltre che di una velocità di traslazione $\boldsymbol{v}$ sia dotato di una velocità di rotazione $\boldsymbol{\omega}$.

(*) Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, Italy.
(**) Ricevuto il 15 Marzo 1999. Classificazione AMS 73 D 20. Lavoro eseguito nell'ambito dei fondi di Ateneo.
([1]) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta al termine della nota.

Siano ora, durante il moto, continue tutte le grandezze del fenomeno in esame.

La *prima equazione cardinale* per una generica sottosuperfice σ della configurazione attuale σ_t del continuo bidimensionale S in esame di contorno γ è:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\sigma \varrho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma = \int_\sigma \varrho \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{t}\,\mathrm{d}\gamma\,, \tag{2.1}$$

con ϱ densità superficiale, $\boldsymbol{f}$ forza specifica di massa e con $\boldsymbol{t}$ sforzo che $\sigma_t - \sigma$ esercita su σ attraverso il contorno γ.

Si ha poi per la *seconda equazione cardinale* sempre per $\sigma \in \sigma_t$, riferita a un centro di riduzione O fisso:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\sigma \varrho\{(P-O)\wedge \boldsymbol{v} + \delta^2\boldsymbol{\omega}\}\,\mathrm{d}\sigma &= \int_\sigma \varrho(P-O)\wedge \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\sigma + \\ &+ \int_\gamma (Q-O)\wedge \boldsymbol{t}\,\mathrm{d}\gamma + \int_\sigma \varrho \boldsymbol{m}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}\gamma\,,\end{aligned} \tag{2.2}$$

dove P è il generico punto di σ, Q il generico punto di γ, δ il giratore d'inerzia dell'elemento di superficie σ'' di S in σ_t rispetto alla parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ per σ'' stesso, $\varrho\boldsymbol{m}$ il momento specifico esterno distribuito, $\boldsymbol{M}$ il momento interno e dove nel momento della quantità di moto è stato aggiunto il termine polare.

Per il lemma di Cauchy per superficie materiali non necessariamente piane [**3**], che è $\boldsymbol{t}_n = \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{n}$, e per il teorema della divergenza sempre per queste superficie [**4**] si ha:

$$\int_\gamma \boldsymbol{t}_n\,\mathrm{d}\gamma = \int_\sigma \mathrm{div}\ \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\,\mathrm{d}\sigma\,,$$

con $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$ sempre tensore degli sforzi $\boldsymbol{t}_1$ e $\boldsymbol{t}_2$ nella superficie in esame.

Dalla precedente (2.1) si ha quindi per l'*equazione di moto*:

$$\varrho\boldsymbol{a} = \varrho\boldsymbol{f} + \mathrm{div}\ \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\,, \tag{2.1$'$}$$

dove è per la divergenza in questo caso unica:

$$\mathrm{div}\ \underset{\sim}{\boldsymbol{T}} = \left(\frac{\partial T^{\alpha\gamma}}{\partial x^\alpha} + T^{\beta\gamma}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\alpha\end{Bmatrix} + T^{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\gamma\\ \beta\alpha\end{Bmatrix}\right)\frac{\partial P}{\partial x^\gamma}\,,$$

con $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$; (x_1, x_2) sistema di coordinate curvilinee tracciate sulla configurazione attuale σ_t di S, x_3 terza coordinata curvilinea ortogonale a σ_t, $T^{\lambda\mu}$

componenti scalari, $\boldsymbol{T}^i$ componenti vettoriali sempre controvarianti rispetto a (x_1, x_2, x_3) del tensore spaziale $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$ degli sforzi $\boldsymbol{t}_1$ e $\boldsymbol{t}_2$ e $\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$ simboli di Kristoffel di seconda specie.

Analogamente per il lemma di Cauchy per i momenti nella superficie in esame e sempre per il teorema della divergenza si ha:

$$\int_\gamma \boldsymbol{M}_n \, \mathrm{d}\gamma = \int_\sigma \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{M}} \, \mathrm{d}\sigma ,$$

con $\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}$ tensore dei momenti $\boldsymbol{M}_1$ e $\boldsymbol{M}_2$ nella superficie in esame.

