Riv. Mat. Univ. Parma (6) **1** (1998), 81-101

SIMONA SANFELICI (*)

Semidiscretizzazione di Galerkin di sistemi parabolico-ordinari semilineari (**)

1 - Introduzione

In questo lavoro si studia una classe abbastanza generale di problemi di reazione-diffusione descritti da sistemi di equazioni paraboliche ed ordinarie semilineari debolmente accoppiate, con condizioni di Neumann non omogenee e non linearità lipschitziana. Esempi di sistemi di questo tipo possono essere trovati in elettrocardiologia [**2**], [**3**].

Risultati di esistenza ed unicità della soluzione di tali sistemi sono stati individuati in precedenza da Pao [**6**]. Nel Paragrafo 2 si analizza la buona posizione di questi problemi mediante la teoria dei semigruppi [**4**], fornendo vari risultati di regolarità per la soluzione.

Nel Paragrafo 3 si definisce il metodo di semidiscretizzazione di Galerkin continuo nel tempo e si analizzano le sue proprietà di convergenza in vari spazi di funzioni V_h di dimensione finita, ottenendo stime dell'errore ottimali in norma L^2.

2 - Sistemi semilineari parabolico-ordinari debolmente accoppiati

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, con frontiera $\partial\Omega$ di classe $C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$. Indichiamo con $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)^T$ la normale esterna a $\partial\Omega$. Consideriamo il seguente sistema semilineare di n_1 equazioni paraboliche ed n_2 equazioni differenziali ordinarie debolmente accoppiate, con condizioni al bordo di Neumann

---

(*) Dipartimento di Matematica, Università di Parma, Via M. D'Azeglio 85, 43100 Parma, Italy.

(**) Ricevuto il 17.7.1998. Classificazione AMS 35 K 57, 65 N 30.

non omogenee

(1)
$$\begin{cases} \partial_t u_i + \mathcal{L}_i u_i = g_i(x, t, \boldsymbol{u}) & \text{in } \Omega \times]0, T] \quad (i = 1, \ldots, n_1), \\ \partial_t u_i = g_i(x, t, \boldsymbol{u}) & \text{in } \Omega \times]0, T] \quad (i = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2), \\ \mathcal{B}_i u_i = q_i(x, t) & \text{in } \partial\Omega \times]0, T] \quad (i = 1, \ldots, n_1), \\ u_i(x, 0) = u_{i,0}(x) & \text{in } \Omega \quad (i = 1, \ldots, n_1 + n_2), \end{cases}$$

dove $\mathcal{L}_i$ e $\mathcal{B}_i$, per $i = 1, \ldots, n_1$, sono operatori della forma

$$\mathcal{L}_i w := -\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}^{(i)}(x) \frac{\partial w}{\partial x_k}\right) + \sum_{j=1}^{n} b_j^{(i)}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} + a_0^{(i)}(x)\, w\,,$$

$$\mathcal{B}_i w := \frac{\partial w}{\partial \nu_{\mathcal{L}}} = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^{(i)}(x) \frac{\partial w}{\partial x_k} \nu_j;$$

supponiamo che le matrici $(a_{jk}^{(i)})$ siano simmetriche e che gli operatori $\mathcal{L}_i$ siano *uniformemente ellittici in* $\overline{\Omega}$, cioè esistano delle costanti $\alpha_0^{(i)} > 0$ tali che

(2)
$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^{(i)}(x)\, \xi_j \xi_k \geqslant \alpha_0^{(i)} |\xi|^2$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ e ogni $x \in \Omega$, che i coefficienti $b_j^{(i)}$ e $a_0^{(i)}$ siano funzioni assegnate, continue in $\overline{\Omega}$, che $a_{jk}^{(i)} \in C^1(\overline{\Omega})$ e che i termini al bordo $q_i(x, t) \in C^{1+\alpha}([0, T]; C^{1+\alpha}(\partial\Omega))$. Da (2) segue che le condizioni al bordo sono di tipo *non tangenziale*, cioè

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}^{(i)} n_j\right) n_k \neq 0\,, \qquad \forall x \in \partial\Omega\,.$$

Trattiamo dapprima il caso omogeneo $q_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n_1$.

Il problema dell'esistenza, unicità e regolarità della soluzione di (1) può essere ricondotto allo studio di un'equazione di evoluzione nello spazio $X = C(\overline{\Omega})^{n_1 + n_2}$, definendo la *realizzazione di* $-\mathcal{L}_i$ *in* $X_i = C(\overline{\Omega})$ *con condizioni al contorno oblique del primo ordine omogenee*

$$D(A_i) := \left\{ u \in \bigcap_{p \geqslant 1} W^{2,p}(\Omega) \colon \mathcal{L}_i u \in C(\overline{\Omega}), \quad \mathcal{B}_i u = 0 \ \text{ su } \partial\Omega \right\}, \qquad A_i u = -\mathcal{L}_i u\,.$$

Ricordiamo che, per $n = 1$, $D(A_i) = \{u \in C^2(\overline{\Omega}) \colon \mathcal{B}_i u_{|\partial\Omega} = 0\}$.

Premettiamo alcune definizioni, per le quali rimandiamo a [4].

Per ogni $i = 1, \dots, n_1$, definiamo l'*insieme risolvente* $\varrho(A_i)$ e l'*operatore risolvente* $R(\lambda, A_i)$ come

$$\varrho(A_i) := \{\lambda \in \mathbb{C}: \ \exists (\lambda I - A_i)^{-1} \in L(X_i)\},$$

$$R(\lambda, A_i) := (\lambda I - A_i)^{-1}, \qquad \forall \lambda \in \varrho(A_i),$$

dove $L(X_i)$ è lo spazio dei funzionali lineari e continui dello spazio di Banach X_i in sé.

Definizione 2.1. *Sia X uno spazio di Banach complesso, con norma $\|\cdot\|_X$. Un operatore lineare $A: D(A) \subset X \to X$ è detto settoriale se esistono delle costanti $\omega \in \mathbb{R}$, $\theta \in]\pi/2, \pi[$, $M > 0$ tali che*

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \varrho(A) \supset S_{\theta, \omega} := \{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda \neq \omega, \ |\arg(\lambda - \omega)| < \theta\}, \\ \text{(ii)} \quad \|R(\lambda, A)\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{M}{|\lambda - \omega|}, \quad \forall \lambda \in S_{\theta, \omega}. \end{cases}$$

Dato un operatore A settoriale in X, definiamo gli spazi intermedi tra X e $D(A)$ $(0 < \alpha < 1)$

$$D_A(\alpha, \infty) := \{x \in X: t \mapsto v(t) = \|t^{1-\alpha} A e^{tA} x\|_X \in L^\infty(0, 1)\},$$

dotati della norma

$$\|x\|_{D_A(\alpha, \infty)} = \|x\|_X + \|v\|_{L^\infty(0, 1)}.$$

Si dimostra che $D(A) \subset D_A(\alpha, \infty) \subset \overline{D(A)}$, $0 < \alpha < 1$.

Si dimostra ([4], Corollario 3.1.24 (ii), Teoremi 3.1.30 e 3.1.31) che A_i è settoriale in X_i e che

$$\overline{D(A_i)} = C(\overline{\Omega}), \qquad D_{A_i}(\alpha, \infty) = \begin{cases} C^{2\alpha}(\overline{\Omega}), & \text{se } \alpha < 1/2, \\ C^{2\alpha}_{\mathcal{B}_i}(\overline{\Omega}), & \text{se } \alpha > 1/2. \end{cases}$$

Il pedice $\mathcal{B}_i$ va inteso nella usuale accezione: se Y è un qualsiasi spazio di Banach contenuto in $C^1(\overline{\Omega})$, indichiamo con $Y_{\mathcal{B}_i}$ il sottospazio di Y costituito dalle funzioni φ tali che $\mathcal{B}_i \varphi$ si annulla su $\partial\Omega$.

Per semplicità di esposizione, limitiamo lo studio al caso di un sistema del tipo (1) con $n_1 = 1$ e $n_2 = 2$. I risultati che dimostreremo possono essere facilmente estesi al caso generale.

Definiamo l'operatore A nello spazio X

$$D(A) = D(A_1) \times C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}), \qquad A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dove 0 rappresenta l'*operatore nullo*.

