Riv. Mat. Univ. Parma (5) **6** (1997), 157-167

R. STANGARONE e L. VERDI (*)

Sui 16-archi completi di π_{16} (**)

1 - Introduzione

Sia K un *q-arco completo* di un piano proiettivo non desarguesiano π_q di ordine pari $q \geq 16$. Si dice *indice* di un punto P del piano il numero delle tangenti a K passanti per P. Si denota t_{2j} ($j = 0, \ldots, \frac{q}{2}$) il numero dei punti del piano di indice $2j$. Gli interi t_{2j}, detti *caratteri dell'arco*, soddisfano alle ben note equazioni [6]. Essendo K completo, risulta $t_q = 0$; inoltre è noto che $t_{q-2} = 0$ [7], $t_{q-4} \leq 1$ [6] e se $t_{q-4} = 1$ allora $q \leq 44$ [5]. In particolare, se $q = 16$ e $t_{12} = 1$, risulta $t_{10} = 0$ e $t_8 \leq 1$ [3], [4], [5].

Gli autori hanno ritenuto interessante proseguire questa problematica completando lo studio dei 16-archi completi di π_{16} che ammettono un punto di indice massimo 10. In particolare hanno dimostrato che in π_{16} risulta $t_{10} \leq 1$ e se $t_{10} = 1$ allora $t_{12} = 0$, $t_8 \leq 5$ e i punti di indice 8 costituiscono un t_8-arco di π_{16}. Invece se $t_{12} = t_{10} = 0$ allora $t_8 \leq 7$ e, in alcuni casi, i punti di indice 8 formano un t_8-arco di π_{16}.

2 - Unicità del punto di indice 10

Sia K un q-arco completo di π_q, q pari, $q \geq 16$, che ammette almeno un punto P_{q-6} di indice $q - 6$.

In maniera analoga a quanto dimostrato in [6] si prova la

(*) Ist. di Matem., Fac. Architettura, Univ. Firenze, Via dell'Agnolo 14, 50122 Firenze, Italia.

(**) Ricevuto il 10.12.1997. Classificatione AMS 51 E 21.

Proposizione 1. *Se t è una tangente di K passante per P_{q-6}, o su t esistono tre punti di indice* 4, *oppure esistono un punto di indice* 4 *e uno di indice* 6, *oppure esiste un punto di indice* 8 *(essendo i rimanenti punti di t di indice* 2*).*

D'ora in poi K indicherà un 16-arco completo di π_{16}.

Proposizione 2. *Se K ammette almeno un punto di indice* 10, *allora i punti di π_{16} hanno al più indice* 10.

Invero, da [7] segue $t_{14} = 0$, per cui i punti di π_{16} hanno al più indice 12. Ma se esiste un punto P_{12} di indice 12 dalla Proposizione 1 di [4] risulta $t_{10} = 0$ contro l'ipotesi.

Dalla Proposizione 1 segue il

Corollario 1. *La retta di π_{16} congiungente due punti di indice* 10 *è non tangente K.*

Lemma 1. *I punti di π_{16} di indice* 10 *sono al più due, cioè $t_{10} \leqslant 2$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano tre punti di indice 10. Esaminiamo dapprima il caso in cui essi non siano allineati. Detti P_{10}, A_{10} e B_{10} tali punti, dal Corollario 1 segue che le rette congiungenti tali punti a due a due non sono tangenti. Detta v la retta passante per A_{10} e B_{10} e denotato con v_{2j} il numero dei punti di v di indice $2j$ valgono le equazioni dei caratteri [6]

$$\begin{aligned} v_0 + v_2 + v_4 + v_6 + v_8 + v_{10} &= 17 \\ v_2 + 2v_4 + 3v_6 + 4v_8 + 5v_{10} &= 16\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Dalla seconda equazione, poichè $v_{10} = 2$, si ottiene

$$v_2 + 2v_4 + 3v_6 + 4v_8 = 6$$

in contraddizione con il fatto che le intersezioni della retta v con le dieci tangenti per P_{10} danno almeno dieci punti di indice maggiore di 0.