Ancora dalla (2.2) e per la (2.1)$'$, nell'ipotesi che il giratore δ di σ'' *non dipenda dal tempo t* (ipotesi ad esempio verificata nel caso in cui S è inestendibile), si ha la relazione puntuale:

$$\varrho\delta^2 \dot{\boldsymbol{\omega}} = \varrho \boldsymbol{m} + \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{M}} - \boldsymbol{T}^i \wedge \frac{\partial P}{\partial x^i} , \tag{2.2$'$}$$

dove è analogamente anche per questa divergenza unica:

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{M}} = \left(\frac{\partial M^{\alpha\gamma}}{\partial x^\alpha} + M^{\beta\gamma} \left\{ {\alpha \atop \beta\alpha} \right\} + M^{\alpha\beta} \left\{ {\gamma \atop \beta\alpha} \right\} \right) \frac{\partial P}{\partial x^\gamma} ,$$

con $M^{\lambda\mu}$ componenti scalari controvarianti rispetto a (x_1, x_2, x_3) del tensore spaziale $\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}$ dei momenti.

Dall'equazione di moto, moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{v}$, integrando su σ e tenendo conto della relazione [**5**]:

$$\operatorname{div} (\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^T + tr (\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \ \operatorname{grad} \boldsymbol{v}) ,$$

con $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ tensore doppio e $\boldsymbol{v}$ vettore entrambi in S_3, si ha per la porzione σ di contorno γ del continuo bidimensionale S nella configurazione attuale σ_t la relazione:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{2} \int_\sigma \varrho v^2 \, \mathrm{d}\sigma = \int_\sigma \varrho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{n} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\gamma - \int_\sigma tr (\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T \operatorname{grad} \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\sigma .$$

Dalla (2.2)$'$, con ragionamento del tutto simile a quello seguito per ottenere dall'equazione di moto (2.1)$'$ la precedente, si ha ora per la porzione σ di contorno

γ di S in σ_t l'ulteriore relazione:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_\sigma \varrho\delta^2\omega^2\,\mathrm{d}\sigma = \int_\sigma \varrho\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$+\int_\gamma \boldsymbol{n}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\gamma - \int_\sigma tr(\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\operatorname{grad}\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}\sigma - \int_\sigma \boldsymbol{T}^i\wedge\frac{\partial P}{\partial x^i}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

Sommando membro a membro quest'ultima con la precedente si ha:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_\sigma \varrho(v^2+\delta^2\omega^2)\,\mathrm{d}\sigma = \int_\sigma \varrho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$+\int_\gamma \boldsymbol{n}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\gamma - \int_\sigma tr(\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\operatorname{grad}\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\sigma - \int_\sigma \boldsymbol{T}^i\wedge\frac{\partial P}{\partial x^i}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$+\int_\sigma \varrho\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{n}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\gamma - \int_\sigma tr(\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\operatorname{grad}\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}\sigma\,,$$

che è il *teorema delle forze vive* nel caso del continuo S bidimensionale in esame nell'ipotesi della continuità di tutte le grandezze caratteristiche e dove l'energia cinetica T e il momento della quantità di moto $\boldsymbol{K}$, per la porzione σ di S in σ_t, sono date da:

$$T = \frac{1}{2}\int_\sigma \varrho(v^2+\delta^2\omega^2)\,\mathrm{d}\sigma\,, \qquad \boldsymbol{K} = \int_\sigma \varrho\{(P-O)\wedge\boldsymbol{v}+\delta^2\boldsymbol{\omega}\}\,\mathrm{d}\sigma\,. \tag{2.3}$$

b) Nelle stesse ipotesi di cui al precedente punto a) per la superficie materiale S supponiamo che nella configurazione attuale σ_t al tempo t vi sia una linea di discontinuità γ_t per alcune grandezze caratteristiche del fenomeno in esame, linea questa che divide in due la superficie σ_t stessa, essendo ancora U_N la velocità di propagazione della discontinuità attraverso γ_t.