Teorema 2.2. *L'operatore A è settoriale in X e $\overline{D(A)} = X$.*

Dimostrazione. Per quanto già osservato sopra, A_1 è *settoriale* in X_1 e $\overline{D(A_1)} = C(\overline{\Omega})$; d'altra parte, anche l'operatore nullo è settoriale in $C(\overline{\Omega})$, poiché

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}: \quad R(\lambda, 0) = (\lambda I)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I, \qquad \text{e} \qquad \varrho(0) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

e quindi la Definizione 2.1 è soddisfatta con

$$\varrho(0) \supset S_{\theta, 0} \quad \forall \theta \in]\pi/2, \pi[, \qquad \|R(\lambda, 0)\|_{L(C(\overline{\Omega}))} = \frac{1}{|\lambda|} \|I\| = \frac{1}{|\lambda|},$$

cioè $\omega = 0$ e $M = 1$. Di conseguenza, anche l'operatore prodotto A è settoriale. Infatti l'insieme risolvente di A è l'insieme dei $\lambda \in \mathbb{C}$ per i quali per ogni $f \in X$ esiste un unico $u = (u_1, u_2, u_3) \in D(A)$ tale che

$$\lambda u - Au = f = (f_1, f_2, f_3) \in X$$

e inoltre u dipende con continuità da f. Quindi $\varrho(A) = \varrho(A_1) \setminus \{0\}$ e

$$R(\lambda, A) = \begin{pmatrix} R(\lambda, A_1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} I & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} I \end{pmatrix},$$

e si ha

$$\|R(\lambda, A) f\|_X = \|R(\lambda, A_1)\, f_1\|_{C(\overline{\Omega})} + \|\frac{1}{\lambda} f_2\|_{C(\overline{\Omega})} + \|\frac{1}{\lambda} f_3\|_{C(\overline{\Omega})}$$

$$\leqslant \frac{M^{(1)}}{|\lambda - \omega^{(1)}|} \|f_1\|_{C(\overline{\Omega})} + \frac{1}{|\lambda|} \|f_2\|_{C(\overline{\Omega})} + \frac{1}{|\lambda|} \|f_3\|_{C(\overline{\Omega})}$$

$$\leqslant \max\left(\frac{M^{(1)}}{|\lambda - \omega^{(1)}|}, \frac{1}{|\lambda|}\right) \|f\|_X. \qquad \blacksquare$$

Osservazione 2.3. *Si dimostra facilmente che* $D_A(\alpha, \infty) = D_{A_1}(\alpha, \infty) \times C(\overline{\Omega})^2$, $0 < \alpha < 1$.

Poniamo in (1)

$$u(t)(x) := \boldsymbol{u}(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))^T,$$

$$f(t, u)(x) := (g_1(x, t, \boldsymbol{u}(x)), g_2(x, t, \boldsymbol{u}(x)), g_3(x, t, \boldsymbol{u}(x)))^T,$$

$$u_0 := (u_{1,0}(x), u_{2,0}(x), u_{3,0}(x))^T.$$

Si ottiene l'equazione di evoluzione astratta (parabolica semilineare)

$$(3) \qquad \begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), & t \in]0, T], \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Si dimostra [4] il seguente risultato di esistenza e unicità locale in forma astratta della soluzione di (3).

Teorema 2.4. *Siano* $A: D(A) \subset X \to X$ *un operatore settoriale e* $f: [0, T] \times X \to X$ *una funzione continua e localmente lipschitziana rispetto ad* u

$$(4) \qquad \begin{gathered} \forall R > 0, \quad \exists L = L(R) > 0 \quad \text{tale che} \\ \|f(t, u) - f(t, v)\|_X \leqslant L\|u - v\|_X, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall u, v \in B(0, R), \end{gathered}$$

dove $B(0, R)$ *rappresenta la palla di centro* 0 *e raggio* R *in* X. *Supponiamo inoltre che esista* $\alpha \in (0, 1)$ *tale che per ogni* $R > 0$ *si abbia*

$$(5) \qquad \|f(t, v) - f(s, v)\|_X \leqslant C(R)(t - s)^\alpha, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \quad \|v\|_X \leqslant R.$$

Valgono le seguenti affermazioni:

(i) *se* $u_0 \in \overline{D(A)}$, *allora* (3) *ammette un'unica soluzione classica locale massimale* $(0 < T' \leq T)$

$$u \in C([0, T'[; X) \cap C(]0, T'[; D(A)) \cap C^1(]0, T'[; X);$$

(ii) *se* $u_0 \in D(A)$ *e* $Au_0 + f(0, u_0) \in \overline{D(A)}$, *allora* u *è soluzione stretta massimale di* (3)

$$u \in C([0, T'[; D(A)) \cap C^1([0, T'[; X);$$

(iii) *infine se* $u_0 \in D(A)$ *e* $Au_0 + f(0, u_0) \in D_A(\alpha, \infty)$, *per qualche* $\alpha \in (0, 1)$, *allora per ogni* $b < T'$ *si ha*

$$u', Au \in C^{\alpha}([0, b]; X), \qquad u' \in B([0, b]; D_A(\alpha, \infty)),$$

dove $B([a, b]; Y)$ *è lo spazio delle funzioni limitate:* $[a, b] \to Y$.

L'esistenza di una soluzione globale può essere garantita introducendo varie ipotesi sul termine non lineare; ricordiamo ad esempio il seguente

Teorema 2.5. *Supponiamo che esista* $C > 0$ *tale che*

$$\|f(t, u)\|_X \leq C(1 + \|u\|_X), \qquad \forall u \in X, \quad \forall t \in [0, T]; \tag{6}$$

sia $u: [0, T'[\to X$ *una soluzione locale di* (3). *Allora* u *è limitata in* $[0, T'[$ *con valori in* X *e pertanto è soluzione globale di* (3).

Applichiamo i teoremi astratti 2.4 e 2.5 al problema di reazione diffusione (1), attraverso la formulazione astratta (3), precisando le ipotesi sui dati che garantiscono l'esistenza, unicità e regolarità della sua soluzione.

Supponiamo che le funzioni g_i, $i = 1, 2, 3$, siano continue e soddisfino la seguente condizione $(0 < \alpha < 1)$

per ogni $R > 0$ *esistono delle costanti* $K_i = K_i(R)$ *positive tali che*

$$|g_i(x, t, \boldsymbol{u}) - g_i(x, s, \boldsymbol{w})| \tag{7}$$

$$\leq K_i(|t-s|^{\alpha} + |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}|_1) \qquad per\ x \in \overline{\Omega}, \quad t, s \in [0, T], \quad |\boldsymbol{u}|_1, |\boldsymbol{w}|_1 \leq R,$$

dove $|\boldsymbol{u}|_1 = \sum_{i=1}^{3} |u_i|$.

Teorema 2.6. *Nelle ipotesi* (7), *valgono le seguenti affermazioni*:

(i) *se* $u_{i,0} \in C(\overline{\Omega})$, *per* $i = 1, 2, 3$, *allora* (1) *con* $q_i = 0$ *ammette un'unica soluzione classica locale massimale* $\boldsymbol{u}$ *continua in* $\overline{\Omega} \times [0, T'[$, *con* $\boldsymbol{u}$ *derivabile rispetto a* t *in* $\overline{\Omega} \times]0, T'[$ *e* $u_1(\cdot, t) \in W^{2,p}(\Omega)$ *per ogni* $p \geq 1$ *e* $0 < t < T' < T$;

(ii) *se* $u_{1,0} \in \bigcap_{p \geq 1} W^{2,p}(\Omega)$, $\mathcal{B}_1 u_{1,0} = 0$, $u_{2,0}, u_{3,0} \in C(\overline{\Omega})$ *e* $\mathcal{L}_1 u_{1,0} \in C(\overline{\Omega})$, *allora* $\boldsymbol{u}$ *è soluzione stretta di* (1), *cioè* $(u_i)_t$, $\mathcal{L}_1 u_1 \in C(\overline{\Omega} \times [0, T'[)$, *per* $i = 1, 2, 3$;

(iii) *infine se* $u_{1,0} \in \bigcap_{p \geq 1} W^{2,p}(\Omega)$, $\mathcal{B}_1 u_{1,0} = 0$, $u_{2,0}, u_{3,0} \in C(\overline{\Omega})$ *e* $-\mathcal{L}_1 u_{1,0} + g_1(\cdot, 0, \boldsymbol{u}_0) \in C^{2\alpha}(\overline{\Omega})$, *per qualche* $\alpha \in (0, 1/2)$, *oppure* $-\mathcal{L}_1 u_{1,0} + g_1(\cdot, 0, \boldsymbol{u}_0) \in C^{2\alpha}_{\mathcal{B}_1}(\overline{\Omega})$, *per qualche* $\alpha \in (1/2, 1)$, *allora* $\partial_t u_1$ *appartiene a* $C^{2\alpha, \alpha}(\overline{\Omega} \times [0, b])$, $\mathcal{A}_1 u_1$ *appartiene a* $C^{0, \alpha}(\overline{\Omega} \times [0, b])$, *per ogni* $b < T'$.

Dimostrazione. Dall'ipotesi (7) segue che $f: [0, T] \times X \to X$ è continua e soddisfa (4) e (5).