Consideriamo ora il caso in cui i tre punti P_{10}, A_{10} e B_{10} siano allineati. Dalla $(1)_2$ in questo caso, essendo $v_{10} = 3$, segue $v_2 = 1$ e quindi $v_0 = 13$. Ricordiamo ora che sulle tangenti per P_{10} o esiste un punto Q di indice 8, o un punto Q_1 di indice 6 e uno di indice 4, oppure esistono tre punti di indice 4. Nei primi due casi le tangenti per Q o per Q_1 incontrano la retta v in almeno sei punti distinti di indice maggiore di 0 in contraddizione con $v_0 = 13$. Nell'altro caso le tangenti uscenti dai tre punti di indice 4 individuano su v, oltre i punti P_{10}, A_{10} e B_{10} ed il punto di indice 2, almeno un altro punto di indice maggiore di 0, contro $v_0 = 13$.

Proposizione 3. *Se in π_{16} esiste almeno un punto di indice* 10, *esso è unico.*

Dimostrazione. Dal Lemma 1 si ha $t_{10} \leq 2$. Supponiamo per assurdo $t_{10} = 2$ e indichiamo con P_{10} e A_{10} tali punti e con b la retta che li congiunge. Le dieci tangenti per A_{10} incontrano ciascuna delle sei rette per P_{10} non tangenti K e non contenenti A_{10}, che indicheremo con r, in dieci punti distinti diversi da P_{10} e quindi su ciascuna di tali rette si hanno almeno undici punti di indice maggiore di 0. Indicato con r_{2j} il numero dei punti della retta r di indice $2j$ risulta $r_0 \leq 6$.

D'altra parte sulle tangenti per P_{10} c'è almeno un punto di indice maggiore di 2 e le tangenti per esso intersecheranno b in almeno quattro punti di indice maggiore di 0, per cui su tale retta $b_0 \leq 13$. Ne segue

$$t_0 \leq 49 \,. \tag{2}$$

Inoltre, dalle equazioni dei caratteri nel piano [6] per $q = 16$ e $t_{10} = 2$, si ha

$$\begin{aligned} t_0 + t_2 + t_4 + t_6 + t_8 &= 271 \\ 2t_2 + 4t_4 + 6t_6 + 8t_8 &= 524 \\ 2t_2 + 12t_4 + 30t_6 + 56t_8 &= 812 \end{aligned}$$

da cui

$$t_0 = 81 - t_6 - 3t_8 \qquad t_2 = 190 + 3t_6 + 8t_8 \qquad t_4 = 36 - 3t_6 - 6t_8 .$$

Ora, tenuto conto della (2), si ha $t_0 = 81 - t_6 - 3t_8 \leq 49$ e quindi

$$t_6 + 3t_8 \geq 32 \,. \tag{3}$$

Poichè $t_4 = 36 - 3t_6 - 6t_8 \geq 0$ risulta $t_6 + 2t_8 \leq 12$ da cui $t_6 \leq 12$ e $t_8 \leq 6$. Di conseguenza $t_6 + 3t_8 \leq 30$, in contraddizione con la (3) e quindi l'asserto.

3 - Proprietà dei 16-archi completi di π_{16} con $t_{10} = 1$

Se K è un 16-arco completo di π_{16} con $t_{10} = 1$, dalle equazioni dei caratteri per $q = 16$ e $t_{10} = 1$, si ottiene

$$t_0 = 51 - t_6 - 3t_8 \qquad t_2 = 175 + 3t_6 + 8t_8 \qquad t_4 = 46 - 3t_6 - 6t_8 . \tag{4}$$

Detto P_{10} l'unico punto di π_{16} di indice 10, proviamo la

Proposizione 4. *Le rette r per il punto di indice* 10 *non tangenti K contengono ciascuna almeno cinque punti di indice zero, cioè* $r_0 \geqslant 5$, *e al più due punti di indice* 8, *ovvero* $r_8 \leqslant 2$.

Dimostrazione. Infatti se r è una retta per il punto di indice 10 non tangente K, dalle equazioni dei caratteri si ha:

$$(5) \qquad r_0 + r_2 + r_4 + r_6 + r_8 = 16 \qquad r_2 + 2r_4 + 3r_6 + 4r_8 = 11$$

da cui

$$(6) \qquad r_0 = r_4 + 2r_6 + 3r_8 + 5$$

e quindi $r_0 \geqslant 5$. La disuguaglianza $r_8 \leqslant 2$ segue ovviamente dalla $(5)_2$.