α) Dalla *prima equazione cardinale* (2.1) si deduce, in modo analogo a quanto fatto per la membrana, *l'equazione di moto* del continuo S che è ancora la (2.1)$'$:

$$\varrho\boldsymbol{a} = \varrho\boldsymbol{f} + \operatorname{div}\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\,, \tag{2.4}$$

relazione questa che vale in ogni punto P della configurazione σ_t che non si trovi sulla linea di discontinuità γ_t. Dalla *seconda equazione cardinale* (2.2) ne discende ancora:

$$\varrho\delta^2\dot{\boldsymbol{\omega}} = \varrho\boldsymbol{m} + \operatorname{div}\underset{\sim}{\boldsymbol{M}} - \boldsymbol{T}^{\mathrm{i}} \wedge \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{i}}}\,, \tag{2.5}$$

valida anche questa come la precedente in tutti i punti P di S in σ_t distinti da γ_t. La (2.4) e la (2.5), dedotte rispettivamente dalla prima e dalla seconda equazione cardinale sono valide solo in punti della superfie σ_t distinti dalla linea di discontinuità γ_t poiché le operazioni che si fanno per ottenerle richiedano la regolarità e continuità di tutte le grandezze.

β) Con il procedimento usato nella prima parte del punto precedente, ma tenendo conto che ora c'è la linea di discontinuità γ_t, si ha ora dalla (2.4) per la sottosuperficie $\sigma \in \sigma_t$ delimitata dal contorno γ e tagliata dalla linea di discontinuità γ_t la relazione:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{dt}\,\frac{1}{2}\int_\sigma \varrho v^2\,\mathrm{d}\sigma + \int_{\gamma_t} \frac{\varrho_0}{2J'}\,[v^2]\,U_N\,\mathrm{d}\gamma \\ &= \int_\sigma \varrho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{n}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\gamma - \int_\sigma tr\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\operatorname{grad}\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\sigma - \int_{\gamma_t}[\boldsymbol{n}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\boldsymbol{v}]\,\mathrm{d}\gamma\,.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Dalla (2.5), moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{\omega}$, integrando sulla sottosuperficie σ di cui sopra e tenendo conto anche quì della discontinuità attraverso γ_t, si ha con procedimento analogo a quello seguito nella seconda parte del punto precedente l'ugualianza:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{dt}\,\frac{1}{2}\int_\sigma \varrho\delta^2\omega^2\mathrm{d}\sigma + \int_{\gamma_t} \frac{\varrho_0}{2J'}\,[\delta^2\omega^2]\,U_N\mathrm{d}\gamma \\ &= \int_\sigma \varrho\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{n}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\gamma - \int_\sigma tr\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\operatorname{grad}\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}\sigma - \int_\sigma \boldsymbol{T}^i\wedge\frac{\partial P}{\partial x^i}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\sigma - \int_{\gamma_t}[\boldsymbol{n}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\boldsymbol{\omega})]\,\mathrm{d}\gamma\,.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Sommando membro a membro le precedenti (2.6) e (2.7) si ha:

$$\frac{\mathrm{d}}{dt}\,\frac{1}{2}\int_\sigma \varrho(v^2+\delta^2\omega^2)\,\mathrm{d}\sigma + \int_{\gamma_t} \frac{\varrho_0}{2J'}\,[v^2+\delta^2\omega^2]\,U_N\,\mathrm{d}\gamma$$

$$= \int_\sigma \varrho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{n}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\gamma - \int_\sigma tr\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\operatorname{grad}\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\sigma - \int_\sigma \boldsymbol{T}^i\wedge\frac{\partial P}{\partial x^i}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$+ \int_\sigma \varrho\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{n}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\gamma - \int_\sigma tr\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\operatorname{grad}\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}\sigma - \int_{\gamma_t}[\boldsymbol{n}\cdot(\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\boldsymbol{v} + \underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\boldsymbol{\omega})]\,\mathrm{d}\gamma\,,$$

relazione questa che ci dà il *teorema delle forze vive* per la porzione σ della configurazione attuale σ_t del continuo bidimensionale S con struttura in esame quando questa porzione è tagliata da una linea di discontinuità essendo ancora l'energia cinetica T e il momento della quantità di moto $\boldsymbol{K}$ dati dalle (2.3).