Se $u_{i,0} \in C(\overline{\Omega})$, per $i = 1, 2, 3$, allora $u_0 \in \overline{D(A)} = X$ e, per il Teorema 2.4(i), esiste un'unica soluzione classica locale $\boldsymbol{u} \in C([0, T'[; X) \cap C(]0, T'[; D(A)) \cap C^1(]0, T'[; X)$.

L'affermazione (ii) è immediata conseguenza del Teorema 2.4(ii), poiché le ipotesi $u_{1,0} \in \bigcap_{p \geq 1} W^{2,p}(\Omega)$, $\mathcal{B}_1 u_{1,0} = 0$, $u_{2,0}, u_{3,0} \in C(\overline{\Omega})$ e $\mathcal{L}_1 u_{1,0} \in C(\overline{\Omega})$ significano che $u_0 \in D(A)$ ed implicano che $Au_0 + f(u_0) \in \overline{D(A)}$. Per il Teorema 2.4(ii), $u', Au \in C([0, T'[; X)$.

L'affermazione (iii) segue dal Teorema 2.4(iii). Infatti, l'ipotesi $u_{1,0} \in \bigcap_{p \geq 1} W^{2,p}(\Omega)$, $\mathcal{B}_1 u_{1,0} = 0$, $u_{2,0}, u_{3,0} \in C(\overline{\Omega})$ significa che $u_0 \in D(A)$, mentre la condizione $-\mathcal{L}_1 u_{1,0} + g_1(\cdot, 0, \boldsymbol{u}_0) \in C^{2\alpha}(\overline{\Omega})$, per $\alpha \in (0, 1/2)$ e $-\mathcal{L}_1 u_{1,0} + g_1(\cdot, 0, \boldsymbol{u}_0) \in C^{2\alpha}_{\mathcal{B}_1}(\overline{\Omega})$, per $\alpha \in (1/2, 1)$, implica che $Au_0 + f(0, u_0) \in D_A(\alpha, \infty)$. Per il Teorema 2.4(iii), $u', Au \in C^\alpha([0, b]; X)$ e $u' \in B([0, b]; D_A(\alpha, \infty))$ e quindi $\partial_t u_1 \in C^{2\alpha}(\overline{\Omega})$, per ogni $t \in [0, T'[$, e $\mathcal{A}_1 u_1 \in C^{0, \alpha}(\overline{\Omega} \times [0, b])$. In particolare, per $\alpha \neq 1/2$, $\partial_t u_1 \in C^{2\alpha, \alpha}(\overline{\Omega} \times [0, b])$ poiché, per $\alpha \neq 1/2$, $u' \in C^\alpha([0, b]; X) \cap B([0, b]; D_A(\alpha, \infty))$ implica che $\partial_t u_1 \in C^{2\alpha, \alpha}(\overline{\Omega} \times [0, b])$. ∎

Osservazione. 2.7. *Per* $\alpha > 1/2$, *si ha la continuità di* $(u_1)_{x_i t}$, $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 2.8. *Supponiamo valide tutte le ipotesi specificate nel Teorema* 2.6. *Se il termine non lineare soddisfa anche la condizione*

$$(8) \quad \exists C > 0 \ \ t.\,c. \sum_{i=1}^{3} |g_i(x, t, \boldsymbol{u})| \leq C(1 + |\boldsymbol{u}|_1), \qquad \forall t \in [0, T], \ \ \forall x \in \overline{\Omega}, \ \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3,$$

$i = 1, 2, 3$, *allora la soluzione* $\boldsymbol{u}$ *è globale.*

Dimostrazione. Segue banalmente dal Teorema 2.5, se si osserva che l'ipotesi (8) implica (6). ■

Trattiamo ora il caso non omogeneo al bordo, cioè supponiamo che il sistema (1) sia dotato di condizioni al bordo del tipo

$$\mathcal{B}_i u_i(x, t) = q_i(x, t), \qquad 0 < t \leq T, \quad x \in \partial\Omega .$$

La teoria astratta non può essere applicata direttamente al problema non omogeneo, poiché $D(A_1)$ è dotato di condizioni al bordo omogenee. Generalmente, in questi casi, si *rilevano le condizioni al bordo* considerando i termini al bordo q_i come tracce su $\partial\Omega \times [0, T]$ di $\mathcal{B}_i Q_i$, dove Q_i sono funzioni sufficientemente regolari definite in $\overline{\Omega} \times [0, T]$ e si riduce il problema non omogeneo ad uno omogeneo nelle incognite $\tilde{u}_i = u_i - Q_i$, $i = 1, \ldots, n_1$, e $\tilde{u}_i = u_i$, $i = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2$.

Poniamo

$$Q_i(\cdot, t) = \mathcal{N} q_i(\cdot, t), \qquad 0 \leq t \leq T ,$$

dove $\mathcal{N}$ è un operatore appartenente a $L(C^{\theta}(\partial\Omega), C^{\theta+1}(\overline{\Omega}))$ per ogni $\theta \in [0, 1]$ (per $\theta \in [0, 1+\alpha]$ se $\partial\Omega$ è uniformemente $C^{2+\alpha}$, $0 \leq \alpha < 1$) tale che

$$\mathcal{B}(\mathcal{N} f)_{|\partial\Omega} = f, \qquad \forall f \in C(\partial\Omega).$$

Ricordiamo ancora che $\mathcal{N} \in L(C(\partial\Omega), C^1(\overline{\Omega}))$ e che $\mathcal{N} \in L(C^1(\partial\Omega), C^2(\overline{\Omega}))$.

Dimostriamo un teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema non omogeneo, nel caso $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, rimandando a [4] per una trattazione più esaustiva.

Teorema 2.9. *Supponiamo che $\partial\Omega$ sia uniformemente $C^{2+\alpha}$, per qualche $\alpha \in (0, 1)$, che* (7) *sia verificata e che $q_1 \in C^{1+\alpha}([0, T]; C^{1+\alpha}(\partial\Omega))$. Valgono le seguenti affermazioni*:

(i) *se $u_{i,0} \in C(\overline{\Omega})$, per $i = 1, 2, 3$, allora* (1) *ammette un'unica soluzione classica locale massimale $\boldsymbol{u}$ continua in $\overline{\Omega} \times [0, T'[$, con $\boldsymbol{u}$ derivabile rispetto a t in $\overline{\Omega} \times]0, T'[$ e $u_1(\cdot, t) \in W^{2,p}(\Omega)$ per ogni $p \geq 1$ e $0 < t < T' < T$;*

(ii) *se $u_{1,0} \in \bigcap_{p \geq 1} W^{2,p}(\Omega)$, $\mathcal{B}_1 u_{1,0}(x) = q_1(x, 0)$ per $x \in \partial\Omega$, $u_{2,0}, u_{3,0} \in C(\overline{\Omega})$ e $\mathcal{L}_1 u_{1,0} \in C(\overline{\Omega})$, allora $\boldsymbol{u}$ è soluzione stretta di* (1), *cioè $(u_i)_t, \mathcal{L}_1 u_1 \in C(\overline{\Omega} \times [0, T'[)$, per $i = 1, 2, 3$;*

(iii) *infine se $u_{1,0} \in \bigcap_{p \geq 1} W^{2,p}(\Omega)$, $\mathcal{B}_1 u_{1,0}(x) = q_1(x, 0)$ per $x \in \partial\Omega$, $u_{2,0}, u_{3,0} \in C(\overline{\Omega})$ e $-\mathcal{L}_1 u_{1,0} + g_1(\cdot, 0, \boldsymbol{u}_0) \in C^{2\alpha}(\overline{\Omega})$, per $\alpha \in (0, 1/2)$, oppure $-\mathcal{L}_1 u_{1,0} + g_1(\cdot, 0, \boldsymbol{u}_0) \in C^{2\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\mathcal{B}_1(-\mathcal{L}_1 u_{1,0} + g_1(\cdot, 0, \boldsymbol{u}_0)) = \partial_t q_1(\cdot, 0)$ su $\partial\Omega$, per $\alpha \in (1/2, 1)$, allora $\partial_t u_1$ appartiene a $C^{2\alpha, \alpha}(\overline{\Omega} \times [0, b])$, $\mathcal{A}_1 u_1$ appartiene a $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \times [0, b])$, per ogni $b < T'$.*

Dimostrazione. Poniamo $\tilde{u}_1 = u_1 - Q_1$ e $\tilde{u}_i = u_i$, $i = 2, 3$. Queste funzioni risolvono il problema omogeneo semilineare

$$
\text{(9)} \qquad \begin{cases}
\partial_t \tilde{u}_1 + \mathcal{L}_1 \tilde{u}_1 = \tilde{g}_1(x, t, \tilde{\boldsymbol{u}}) - \mathcal{L}_1 Q_1 - \partial_t Q_1 & \text{in } \Omega \times]0, T], \\
\partial_t \tilde{u}_2 = \tilde{g}_2(x, t, \tilde{\boldsymbol{u}}) & \text{in } \Omega \times]0, T], \\
\partial_t \tilde{u}_3 = \tilde{g}_3(x, t, \tilde{\boldsymbol{u}}) & \text{in } \Omega \times]0, T], \\
\mathcal{B}_1 \tilde{u}_1 = 0 & \text{su } \partial\Omega \times]0, T], \\
\tilde{u}_1(x, 0) = u_{1,0} - Q_1(x, 0) & \text{in } \Omega \\
\tilde{u}_i(x, 0) = u_{i,0} & \text{in } \Omega \quad (i = 2, 3),
\end{cases}
$$

dove $\tilde{g}_i(x, t, \tilde{\boldsymbol{u}}) := g_i(x, t, \tilde{u}_1 + Q_1(x, t), \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$.