Proposizione 5. *Se $t_8 \geqslant 1$ su una retta u tangente K passante per un punto di indice* 8 *e non passante per P_{10} si verifica che* $u_8 \leqslant 2$.

In particolare, se $u_8 = 2$, allora $u_6 = 0$ e $u_4 = 1$, mentre se $u_8 = 1$, allora si hanno tre possibilità: $u_6 = 0$ e $u_4 = 4$, oppure $u_6 = 1$ e $u_4 = 2$, oppure $u_6 = 2$ e $u_4 = 0$.

Infatti dalle equazioni dei caratteri sulla retta u [6] si ha

$$u_2 + u_4 + u_6 + u_8 = 17 \qquad u_2 + 3u_4 + 5u_6 + 7u_8 = 31$$

da cui, sottraendo membro a membro,

$$(7) \qquad u_4 + 2u_6 + 3u_8 = 7 .$$

Quindi risulta $u_8 \leqslant 2$. Se $u_8 = 2$, allora $u_6 = 0$ e $u_4 = 1$. Se $u_8 = 1$ l'asserto segue ancora dalla (7).

Proposizione 6. *Se $t_8 \geqslant 1$ su una retta v non tangente K passante per un punto di indice* 8 *e non passante per P_{10} si ha* $v_8 \leqslant 2$.

In particolare, se $v_8 = 2$ risulta $v_0 = 7$, $v_4 = v_6 = 0$; se $v_8 = 1$ si ha $v_6 \leqslant 1$, $v_4 \leqslant 3$, $v_0 \geqslant 4$.

Dimostrazione. Sulle non tangenti non passanti per P_{10} risulta:

$$(8) \qquad v_0 + v_2 + v_4 + v_6 + v_8 = 17 \qquad v_2 + 2v_4 + 3v_6 + 4v_8 = 16$$

da cui

(9) $$v_0 = v_4 + 2v_6 + 3v_8 + 1 .$$

Poiché i punti di indice 0 di v sono contenuti nell'intersezione di v con le sette rette per P_{10} non tangenti K segue:

(10) $$v_0 = v_4 + 2v_6 + 3v_8 + 1 \leqslant 7$$

e quindi $v_8 \leqslant 2$.

Se $v_8 = 2$, dalla (9), segue $v_0 = 7 + v_4 + 2v_6 \geqslant 7$ da cui subito $v_0 = 7$, $v_4 = v_6 = 0$. Se $v_8 = 1$, dalla (10) si ottiene

$$v_0 = v_4 + 2v_6 + 4 \leqslant 7$$

da cui l'asserto.

Dalla Proposizione 6, segue il

Corollario 2. *Le rette non tangenti K e non passanti per P_{10} contenenti due punti di indice 8 incontrano le rette per P_{10} non tangenti K tutte in punti di indice zero e quindi necessariamente i punti di indice 8 sono intersezioni con le rette per P_{10} tangenti K.*

Proposizione 7. *Se $t_8 \geqslant 1$ e $t_0 \leqslant 39$, allora la retta congiungente ciascun punto di indice 8 con il punto di indice 10 è tangente K.*

Infatti, se per assurdo supponiamo che tale retta sia non tangente K, allora dalla (6) si ottiene $r_0 \geqslant 8$. Su ciascuna delle rimanenti otto rette per un punto di indice 8 non tangenti K, distinte dalla congiungente con il punto di indice 10, per il Corollario 2, si ha $v_8 = 1$ e quindi per la Proposizione 6 $v_0 \geqslant 4$. Ne segue che $t_0 \geqslant 40$ contro l'ipotesi.

Proposizione 8. *Se $t_8 \geqslant 3$ allora la retta congiungente P_{10} con almeno uno dei punti di indice 8 è una retta tangente K.*

Dimostrazione. Se $t_0 \leqslant 39$ l'asserto è vero per la Proposizione 7. Se $t_0 \geqslant 40$ da $t_0 = 51 - t_6 - 3t_8$ segue $t_6 + 3t_8 \leqslant 11$ e quindi $t_8 \leqslant 3$ da cui $t_8 = 3$. Ne segue che $t_0 = 42 - t_6 \leqslant 42$.