Risulta anche quì che in presenza di una linea di discontinuità il *teorema delle forze vive non vale più nella sua forma classica.*

Poiché anche quì le considerazioni ora fatte valgono per una qualsiasi sottosuperficie σ_t di σ, che sia tagliata dal fronte d'onda γ_t, si ha che la *condizione* affinché anche in questo caso della dicontinuità il teorema delle forze vive abbia l'espressione classica è che risulti:

$$\frac{\varrho_0}{2J'}[v^2+\delta^2\omega^2]\,U_N+[\boldsymbol{n}\cdot(\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\boldsymbol{v}+\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\boldsymbol{\omega})]=0\,. \tag{2.8}$$

γ) Si ha ora per il primo principio della termodinamica per la porzione σ del continuo S nella configurazione attuale σ_t:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{1}{2}\int_\sigma \varrho(v^2+\delta^2\omega^2+2e)\,\mathrm{d}\sigma=\int_\sigma h\,\mathrm{d}\sigma+\int_\gamma \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma$$

$$+\int_\sigma \varrho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma+\int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma+\int_\sigma \varrho\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\sigma+\int_\gamma \boldsymbol{\omega}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma\,,$$

col solito e noto significato dei simboli.

Sempre nell'ipotesi che la porzione σ della configurazione attuale σ_t sia tagliata dalla linea di discontinuità γ_t si ha col procedimento usato più volte dalla precedente la relazione di discontinuità:

$$\varrho_0[e]\,U_N+\frac{\varrho_0}{2}[v^2+\delta^2\omega^2]\,U_N+[\boldsymbol{v}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\omega}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{n}]\,J'+[\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}]\,J'=0\,,$$

con $J'=\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\Gamma}$ dove $d\gamma$ è un arco elementare di σ_t e $\mathrm{d}\Gamma$ il suo corrispondente nella configurazione di riferimento Σ.

Relazione questa da cui per confronto con la (2.8) non si può dedurre, a differenza di quanto avveniva in una membrana, una relazione che implichi le sole grandezze termiche e che sia *condizione caratteristica per la validità del teorema delle forze vive nella forma classica* quando siamo in presenza di un fronte di discontinuità.

Bibliografia

[1] C. Silli e P. Cargiolli, *Alcune osservazioni sul teorema delle forze vive nei continui bidimensionali*, Riv. Mat. Univ. Parma (5) **2** (1993), 149-158.

[2] T. Manacorda, *Qualche osservazione sulle equazioni di bilancio dei continui in presenza di un'onda d'urto*, Nota Interna Ist. Mat. Appl. Fac. Ing. Univ. Pisa (1983).

[3] P. M. Naghdi, *The Theory of Shell and Plates*, S. Flugge, Encyclopedia of Physics 6a/2, C. Truesdell, Mechanics of Solids 2, Springer, Berlin 1972.

[4] A. E. Green and W. Zerna, *Theoretical elasticity*, Clarendon Press, Oxford 1968.

[5] M. E. Gurtin, *The linear theory of elasticity*, S. Flugge, Encyclopedia of Physics 6a/2, C. Truesdell, Mechanics of Solids 2, Springer, Berlin 1972.

Abstract

In the present paper the author corrects an error in the integrand of a curvilinear integral used in an earlier paper and deduces its consequences. The error appeared in an earlier paper entitled "Alcune osservazioni sul teorema delle forze vive nei continui bidimensionali", of the author in collaboration with P. Cargiolli, pubblished in the same Journal of the year 1993.

* * *