Poiché $t \mapsto q_1(\cdot, t)$ appartiene a $C^{1+\alpha}([0, T]; C(\partial\Omega))$, allora $t \mapsto Q_1(\cdot, t)$ appartiene a $C^{1+\alpha}([0, T]; C^1(\overline{\Omega}))$; pertanto $(x, t) \mapsto Q_1(x, t)$ appartiene a $C^{1,1+\alpha}(\overline{\Omega} \times [0, T])$. In particolare, è $Q_1 \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \times [0, T])$, $\partial_t Q_1 \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \times [0, T])$ e, per composizione, le funzioni $\tilde{g}_i$ soddisfano la seguente condizione di Hölder in t

$$\forall R > 0, \quad \exists C = C(R) \qquad \text{tale che}$$

$$|\tilde{g}_i(x, t, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3) - \tilde{g}_i(x, s, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)| \leq C|t - s|^\alpha,$$

$$\forall t, s \in [0, T] \ \ \forall x \in \overline{\Omega} \ \ \forall \tilde{\boldsymbol{u}} \in B(0, R).$$

Inoltre, $t \mapsto \mathcal{L}_1 Q_1(\cdot, t) \in C^\alpha([0, T]; C(\overline{\Omega}))$. Infatti, poiché $q_1 \in C^{1+\alpha}([0, T]; C^{1+\alpha}(\partial\Omega))$, allora $t \mapsto q_1(\cdot, t)$ appartiene a $C^\alpha([0, T]; C^{1+\alpha}(\partial\Omega))$; pertanto $t \mapsto Q_1(\cdot, t)$ appartiene a $C^\alpha([0, T]; C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}))$. In particolare, $t \mapsto Q_1(\cdot, t) \in C^\alpha([0, T]; C^2(\overline{\Omega}))$ e quindi $t \mapsto \mathcal{L}_1 Q_1(\cdot, t) \in C^\alpha([0, T]; C(\overline{\Omega}))$.

A questo punto si può applicare il Teorema 2.6 al problema (9) e dimostrare che le affermazioni (i), (ii) e (iii) sono verificate. ■

Si osservi infine che, se le funzioni g_i e $u_{i,0}$ sono di classe C^2, allora le soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie hanno la medesima regolarità di u_1.

3 - Approssimazione di Galerkin

Introduciamo ora la semidiscretizzazione di Galerkin del sistema (1). La convergenza del metodo viene studiata in relazione alla regolarità della soluzione del problema di partenza ed alle proprietà di approssimazione degli spazi di dimensione finita V_h considerati.

Indichiamo con $\mathcal{A}^{(i)}(.\,,.)$ la forma bilineare associata all'operatore $\mathcal{L}_i$

$$\mathcal{A}^{(i)}(w,\, v) := \int_{\Omega} \left[\sum_{j,\,k=1}^{n} a_{jk}^{(i)} \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j^{(i)} v \frac{\partial w}{\partial x_j} + a_0^{(i)} wv \right] \mathrm{d}x\,.$$

Supponiamo che le forme bilineari $\mathcal{A}^{(i)}(.\,,.)$ siano continue e coercive in $H^1(\Omega)$, cioè esistano delle costanti $\alpha^{(i)} > 0$ tali che

$$\mathcal{A}^{(i)}(v,\, v) \geqslant \alpha^{(i)} \|v\|_1^2, \qquad \forall v \in H^1(\Omega)\,. \tag{10}$$

Le ipotesi sui coefficienti degli operatori $\mathcal{A}^{(i)}$ precisate sopra, insieme con (2), garantiscono la continuità di ogni forma bilineare e la più generale *disuguaglianza di Gårding* [7]

$$\mathcal{A}^{(i)}(v,\, v) + \lambda^{(i)} \|v\|_0^2 \geqslant \alpha^{(i)} \|v\|_1^2, \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \quad i = 1,\, \ldots,\, n_1, \tag{11}$$

per qualche $\lambda^{(i)} \geqslant 0$ e $\alpha^{(i)} > 0$. Il cambiamento di variabili $\tilde{u}_i(x,\, t) = e^{-\lambda^{(i)} t} u_i(x,\, t)$ nel sistema (1) conduce ad un nuovo sistema in cui agli operatori ellittici $\mathcal{L}_{(i)} + \lambda^{(i)} I$, con I operatore identico, restano associate le forme bilineari $\mathcal{A}_{\lambda^{(i)}}^{(i)}(w,\, v) = \mathcal{A}^{(i)}(w,\, v) + \lambda^{(i)}(w,\, v)$ che soddisfano (10). Pertanto possiamo assumere, senza perdita di generalità, che le forme bilineari associate al problema ai valori iniziali e al contorno (1) soddisfino (11) con $\lambda^{(i)} = 0$. Questo sarà sempre assunto nel seguito di questo paragrafo. Tuttavia, occorre notare che nel caso sia necessario effettuare il suddetto cambiamento di variabili, le stime che dimostreremo risultano valide per le incognite ausiliarie $\tilde{u}_i$ o per le loro approssimazioni e che le corrispondenti stime per le soluzioni u_i richiedono un fattore moltiplicativo $e^{\lambda^{(i)} t}$.

Consideriamo ancora il caso $n_1 = 1$ ed $n_2 = 2$, lasciando al lettore l'estensione al caso generale. Supponiamo che i dati siano tali che (1) abbia un'unica soluzione $\boldsymbol{u} = (u_1,\, u_2,\, u_3)^T$ limitata che sia sufficientemente regolare per tutti i nostri scopi. Pertanto, nelle ipotesi specificate nel paragrafo precedente, consideriamo la seguente formulazione debole del problema (1)

$$\text{trovare } u_1 \in L^2(0,\, T;\, H^1(\Omega)) \cap C^0([0,\, T];\, L^2(\Omega))\,, \quad u_2,\, u_3 \in C^0([0,\, T];\, L^2(\Omega))$$

$$\text{con } \operatorname{supess}_{\Omega \times]0,\, T[} |u_i| < \infty \quad \text{tali che}$$

$$\frac{d}{dt}(u_1(t),\, \varphi) + \mathcal{A}^{(1)}(u_1(t),\, \varphi)$$

$$= (g_1(x,\, t,\, u_1(t),\, u_2(t),\, u_3(t)),\, \varphi) + (q_1(t),\, \varphi)_{\partial\Omega}, \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega)\,,$$

$$
(12) \qquad
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(u_2(t), \psi) = (g_2(x, t, u_1(t), u_2(t), u_3(t)), \psi), \qquad \forall \psi \in L^2(\Omega),\\
&\frac{d}{dt}(u_3(t), \psi) = (g_3(x, t, u_1(t), u_2(t), u_3(t)), \psi), \qquad \forall \psi \in L^2(\Omega),\\
&\qquad\qquad u_i(0) = u_{i,0}, \qquad i = 1, 2, 3 .
\end{aligned}
$$

Passiamo ora alla semidiscretizzazione di Galerkin di (1). Fissate le famiglie di sottospazi $\{V_h\}_{h>0}$ di $H^1(\Omega)$ e $\{W_h\}_{h>0}$ di $L^2(\Omega)$, di dimensione finita N_h, definiamo il problema semidiscreto di Galerkin

$$
(13) \qquad
\begin{aligned}
&\text{trovare } u_1 :]0, T[\to V_h, \quad u_2, u_3 :]0, T[\to W_h \text{ tali che },\\
&\frac{d}{dt}(u_{1,h}(t), \varphi_h) + \mathcal{A}^{(1)}(u_{1,h}(t), \varphi_h)\\
&= (g_1(x, t, u_{1,h}(t), u_{2,h}(t), u_{3,h}(t)), \varphi_h) + (q_1(t), \varphi_h)_{\partial\Omega}, \quad \forall \varphi_h \in V_h,\\
&\frac{d}{dt}(u_{2,h}(t), \psi_h) = (g_2(x, t, u_{1,h}(t), u_{2,h}(t), u_{3,h}(t)), \psi_h), \quad \forall \psi_h \in W_h,\\
&\frac{d}{dt}(u_{3,h}(t), \psi_h) = (g_3(x, t, u_{1,h}(t), u_{2,h}(t), u_{3,h}(t)), \psi_h), \quad \forall \psi_h \in W_h,\\
&\qquad u_{i,h}(0) = u_{i,0,h}, \qquad i = 1, 2, 3 ,
\end{aligned}
$$

dove $u_{1,0,h} \in V_h$ e $u_{i,0,h} \in W_h$, per $i = 2, 3$, sono convenienti approssimazioni del dato iniziale.