Proviamo dunque che l'asserto è vero anche nei tre casi in cui $t_8 = 3$ e $t_0 = 40, 41, 42$. Se $t_8 = 3$ e $t_0 = 42$, allora $t_6 = 0$ e $t_4 = 28$. Per la Proposizione 1 al più nove tangenti per P_{10} contengono ciascuna tre punti di indice 4 e quindi una tangente per P_{10} contiene un punto di indice 8. Se $t_8 = 3$ e $t_0 = 41$ risulta $t_6 = 1$ e $t_4 = 25$. Allora al più 8 tangenti per P_{10} contengono tre punti di indice 4, una il punto di indice 6 ed il rimanente punto di indice 4 e dunque anche in questo caso esiste almeno una tangente per P_{10} contenente un punto di indice 8. Se $t_8 = 3$ e $t_0 = 40$, $t_6 = 2$ e $t_4 = 22$. Ne segue che al più otto tangenti per P_{10} contengono i punti di indice 6 e 4 e quindi ci sono almeno due rette per P_{10} che contengono punti di indice 8.

Proposizione 9. *Se $t_8 \geqslant 3$ allora su una non tangente per P_{10} c'è al più un punto di indice* 8, *cioè la seconda disuguaglianza della Proposizione* 4 *si migliora con $r_8 \leqslant 1$.*

Dimostrazione. Se $t_0 \leqslant 39$ dalla Proposizione 7 segue che sulle non tangenti per P_{10} si ha $r_8 = 0$. Proviamo l'asserto nel caso in cui $t_0 > 39$. Supponiamo per assurdo che su una non tangente r per P_{10} ci siano due punti di indice 8. Dalla $(5)_2$ essendo $r_{10} = 1$ e $r_8 = 2$ si ha:

$$r_2 + 2r_4 + 3r_6 = 3$$

e allora la somma dei punti di indice non nullo su r è al più sei.

D'altra parte per la proposizione precedente esiste almeno un punto di indice 8 appartenente alle tangenti per P_{10}. Le otto tangenti per tale punto determinano su r almeno otto punti di indice non nullo in contraddizione con quanto appena provato.

Proposizione 10. *Se $t_8 \geqslant 2$ e $t_0 \leqslant 38$, allora le rette congiungenti i punti di indice* 8 *sono tangenti K.*

Per assurdo supponiamo che la retta congiungente due punti di indice 8 sia non tangente K. Per la Proposizione 7 tale retta non contiene il punto di indice 10 e dunque, per la Proposizione 6, caso $v_8 = 2$, si ha $v_0 = 7$. Sulle rimanenti otto rette non tangenti per uno dei punti di indice 8, tenuto conto anche della Proposizione 6, caso $v_8 = 1$, si ha $v_0 \geqslant 4$. Ne segue che $t_0 \geqslant 39$ contro l'ipotesi.

Proposizione 11. *Sussistono le proprietà:*

1. $t_8 = 2$ *implica* $t_6 \leqslant 8$ *e* $37 \leqslant t_0 \leqslant 45$
2. $t_8 = 1$ *implica* $t_6 \leqslant 10$ *e* $38 \leqslant t_0 \leqslant 48$
3. $t_8 = 0$ *implica* $t_6 \leqslant 12$ *e* $39 \leqslant t_0 \leqslant 51$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 1 ciascuna tangente per P_{10} che non contiene un punto di indice 8 ne contiene almeno uno di indice 4, per cui

$$t_4 \geqslant 10 - t_8 . \tag{11}$$

Tenuto conto della terza delle (4), si ha

$$3t_6 + 5t_8 \leqslant 36 . \tag{12}$$

Se, in particolare, $t_8 = 2$ segue $t_6 \leqslant 8$. Inoltre, essendo per la prima delle (4) $t_0 = 45 - t_6$, si ottiene $37 \leqslant t_0 \leqslant 45$. In maniera analoga dalla (12) si deducono anche le proprietà 2 e 3.

Proposizione 12. *I punti di indice zero sono* $t_0 \geqslant 36$.

Se $t_8 \leqslant 2$, l'asserto è vero per la proposizione precedente. Proviamo ora la proposizione nell'ipotesi che $t_8 \geqslant 3$. Se $t_0 < 36$, dalle Proposizioni 7 e 10 si deduce che le rette per un punto di indice 8 non tangenti K, non contengono P_{10} e ognuna di esse contiene un solo punto di indice 8. Ne segue che per ciascuna delle nove rette per un punto di indice 8 non tangente K sussiste la Proposizione 6, caso $v_8 = 1$. Risulta quindi $t_0 \geqslant 36$, contro l'ipotesi.