In questo paragrafo studieremo le proprietà del sistema semidiscreto (13). La dimostrazione della convergenza della soluzione semidiscreta ad $\boldsymbol{u}$ nel caso di termini non lineari localmente lipschitziani richiede alcune stime sulla soluzione semidiscreta stessa, che assicurino che essa non esploda. Per questo motivo, preliminarmente, si analizzerà il caso di termini di reazione globalmente lipschitziani. Sottolineiamo il fatto che, in entrambi i casi, i risultati che otterremo sono indipendenti dalla particolare scelta degli spazi V_h e W_h, in quanto essi si basano esclusivamente sulla regolarità della soluzione $\boldsymbol{u}$ e sulle proprietà di approssimazione di tali spazi in relazione allo spazio di appartenenza della soluzione stessa.

Trattiamo dapprima il caso di funzioni g_i, $i = 1, 2, 3$, globalmente lipschitziane rispetto alla variabile $\boldsymbol{u}$, ovvero supponiamo che esistano delle costanti $K_i > 0$ tali che $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}$, $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$

$$
(14) \qquad |g_i(x, t, \boldsymbol{u}) - g_i(x, t, \boldsymbol{w})| \leq K_i |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}|_1 .
$$

Nel caso di funzioni non lineari g_i globalmente lipschitziane, la dimostrazione della convergenza del metodo di Galerkin è più semplice. Infatti, in questo caso, la lipschitzianità globale delle g_i si traduce nella lipschitzianità globale del secondo membro del sistema (13) e quindi, per i teoremi di esistenza standard per tali sistemi, la soluzione semidiscreta esiste globalmente e si deve quindi fornire soltanto una stima dell'errore in una norma opportuna.

Indichiamo con $\boldsymbol{u}_h = (u_{1,h}, u_{2,h}, u_{3,h})^T$ l'unica soluzione di (13); si noti che la soluzione $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ di (1) è anche soluzione di (12).

Supponiamo nel seguito che la famiglia $\{V_h\}$ soddisfi la relazione di approssimazione

$$(15)\quad \lim_{h\to 0} \inf_{\varphi_h \in L^\infty(0,T;V_h)} \sup_{[0,T]} h^j \|\varphi(t) - \varphi_h(t)\|_j = 0\,, \qquad \forall \varphi \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))\,,$$

dove $j = 0, 1$; mentre per la famiglia $\{W_h\}$ valga la seguente proprietà

$$(16)\qquad \lim_{h\to 0} \inf_{\psi_h \in L^\infty(0,T;W_h)} \sup_{[0,T]} \|\psi(t) - \psi_h(t)\|_0 = 0\,, \qquad \forall \varphi \in S\,,$$

dove $S := L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap \{f\colon f(t) \in C_0^\infty(\Omega) \text{ q.o. } t \in [0,T]\}$. Enunciamo, senza dimostrazione, il seguente

Lemma 2.10. *Sia $\{W_h\}$ una famiglia di spazi contenuti in $L^2(\Omega)$ soddisfacente* (16). *Per ogni $w \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$ si ha*

$$\lim_{h\to 0} \inf_{w_h \in L^\infty(0,T;W_h)} \sup_{[0,T]} \|w(t) - w_h(t)\|_0 = 0\,.$$

Si ha immediatamente il seguente risultato di convergenza in norma L^2.

Teorema 2.11. *Supponiamo che le g_i soddisfino la condizione* (14) *e che la soluzione di* (12) *sia tale che $u_1 \in C^0([0,T];L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^1(\Omega))$ e $u_2, u_3 \in C^1([0,T];L^2(\Omega))$. Se le famiglie $\{V_h\}$ e $\{W_h\}$ soddisfano* (15) *e* (16), *allora la soluzione di* (13) *esiste per $t \le T$ e converge in norma L^2 alla soluzione $\boldsymbol{u}$ di* (12).

L'analisi dell'errore tra $\boldsymbol{u}_h$ e $\boldsymbol{u}$ può essere svolta confrontando la soluzione di Galerkin $u_{1,h}(t)$ con la *proiezione ellittica* $W_1(t)$ della soluzione $u_1(t)$ di (12) su V_h, definita per q.o. $t \in]0,T[$ da

$$(17)\qquad \mathcal{A}^{(1)}(W_1(t), \varphi_h) = \mathcal{A}^{(1)}(u_1(t), \varphi_h)\,, \qquad \forall \varphi_h \in V_h.$$

Come è noto [5], l'errore $\varrho_1(t) = u_1(t) - W_1(t)$ soddisfa per $t \leq T$ e per qualche $\overline{C} > 0$

$$\|\varrho_1(t)\|_0 \leq \overline{C} h \inf_{\varphi_h \in V_h} \|u_1(t) - \varphi_h\|_1 . \tag{18}$$

La rimanente parte dell'errore in v_h è allora $\theta_1(t) = u_{1,h}(t) - W_1(t) \in V_h$.

Nel seguito C denoterà delle costanti, non necessariamente le medesime nelle varie occorrenze, che sono indipendenti da h e dalle funzioni coinvolte. Allo stesso modo, c indicherà costanti indipendenti da h ma che possono dipendere dalla soluzione $\boldsymbol{u}(t)$ di (12).

Supporremo per semplicità che i valori iniziali siano scelti in modo tale che

$$\|u_{1,0,h} - W_1(0)\|_0 \leq ch^{\mu}, \quad \|u_{2,0,h} - u_{2,0}\|_0 \leq ch^{\mu'}, \quad \|u_{3,0,h} - u_{3,0}\|_0 \leq ch^{\mu'}, \tag{19}$$

per qualche $\mu, \mu' > 0$, dove $W_1(t)$ è definito da (17). Ad esempio, come conseguenza di (18), (19) segue dalla disuguaglianza triangolare e dalla condizione

$$\|u_{1,0,h} - u_{1,0}\|_0 \leq ch^{\mu}, \qquad \|u_{2,0,h} - u_{2,0}\|_0 \leq ch^{\mu'}, \qquad \|u_{3,0,h} - u_{3,0}\|_0 \leq ch^{\mu'}.$$

Dimostrazione. Sottraiamo (12) da (13), per t fissato. Tenendo conto di (17), abbiamo per quasi ogni $t \in]0, T[$ e per ogni $\varphi_h \in V_h$:

$$\begin{aligned} &((\theta_1)_t, \varphi_h) - ((\varrho_1)_t, \varphi_h) + \mathcal{a}^{(1)}(\theta, \varphi_h) \\ &= (g_1(x, t, u_{1,h}, u_{2,h}, u_{3,h}) - g_1(x, t, u_1, u_2, u_3), \varphi_h) \\ &= (g_1(x, t, u_{1,h}, u_{2,h}, u_{3,h}) - g_1(x, t, W_1, u_{2,h}, u_{3,h}), \varphi_h) \\ &\quad + (g_1(x, t, W_1, u_{2,h}, u_{3,h}) - g_1(x, t, u_1, u_{2,h}, u_{3,h}), \varphi_h) \\ &\quad + (g_1(x, t, u_1, u_{2,h}, u_{3,h}) - g_1(x, t, u_1, u_2, u_{3,h}), \varphi_h) \\ &\quad + (g_1(x, t, u_1, u_2, u_{3,h}) - g_1(x, t, u_1, u_2, u_3), \varphi_h) . \end{aligned} \tag{20}$$

Posto $\varphi_h = \theta_1(t)$ in (20) e usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, la coercività di $\mathcal{a}^{(1)}$, la condizione di Lipschitz per g_1 e la disuguaglianza di Young $ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2$, otteniamo per q.o. $t < T$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta_1\|_0^2 \leq \frac{1}{2} \|(\varrho_1)_t\|_0^2 + \frac{1}{2}(5 + K_1^2)\|\theta_1\|_0^2 + \frac{K_1^2}{2}\|\varrho_1\|_0^2 + \frac{K_1^2}{2}\|U_2\|_0^2 + \frac{K_1^2}{2}\|U_3\|_0^2,$$

dove abbiamo posto $U_2(t) = u_{2,h}(t) - u_2(t)$ e $U_3(t) = u_{3,h}(t) - u_3(t)$ per $t \in [0, T]$. Poiché la differenziazione rispetto al tempo commuta con la proiezione ellittica si ha, mediante (18), $\|(\varrho_1)_t\|_0 \leq \overline{C} h \inf_{\varphi_h \in V_h} \|(u_1)_t(t) - \varphi_h\|_1$; quindi

$$\begin{aligned}(21) \qquad & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_1\|_0^2 \leq C_1\|\theta_1\|_0^2 \\ & + C_2\|U_2\|_0^2 + C_2\|U_3\|_0^2 + C_3 h^2\|u_1 - \varphi_h\|_1^2 + C_4 h^2\|(u_1)_t - \overline{\varphi}_h\|_1^2,\end{aligned}$$

dove $C_1 = (5 + K_1^2)/2 > 0$, $C_2 = K_1^2/2 > 0$, $C_3 = C_2\overline{C}^2$ e $C_4 = \overline{C}^2/2$ e dove φ_h e $\overline{\varphi}_h$ sono arbitrari elementi di V_h.

Ora consideriamo la prima equazione differenziale ordinaria, nella sua forma debole; si ha per $t < T$

$$\begin{aligned}(22) \qquad & ((U_2)_t(t), \psi_h) = (g_2(x, t, u_{1,h}, u_{2,h}, u_{3,h}) \\ & - g_2(x, t, u_1, u_2, u_3), \psi_h), \qquad \forall \psi_h \in W_h.\end{aligned}$$

Poniamo $\psi_h = u_{2,h}(t) - w_h \in W_h$, dove w_h è un arbitrario elemento di W_h. Come prima, questo comporta

$$\begin{aligned}(23) \qquad & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U_2\|_0^2 \leq C_5\|U_2\|_0^2 \\ & + \frac{1}{2}\|(U_2)_t\|_0^2 + \frac{5}{2}\|u_2 - w_h\|_0^2 + K_2^2\|\theta_1\|_0^2 + K_2^2\|\varrho_1\|_0^2 + K_2^2\|U_3\|_0^2,\end{aligned}$$

con $C_5 = 2 + K_2^2$. Inoltre, scegliendo la funzione test $(u_{2,h})_t - \phi_h \in W_h$ in (22), dove ϕ_h è un arbitrario elemento di W_h, abbiamo per ogni $t \in]0, T[$ e per ogni $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}& \|(U_2)_t\|_0^2 \leq \frac{5}{2}\varepsilon\|(U_2)_t\|_0^2 \\ & + \frac{5}{2}\varepsilon\|(u_2)_t - \phi_h\|_0^2 + \frac{K_2^2}{\varepsilon}\|\theta_1\|_0^2 + \frac{K_2^2}{\varepsilon}\|\varrho_1\|_0^2 + \frac{K_2^2}{\varepsilon}\|U_2\|_0^2 + \frac{K_2^2}{\varepsilon}\|U_3\|_0^2,\end{aligned}$$

e quindi, per $\varepsilon = 1/5$,

$$\|(U_2)_t\|_0^2 \leq \|(u_2)_t - \phi_h\|_0^2 + C_6\|\theta_1\|_0^2 + C_6\|\varrho_1\|_0^2 + C_6\|U_2\|_0^2 + C_6\|U_3\|_0^2,$$

dove $C_6 = 10K_2^2$. L'ultima disuguaglianza può essere combinata con (23) e comporta per $t < T$

$$
(24)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U_2\|_0^2 &\leq \frac{1}{2}\|(u_2)_t - \phi_h\|_0^2 \\ &+ \frac{5}{2}\|u_2 - w_h\|_0^2 + C_5'\|U_2\|_0^2 + C_6'\|\theta_1\|_0^2 + C_6'\|\varrho_1\|_0^2 + C_6'\|U_3\|_0^2, \end{aligned}
$$

per opportuni valori delle costanti C_5' e C_6'.

In modo del tutto analogo, la seconda equazione differenziale ordinaria fornisce la disuguaglianza

$$
(25)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U_3\|_0^2 &\leq \frac{1}{2}\|(u_3)_t - \overline{\phi}_h\|_0^2 \\ &+ \frac{5}{2}\|u_2 - \overline{w}_h\|_0^2 + C_7'\|U_3\|_0^2 + C_8'\|\theta_1\|_0^2 + C_8'\|\varrho_1\|_0^2 + C_8'\|U_2\|_0^2, \end{aligned}
$$

per $\overline{\phi}_h, \overline{w}$ arbitrari elementi di W_h e opportune costanti $C_7', C_8' > 0$.

Ora sommiamo (21), (24) e (25) ed integriamo su $[0, t]$, $t < T$; usando la (18) si ottiene per un opportuno valore della costante C

$$
\begin{aligned} \|\theta_1(t)\|_0^2 + \|U_2(t)\|_0^2 + \|U_3(t)\|_0^2 &\leq \|\theta_1(0)\|_0^2 + \|U_2(0)\|_0^2 + \|U_3(0)\|_0^2 \\ &+ \int_0^t [\|(u_2)_t(s) - \phi_h\|_0^2 + 5\|u_2(s) - w_h\|_0^2 \\ &+ \|(u_3)_t(s) - \overline{\phi}_h\|_0^2 + 5\|u_3(s) - \overline{w}_h\|_0^2 + Ch^2\|u_1(s) - \varphi_h\|_1^2 \\ &+ Ch^2\|(u_1)_t(s) - \overline{\varphi}_h\|_1^2]\, \mathrm{d}s + C\int_0^t (\|\theta_1(s)\|_0^2 + \|U_2(s)\|_0^2 + \|U_3(s)\|_0^2)\, \mathrm{d}s, \end{aligned}
$$

dove supponiamo $\varphi_h, \overline{\varphi}_h \in L^\infty(0, T; V_h)$ e $\phi_h, \overline{\phi}_h, w_h, \overline{w}_h \in L^\infty(0, T; W_h)$ elementi arbitrari.

Applicando il lemma di Gronwall, si ha $\forall t < T$

$$
\begin{aligned} &\|\theta_1(t)\|_0^2 + \|U_2(t)\|_0^2 + \|U_3(t)\|_0^2 \leq [\|\theta_1(0)\|_0^2 + \|U_2(0)\|_0^2 + \|U_3(0)\|_0^2 \\ &+ \int_0^T (\|(u_2)_t(s) - \phi_h(s)\|_0^2 + 5\|u_2(s) - w_h(s)\|_0^2 + \|(u_3)_t(s) - \overline{\phi}_h(s)\|_0^2 + 5\|u_3(s) - \overline{w}_h(s)\|_0^2 \\ &+ Ch^2\|u_1(s) - \varphi_h(s)\|_1^2 + Ch^2\|(u_1)_t(s) - \overline{\varphi}_h(s)\|_1^2)\, \mathrm{d}s]\, e^{CT}. \end{aligned}
$$

D'altra parte

$$\|\boldsymbol{u}_h(t)-\boldsymbol{u}(t)\|_0^2=\|u_{1,h}(t)-u_1(t)\|_0^2+\|u_{2,h}(t)-u_2(t)\|_0^2+\|u_{3,h}(t)-u_3(t)\|_0^2$$

$$\leq 2\|\theta_1(t)\|_0^2+2\|\varrho_1(t)\|_0^2+\|U_2(t)\|_0^2+\|U_3(t)\|_0^2$$

$$\leq 2[\|\theta_1(0)\|_0^2+\|U_2(0)\|_0^2+\|U_3(0)\|_0^2 \tag{26}$$

$$+\int_0^T(\|(u_2)_t(s)-\phi_h(s)\|_0^2+5\|u_2(s)-w_h(s)\|_0^2+\|(u_3)_t(s)-\overline{\phi}_h(s)\|_0^2+5\|u_3(s)-\overline{w}_h(s)\|_0^2$$

$$+Ch^2\|u_1(s)-\varphi_h(s)\|_1^2+Ch^2\|(u_1)_t(s)-\overline{\varphi}_h(s)\|_1^2)\,ds]\,e^{CT}+2\,\overline{C}h^2\inf_{\varphi_h\in V_h}\|u_1(t)-\varphi_h\|_1^2$$

e quindi data l'arbitrarietà delle funzioni test usate

$$\|\boldsymbol{u}_h(t)-\boldsymbol{u}(t)\|_0^2\leq 2e^{CT}[\|\theta_1(0)\|_0^2+\|U_2(0)\|_0^2+\|U_3(0)\|_0^2$$

$$+T\inf_{\phi_h\in L^\infty(0,T;W_h)}\sup_{[0,T]}\|(u_2)_t-\phi_h\|_0^2+5T\inf_{w_h\in L^\infty(0,T;W_h)}\sup_{[0,T]}\|u_2-w_h\|_0^2$$

$$+T\inf_{\overline{\phi}_h\in L^\infty(0,T;W_h)}\sup_{[0,T]}\|(u_3)_t-\overline{\phi}_h\|_0^2+5T\inf_{\overline{w}_h\in L^\infty(0,T;W_h)}\sup_{[0,T]}\|u_3-\overline{w}_h\|_0^2$$

$$+CTh^2\inf_{\varphi_h\in L^\infty(0,T;V_h)}\sup_{[0,T]}\|u_1-\varphi_h\|_1^2+CTh^2\inf_{\overline{\varphi}_h\in L^\infty(0,T;V_h)}\sup_{[0,T]}\|(u_1)_t-\overline{\varphi}_h\|_1^2]$$

$$+2\,\overline{C}h^2\inf_{\varphi_h\in V_h}\|u_1(t)-\varphi_h\|_1^2.$$

In virtù delle ipotesi (15), (16), (19) e del Lemma 2.10, si ha la convergenza per $h\to 0$. ■

Per avere una stima dell'errore di approssimazione di tipo ottimale in norma L^2, bisogna introdurre ulteriori ipotesi sugli spazi V_h e W_h, nonché ipotesi di regolarità spaziale sulla soluzione. La seguente definizione individua le proprietà necessarie per ottenere tale stima.