Proposizione 13. *Se* $t_0 = 36$ *e* $t_6 \geqslant 1$ *la retta congiungente ciascun punto di indice* 6 *con il punto di indice* 10 *è tangente* K.

Infatti, se per assurdo supponiamo che tale retta sia non tangente K, dalla Proposizione 7 segue che essa non contiene punti di indice 8 e allora dalla (6), tenuto conto che $r_6 \geqslant 1$, $r_8 = 0$ e $r_{10} = 1$, si ottiene $r_0 \geqslant 7$. Sulle altre dieci rette non tangenti per un punto di indice 6 vale la (9) con $v_6 \geqslant 1$, per cui $v_0 \geqslant 3$. Ne segue che $t_0 \geqslant 37$ contro l'ipotesi.

Proposizione 14. *I punti di indice* 8 *sono al più cinque. Inoltre*:

1. $t_8 = 5$ *implica* $t_6 = 0$ *e* $t_0 = 36$
2. $t_8 = 4$ *implica* $t_6 \leqslant 3$ *e* $36 \leqslant t_0 \leqslant 39$
3. $t_8 = 3$ *implica* $t_6 \leqslant 6$ *e* $36 \leqslant t_0 \leqslant 42$.

Infatti, dalla prima delle (4) si ha $t_0 = 51 - t_6 - 3t_8$ e poichè per la Proposizione 12 è $t_0 \geqslant 36$ risulta $t_6 + 3t_8 \leqslant 15$ da cui $t_8 \leqslant 5$; in particolare sussistono le proprietà 1, 2, 3.

Proposizione 15. *Se* $t_8 \geqslant 3$ *l'insieme* H *dei punti di indice* 8 *è un* t_8*-arco di* π_{16} *e l'insieme* $H' = H \cup P_{10}$ *è un* (t_8+1)*-arco di* π_{16}.

Dalle Proposizioni 1, 4, 5 e 6 segue che i punti di indice 8 sono a tre a tre non allineati e quindi H è un t_8-arco. Anche H' è un arco in conseguenza delle Proposizioni 1, 5, 6 e 9.

Corollario 3. *Se* $t_8 = 5$ *le secanti il* 5*-arco* H *e le secanti il* 6*-arco* H' *sono rette tangenti* K.

Infatti se $t_8 = 5$, allora $t_0 = 36$ e per la Proposizione 10 le dieci secanti H sono le rette tangenti K contenenti due punti di indice 8. Per l'arco H' si verifica invece che le quindici secanti sono le dieci secanti H e le cinque rette congiungenti P_{10} con ciascun punto di indice 8 che risultano tangenti K per la Proposizione 7.

Osserviamo inoltre che le sessantacinque tangenti H sono le cinque tangenti K per P_{10} che contengono ciascuna un punto di indice 8, le quindici tangenti K (tre per ciascun punto di indice 8) che contengono un sol punto di indice 8 e le quarantacinque non tangenti K (nove per ciascun punto di indice 8). Le settantadue tangenti ad H' sono invece le quindici tangenti K (tre per ciascun punto di indice 8) che contengono un sol punto di indice 8, le quarantacinque rette non tangenti K (nove per ciascun punto di indice 8), le cinque tangenti per P_{10} che non contengono punti di indice 8 e le sette rette non tangenti per P_{10}.

4 - Caso $t_{12} = t_{10} = 0$

Completiamo ora lo studio dei 16-archi completi di π_{16} esaminando il caso in cui $t_{12} = t_{10} = 0$. Osserviamo innanzitutto che in queste ipotesi dalle equazioni dei caratteri si ha:

$$(13) \qquad t_0 = 57 - t_6 - 3t_8 \qquad t_2 = 160 + 3t_6 + 8t_8 \qquad t_4 = 56 - 3t_6 - 6t_8 .$$

Proposizione 16. *Se* $t_{12} = t_{10} = 0$ *sussistono le proprietà:*

1. $t_8 = 2$ *implica* $t_6 \leqslant 14$ *e* $37 \leqslant t_0 \leqslant 51$
2. $t_8 = 1$ *implica* $t_6 \leqslant 16$ *e* $38 \leqslant t_0 \leqslant 54$
3. $t_8 = 0$ *implica* $t_6 \leqslant 18$ *e* $39 \leqslant t_0 \leqslant 57$.