Definizione 2.12. *Diciamo che una famiglia di spazi* $\{X_h\}$ *è di classe* $\mathcal{S}_{k,\mu}$ *(con* $k\leq\mu$*) se* $X_h\subset H^k(\Omega)$ *ed esiste una costante* $C>0$ *tale che*

$$\forall w\in H^\mu(\Omega),\qquad \inf_{w_h\in X_h}\sum_{j=0}^k h^j\|w-w_h\|_j\leq Ch^\mu\|w\|_\mu .$$

Ovviamente $\mathcal{S}_{k,\mu}\subset\mathcal{S}_{k',\mu}$, per $k>k'$. Poiché stiamo approssimando un sistema differenziale del secondo ordine accoppiato con equazioni differenziali ordinarie, nel seguito supporremo che la famiglia $\{V_h\}$ sia di classe $\mathcal{S}_{1,\mu}$ $(\mu \geq 2)$ e la famiglia $\{W_h\}$ sia di classe $\mathcal{S}_{0,\mu'}$ $(\mu' \geq 1)$.

Si ha il seguente risultato di convergenza.

Teorema 2.13. *Supponiamo che le g_i soddisfino la condizione di Lipschitz* (14), *che la famiglia di spazi $\{V_h\}$ sia di classe $\mathcal{S}_{1,\mu}$ $(\mu \geq 2)$ e la famiglia $\{W_h\}$ di classe $\mathcal{S}_{0,\mu'}$ $(\mu' \geq 1)$ e che la* (19) *sia verificata. Supponiamo inoltre che la soluzione $\boldsymbol{u}$ sia tale che $u_1 \in H^1(0, T; H^\mu(\Omega))$ e $u_2, u_3 \in H^1(0, T; H^{\mu'}(\Omega))$. Allora si ha la seguente stima dell'errore*

$$\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_0 \leq c h^{\min(\mu, \mu')}, \qquad \forall t \in [0, T], \tag{27}$$

dove c dipende dalle costanti K_i e dalla soluzione $\boldsymbol{u}$.

Dimostrazione. La tesi segue facilmente dalla stima dell'errore (26). Infatti, essendo $u_1 \in H^1(0, T; H^\mu(\Omega))$, $\mu \geq 2$, dalla ipotesi sullo spazio V_h si ha

$$\inf_{\varphi_h \in V_h} h\|u_1 - \varphi_h\|_1 \leq C h^\mu \|u_1\|_\mu, \qquad \forall t \in [0, T],$$

$$\inf_{\varphi_h \in V_h} h\|(u_1)_t - \varphi_h\|_1 \leq C h^\mu \|(u_1)_t\|_\mu, \qquad \text{q.o.} \quad t \in [0, T].$$

Inoltre, essendo $u_2, u_3 \in H^1(0, T; H^{\mu'}(\Omega))$, $\mu' \geq 1$, si ha

$$\inf_{\phi_h \in W_h} \|u_2 - \phi_h\|_0 \leq C' h^{\mu'} \|u_2\|_{\mu'}, \qquad \forall t \in [0, T],$$

$$\inf_{\phi_h \in W_h} \|(u_2)_t - \phi_h\|_0 \leq C' h^{\mu'} \|(u_2)_t\|_{\mu'}, \qquad \text{q.o.} \quad t \in [0, T],$$

e analogamente per u_3. Sostituendo le precedenti stime in (26), si ottiene per $t < T$

$$\|\boldsymbol{u}_h(t) - \boldsymbol{u}(t)\|_0^2 \leq 2 e^{CT} [\|\theta_1(0)\|_0^2 + \|U_2(0)\|_0^2 + \|U_3(0)\|_0^2$$

$$+ \int_0^T (C' h^{2\mu'} \|(u_2)_t(s)\|_{\mu'}^2 + 5C' h^{2\mu'} \|u_2(s)\|_{\mu'}^2 + C' h^{2\mu'} \|(u_3)_t(s)\|_{\mu'}^2 + 5C' h^{2\mu'} \|u_3(s)\|_{\mu'}^2$$

$$+ C h^{2\mu} \|u_1(s)\|_\mu^2 + C h^{2\mu} \|(u_1)_t(s)\|_\mu^2)\, ds] + 2\, \overline{C} C h^{2\mu} \|u_1(t)\|_\mu^2.$$

Pertanto si ha la tesi. ■

Osservazione 2.14. La stima d'errore (27) può essere poco significativa se le costanti di Lipschitz K_i, $i = 1, 2, 3$, sono molto grandi o se le costanti di ellitticità $\alpha_0^{(i)}$ sono piccole, cioè se i termini diffusivi in (1) sono trascurabili rispetto a quelli reattivi. Infatti, in questa situazione la costante d'errore c può essere piuttosto grande e le performance del metodo di Galerkin possono essere deludenti se h non è sufficientemente piccolo. In tali casi può essere opportuno «stabilizzare» il metodo di discretizzazione ricorrendo ad un approccio di Galerkin generalizzato.

Passiamo ora al caso di funzioni g_i localmente lipschitziane. In questo caso la dimostrazione della convergenza richiede ulteriori ipotesi sulla famiglie $\{V_h\}$ e $\{W_h\}$, poiché la lipschitzianità locale delle g_i non garantisce in generale neppure l'esistenza globale della soluzione di (13) e quindi bisogna fornire delle stime che assicurino che la soluzione semidiscreta non esploda. L'idea della dimostrazione fu usata da Thomèe [9] per equazioni semilineari generali di tipo parabolico ed estende al caso di un generico sistema del tipo (1) quanto dimostrato in [8].

Supponiamo nel seguito che le famiglie $\{V_h\}$ e $\{W_h\}$ siano di classe $\mathcal{S}_{1,\mu}$ e $\mathcal{S}_{1,\mu'}$ rispettivamente e che soddisfino la seguente *disuguaglianza inversa*

(28) $$\|\varphi_h\|_\infty \leq C_1 h^{-\nu}\|\varphi_h\|_0, \qquad \forall \varphi_h \in V_h, \quad h \leq h_1, \qquad \text{per qualche } \nu \text{ e } h_1,$$

(29) $$\|\psi_h\|_\infty \leq C_2 h^{-\nu'}\|\psi_h\|_0, \qquad \forall \psi_h \in W_h, \quad h \leq h_2, \qquad \text{per qualche } \nu' \text{ e } h_2.$$

Cominciamo con la seguente osservazione:

Osservazione 2.15. *Per h fissato, il sistema* (13), *ha un'unica soluzione locale in* $[0, T_h]$, *per qualche* $T_h \leq T$.

Nell'analisi che segue mostreremo che, sotto ipotesi opportune per $\{V_h\}$ e $\{W_h\}$ e per h sufficientemente piccolo, T_h risulta uguale a T. Ne segue l'esistenza di una soluzione globale limitata del sistema (13). Questo può essere ottenuto fornendo una stima in norma infinito dell'errore $\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}$ che permetta di concludere la limitatezza della soluzione semidiscreta $\boldsymbol{u}_h$. A tale scopo, supponiamo che valgano le seguenti ipotesi di approssimazione

(30) $$\lim_{h\to 0} \sup_{[0,T]} \inf_{w_h \in V_h} \{\|w(t) - w_h\|_\infty + h^{-\nu}\|w(t) - w_h\|_0\} = 0\,,$$

$$\forall w \in L^\infty(0, T; H^\mu(\Omega))\,,$$

(31) $$\lim_{h\to 0} \sup_{[0,T]} \inf_{w_h \in W_h} \{\|w(t) - w_h\|_\infty + h^{-\nu'}\|w(t) - w_h\|_0\} = 0\,,$$

$$\forall w \in L^\infty(0, T; H^{\mu'}(\Omega))\,,$$

per qualche ν, $\nu' > 0$. Indichiamo ancora con $\boldsymbol{u}_h = (u_{1,h}, u_{2,h}, u_{3,h})$ l'unica soluzione locale di (13). Sia inoltre Σ l'immagine della soluzione $\boldsymbol{u}$. Fissiamo $\delta > 0$ sufficientemente grande da includere il dato iniziale $\boldsymbol{u}_{0,h} = (u_{1,0,h}, u_{2,0,h}, u_{3,0,h})$ in un intorno chiuso Σ_δ di Σ e siano $K_i > 0$ delle costanti tali che la condizione di Lipschitz (7) sussista in Σ_δ.

Euristicamente potremmo pensare che, poiché la soluzione approssimata $\boldsymbol{u}_h$ si mantiene sempre vicina ad $\boldsymbol{u}$, essa appartenga a Σ_δ. Al fine di dimostrare che effettivamente questo è quanto avviene, occorre fornire stime in norma infinito per l'errore di approssimazione, poiché la vicinanza nel senso di L^2 o di H^1 non implica automaticamente che $\boldsymbol{u}_h$ appartenga a Σ_δ per h piccolo.

Ora enunciamo il teorema principale di questo paragrafo:

Teorema 2.16. *Supponiamo che le g_i soddisfino la condizione locale di Lipschitz* (7). *Sia $\{V_h\}$ di classe $\mathcal{S}_{1,\mu}$ $(\mu \geq 2)$ e $\{W_h\}$ di classe $\mathcal{S}_{1,\mu'}$ $(\mu' \geq 2)$ e supponiamo che* (28), (29), (30) *e* (31) *sussistano per qualche ν, ν', con $\nu < \mu$ e $\nu' < \mu'$. Allora, se la condizione* (19) *è verificata e la soluzione $\boldsymbol{u}$ è tale che $u_1 \in H^1(0, T; H^\mu(\Omega))$ e $u_2, u_3 \in H^1(0, T; H^{\mu'}(\Omega))$, esiste un h_0 tale che, per $h \leq h_0$, la soluzione $\boldsymbol{u}_h$ di* (13) *esiste per $t \leq T$, e per questi t*

$$\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_0 \leq c\ h^{\min(\mu, \mu')}.$$

Dimostrazione. Sia t^h il più grande numero minore o uguale di T tale che $\boldsymbol{u}_h$ esista ed appartenga a Σ_δ per $t \leq t^h$, cioè

$$t^h = \sup\{s \leq T \colon \boldsymbol{u}_h(t) \in \Sigma_\delta, \quad \forall t \leq s\}.$$

In modo del tutto analogo a quanto visto nel Teorema 2.11, si ottiene la stima (26) per $t < t^h$ e quindi, tenendo conto delle ipotesi sugli spazi V_h e W_h e la regolarità di $\boldsymbol{u}$, si ha

$$\|\boldsymbol{u}_h(t) - \boldsymbol{u}(t)\|_0^2 \leq 2e^{CT}[\|\theta_1(0)\|_0^2 + \|U_2(0)\|_0^2 + \|U_3(0)\|_0^2$$

$$+ \int_0^T (C' h^{2\mu'} \|(u_2)_t(s)\|_{\mu'}^2 + 5C' h^{2\mu'} \|u_2(s)\|_{\mu'}^2 + C' h^{2\mu'} \|(u_3)_t(s)\|_{\mu'}^2 + 5C' h^{2\mu'} \|u_3(s)\|_{\mu'}^2$$

$$+ Ch^{2\mu} \|u_1(s)\|_\mu^2 + Ch^{2\mu} \|(u_1)_t(s)\|_\mu^2) ds] + 2\,\overline{C} Ch^{2\mu} \|u_1(t)\|_\mu^2 \leq ch^{2\tilde{\mu}},$$

dove $\tilde{\mu} = \min(\mu, \mu')$, cioè

$$\|(u_{1,h}(t), u_{2,h}(t), u_{3,h}(t)) - (u_1(t), u_2(t), u_3(t))\|_0 \leq ch^{\tilde{\mu}}. \tag{32}$$

Inoltre, per $t < t^h$, abbiamo

$$\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_\infty \leq \|(u_{1,h}, u_{2,h}, u_{3,h}) - (u_1, u_{2,h}, u_{3,h})\|_\infty$$

$$+\|(u_1, u_{2,h}, u_{3,h}) - (u_1, u_2, u_{3,h})\|_\infty \tag{33}$$

$$+\|(u_1, u_2, u_{3,h}) - (u_1, u_2, u_3)\|_\infty = \|u_{1,h} - u_1\|_\infty + \|u_{2,h} - u_2\|_\infty + \|u_{3,h} - u_3\|_\infty .$$

Consideriamo il primo termine nel secondo membro di (33). Sia w_h un generico elemento di V_h; in virtù di (28), si ha

$$\|u_{1,h} - u_1\|_\infty \leq \|u_{1,h} - w_h\|_\infty + \|w_h - u_1\|_\infty \leq Ch^{-\nu}\|u_{1,h} - w_h\|_0 + \|w_h - u_1\|_\infty$$

$$\leq Ch^{-\nu}\|u_{1,h} - u_1\|_0 + Ch^{-\nu}\|w_h - u_1\|_0 + \|w_h - u_1\|_\infty$$

$$\leq ch^{\mu-\nu} + C \inf_{w_h \in V_h} \{h^{-\nu}\|u_1(t) - w_h\|_0 + \|u_1(t) - w_h\|_\infty\} < \delta/6 , \qquad h \leq h_1,$$

poiché $\nu < \mu$ e vale la (30). Risultati analoghi possono essere trovati per gli altri due termini in (33). Pertanto

$$\forall t < t^h, \qquad \|\boldsymbol{u}_h(t) - \boldsymbol{u}(t)\|_\infty < \delta/2, \qquad h \leq h_0 \tag{34}$$

per h_0 sifficientemente piccolo e indipendente da t^h. Quindi possiamo concludere mediante un argomento di continuità che t^h non può essere più piccolo di T, cioè $t^h = T$ per $h \leq h_0$ e, in virtù di (32),

$$\|\boldsymbol{u}_h(t) - \boldsymbol{u}(t)\|_0 \leq ch^{\tilde{\mu}}, \qquad \forall t \leq T . \qquad \blacksquare$$

Osservazione 2.17. *Dalla stima* (34), *in particolare, segue anche la limitatezza della soluzione semidiscreta* $\boldsymbol{u}_h$.

Supposti il dato $\boldsymbol{u}_0$ e la soluzione $\boldsymbol{u}$ sufficientemente regolari e scelti in modo opportuno gli spazi di approssimazione ed il dato iniziale discreto $\boldsymbol{u}_{0,h}$ è possibile applicare i risultati precedenti. In particolare, scegliendo come spazi di approssimazione gli spazi di elementi finiti di funzioni continue e lineari a tratti, si ottiene che l'approssimazione semidiscreta di Galerkin del problema (1) presenta una convergenza ottimale del secondo ordine nella norma L^2 [**1**], [7], [8].

Bibliografia

[1] P. G. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland 1978.

[2] P. COLLI FRANZONE and L. GUERRI, *Models of the Spreading of Excitation in Myocardial Tissue*, in *High Performance Computing in Biomedical Research*, 1992.

[3] A. L. HODGKIN and A. F. HUXLEY, *A Quantitative Description of Membrane Current and its Application to Conduction and Excitation in Nerve*, J. Physiol. (Lond.) **117** (1952), 500-544.

[4] A. LUNARDI, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, Basel 1995.

[5] J. A. NITSCHE, *Ein Kriterium für die Quasi-Optimalität des Ritzschen Verfahrens*, Numer. Math. **11** (1968), 346-348.

[6] C. V. PAO, *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press, New York 1992.

[7] A. QUARTERONI and A. VALLI, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer, Berlin 1994.

[8] S. SANFELICI, *Numerical and Analytic Study of a Parabolic-Ordinary System Modelling Cardiac Activation Under Equal Anisotropy Conditions*, Riv. Mat. Univ. Parma (5) **5** (1996), 143-157.

[9] V. THOMÉE and L. B. WAHLBIN, *On Galerkin Methods in Semilinear Parabolic Problems*, SIAM J. Numer. Anal. **12** (1975), 378-389.

Abstract

We consider a system of n_1 semilinear parabolic partial differential equations and n_2 ordinary differential equations, with locally Lipschitz continuous nonlinearities. Exploiting the tools of the semigroups theory, we analyse the well-posedness of this problem and we derive other further regularity results and conditions for the boundedness of the solution. We define the Galerkin semidiscrete approximation to the system, based on a suitable variational formulation of it. The main result concerns optimal order error estimates in L^2 norm, under various assumptions on the nonlinear terms, on the finite dimensional subspaces in which the approximation is sought and on the regularity of the exact solution. As a further result, in the case of locally Lipschitz continuous nonlinear terms and of sufficiently smooth solution, we provide maximum norm estimates for the approximation error and hence, by continuity arguments, we can conclude that the approximate solution is globally defined and bounded.

* * *