Infatti, dalla terza delle (13) si ha $t_4 = 56 - 3t_6 - 6t_8 \geqslant 0$, da cui

$$3t_6 + 6t_8 \leqslant 56 \,. \tag{14}$$

Se $t_8 = 2$, allora $t_6 \leqslant 14$. Inoltre, tenuto conto della prima delle (13), si ha $t_0 = 57 - t_6 - 3t_8$ e quindi, nell'ipotesi $t_8 = 2$, si ottiene $37 \leqslant t_0 \leqslant 51$. Le proprietà 2 e 3 si ottengono in maniera analoga dalla (14).

Proposizione 17. *I punti di indice zero sono* $t_0 \geqslant 36$.

In effetti, se $t_8 \leqslant 2$ l'asserto è vero per la proposizione precedente. Proviamo che la proprietà sussiste anche se $t_8 \geqslant 3$. Sulle rette v non tangenti K passanti per un punto di indice 8 si verificano le (8) e quindi la (9), ovvero $v_0 = v_4 + 2v_6 + 3v_8 + 1$. Essendo $v_8 \geqslant 1$ si deduce che su ciascuna delle nove rette non tangenti K per un punto di indice 8 risulta $v_0 \geqslant 4$ da cui $t_0 \geqslant 36$.

Proposizione 18. *Se* $t_{12} = t_{10} = 0$, *allora i punti di indice* 8 *sono al più sette. In particolare*:

1. $t_8 = 7$ *implica* $t_6 = 0$ *e* $t_0 = 36$
2. $t_8 = 6$ *implica* $t_6 \leqslant 3$ *e* $36 \leqslant t_0 \leqslant 39$
3. $t_8 = 5$ *implica* $t_6 \leqslant 6$ *e* $36 \leqslant t_0 \leqslant 42$
4. $t_8 = 4$ *implica* $t_6 \leqslant 9$ *e* $36 \leqslant t_0 \leqslant 45$
5. $t_8 = 3$ *implica* $t_6 \leqslant 12$ *e* $36 \leqslant t_0 \leqslant 48$.

Infatti, dalla prima equazione delle (13) e dalla Proposizione 17 segue

$$t_0 = 57 - t_6 - 3t_8 \geqslant 36 \,,$$

da cui $3t_8 + t_6 \leqslant 21$ e quindi $t_8 \leqslant 7$ e le successive implicazioni.

Osservazione 1. Se $t_8 \geqslant 1$ per le rette tangenti K passanti per un punto di indice 8 sussiste anche in questo caso la Proposizione 5.

Osservazione 2. Se $t_8 \geqslant 2$ e $t_0 \leqslant 38$ vale ancora la Proposizione 10.

Infatti se supponiamo che esistano due punti P_8 e P_8' di indice 8 tali che la retta r che li congiunge sia non tangente K, allora su r, per la (9) si verifica $r_0 \geqslant 7$, mentre sulle rimanenti 8 rette per P_8 non tangenti K, risulta $v_0 \geqslant 4$. Ne segue $t_0 \geqslant 39$ contro l'ipotesi.

Proposizione 19. *Sia* $t_8 = 3$ *e* $t_6 \geqslant 7$, *oppure* $t_8 = 4$ *e* $t_6 \geqslant 1$, *oppure* $t_8 \geqslant 5$. *Se* P_8 *è un punto di indice 8, almeno per una retta* u *tangente* K *passante per* P_8 *risulta* $u_8 = 2$.

Dimostrazione. Se $t_8 = 3$ allora $t_0 = 48 - t_6$, ed essendo $t_6 \geqslant 7$, risulta $t_0 \leqslant 41$. Se $t_0 \leqslant 38$, l'asserto è vero per la Proposizione 10. Proviamo allora che la proprietà si verifica anche nei casi $t_0 = 39$, 40 e 41.

Se $t_0 = 39$, allora $t_6 = 9$ e $t_4 = 11$. Se per assurdo supponiamo che le tangenti per un punto di indice 8 non contengano altri punti di indice 8, per la Proposizione 5 si verifica che i punti di indice 4 appartenenti a tali tangenti dovrebbero essere almeno 14, in contraddizione con $t_4 = 11$.

Un ragionamento analogo si fa nei casi $t_0 = 40$ e 41 e con argomentazioni dello stesso tipo si prova la proposizione nelle ipotesi $t_8 = 4$ e $t_6 \geqslant 1$ oppure $t_8 \geqslant 5$.

Proposizione 20. *Se* $t_8 = 3$ *e* $t_6 \geqslant 7$, *oppure* $t_8 = 4$ *e* $t_6 \geqslant 1$, *oppure* $t_8 \geqslant 5$, *su una retta* v *non tangente* K *passante per un punto di indice* 8 *risulta* $v_8 \leqslant 2$.

In particolare $v_8 = 2$ *implica* $7 \leqslant v_0 \leqslant 9$, $v_4 \leqslant 2$, $v_6 \leqslant 1$ *e* $v_8 = 1$ *implica* $v_6 \leqslant 2$, $v_4 \leqslant 5$.

Dimostrazione. Detto P_8 un punto di indice 8, per la proposizione precedente, sappiamo che esiste per esso una tangente contenente un altro punto P_8' di indice 8. Allora le rette v per P_8 non tangenti K non passano per P_8' e di conseguenza i punti di indice zero di v sono contenuti nell'intersezione di v con le nove rette per P_8' non tangenti K. Dalla (9) segue quindi

$$v_0 = v_4 + 2v_6 + 3v_8 + 1 \leqslant 9 \tag{15}$$

da cui $v_4 + 2v_6 + 3v_8 \leqslant 8$.

Quindi su ogni retta per P_8 non tangente K risulta $v_8 \leqslant 2$. Dalla (15) si deduce poi facilmente l'ultima parte della Proposizione 20.

Proposizione 21. *Se* $t_8 = 3$ *e* $t_6 \geqslant 7$, *oppure* $t_8 = 4$ *e* $t_6 \geqslant 1$, *oppure* $t_8 \geqslant 5$, *i punti di indice* 8 *costituiscono un* t_8*-arco* H. *In particolare se* $t_8 = 7$ *le rette secanti* H *sono tangenti di* K.

Infatti dalle Proposizioni 5 e 20 risulta che i punti di indice 8 sono a tre a tre non allineati. Inoltre se $t_8 = 7$ allora $t_6 = 0$ e $t_0 = 36$. Sussiste quindi la Proposizione 10 per cui le congiungenti due punti di indice 8 sono tangenti K.

References

[1] G. Menichetti, *q-Archi completi nei piani di Hall di ordine $q = 2^k$*, Atti Accad. Lincei Rend. **56** (1974), 518-525.

[2] G. Menichetti, *k-archi completi in piani di Moulton d'ordine q^m*, Atti Accad. Lincei Rend. **60** (1976), 775-781.

[3] R. Stangarone e A. Terrusi, *Sui q-archi completi di un piano non desarguesiano di ordine q pari*, Matematiche 44 (1989), 97-112.

[4] R. Stangarone e A. Terrusi, *Alcuni risultati sui q-archi completi di un piano proiettivo π_q, q pari, $q \geq 16$*, Res. Lecture Notes Math. Complex Anal. Geom., Combinatorics '88, 2 (1990), 439-448.

[5] R. Stangarone e A. Terrusi, *Recenti risultati sui q-archi completi nei piani di ordine pari $q \geq 16$*, Rend. Mat. Appl. 12 (1992), 69-83.

[6] G. Tallini, *Sui q-archi completi di un piano proiettivo non desarguesiano di ordine q pari*, Quad. Sem. Geom. Comb. 54, Univ. La Sapienza, Roma 1985.

[7] C. Zanella, *On complete* 12*-arcs in projective planes of order* 12, Ann. Discrete Math. 37 (1988), 485-492.

Summary

In this paper we study the complete 16*-arcs of π_{16} non admitting points of index* 12. *We prove that if π_{16} has a point of index* 10*, then it is unique and the points of index* 8 *are at most* 5 *and form an arc of π_{16}. If there aren't points of index* 10 *and* 12 *then the points of index* 8 *are at most* 7 *and in certain cases form an arc of π_{16}.*

* * *