Riv. Mat. Univ. Parma (5) **6** (1997), 53-60

FILIPPO DOTTI (*)

Quasi-isomorfismi fra teorie nei linguaggi con simboli funzionali (**)

Introduzione

Nel presente lavoro indeboliamo il concetto di isomorfismo di teorie che, come si arguisce dalla caratterizzazione semantica, risulta troppo restrittivo; si perviene così al concetto di quasi-isomorfismo. Per i quasi-isomorfismi, il *doppio ritaglio* di un modello risulta elementarmente equivalente al modello stesso e questa sembra una condizione più accettabile dell'identità. Per le notazioni ed i concetti relativi a quello di interpretazione fra teorie, ci riferiamo alle convenzioni ed ai risultati raccolti in [3], del quale presupponiamo la lettura.

1 - Il teorema semantico, il funtore $R_{\mathcal{K}}$ e le estensioni di teorie

Date $A \in \Phi(\mathcal{L})$ ed un'interpretazione $\mathcal{M}$ di $\mathcal{L}$, quando $Lib(A) = \{y_1, \ldots, y_k\}$, scriveremo $\models_{\mathcal{M}} A(y_1, \ldots, y_k)[a_1, \ldots, a_k]$ per indicare che $\models_{\mathcal{M}} A[s]$, dove $s\colon \mathcal{V} \to M$ è tale che $s(y_i) = a_i$ per ogni $i = 1, \ldots, k$; poniamo inoltre

$$A^{\mathcal{M}} = \{(a_1, \ldots, a_k) \in M^k \colon \models_{\mathcal{M}} A(y_1, \ldots, y_k)[a_1, \ldots, a_k]\}.$$

Definizione 1. Siano $\mathcal{K}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ e $\mathcal{M} \in \mathcal{M}od(\mathcal{T}')$; diremo *ritaglio di* $\mathcal{M}$ *secondo* $\mathcal{K}$, e la indicheremo con $\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})$, l'interpretazione di $\mathcal{L}$ avente supporto $H^{\mathcal{M}}$ e tale che $P^{R_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})} = F(P)^{\mathcal{M}}$ per ogni $P \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ e $f^{R_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})} = F(f)^{\mathcal{M}} \cap (H^{\mathcal{M}})^{k+1}$ per ogni $f \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L})$.

(*) Via Galilei 27/C, 29100 Piacenza, Italia.
(**) Ricevuto il 4.6.97. Classificazione AMS 03 C 07.

La Definizione 1 è ben data in virtù delle proprietà delle seminterpretazioni. D'ora in poi indicheremo con $|\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})|$ il sostegno di $\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})$; useremo una notazione di questo tipo anche per strutture più complesse.

Teorema 1. (Teorema semantico). *Siano* $\mathcal{K}\colon \mathcal{T}\to\mathcal{T}'$ *e* $\mathcal{M}\in\mathcal{M}od(\mathcal{T}')$. *Allora* $\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})\in\mathcal{M}od(\mathcal{T})$ *e, se* $A\in\Phi(\mathcal{L})$, *si ha che:*

(1) $$\models_{\mathcal{M}} A^{\mathcal{K}} \Leftrightarrow \models_{\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})} A$$

(2) $$\models_{\mathcal{M}} A_{\mathcal{K}}[s] \Leftrightarrow \models_{\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})} A[s] \qquad s\colon \mathcal{V}\to|\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})|\,.$$

Dimostrazione. Per induzione sull'altezza delle formule si dimostra che

(3) $$\models_{\mathcal{M}} A^{*}[s] \Leftrightarrow \models_{\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})} A[s] \qquad s\colon \mathcal{V}\to|\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})| \qquad A\in\Phi(\mathcal{L})\,.$$

Sfruttando il Lemma 1 di [3] e la (3) si arriva alla tesi.

È ben noto che se $\mathcal{T}$ è una teoria del primo ordine, i modelli di $\mathcal{T}$ e le immersioni elementari fra i modelli di $\mathcal{T}$ sono rispettivamente gli oggetti e i morfismi di una categoria; essa viene indicata con $\mathcal{M}od(\mathcal{T})$. Se $\mathcal{K}\colon \mathcal{T}\to\mathcal{T}'$, il Teorema 1 stabilisce un'applicazione tra gli oggetti di $\mathcal{M}od(\mathcal{T}')$ e quelli di $\mathcal{M}od(\mathcal{T})$, indicata con $\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}$.

Sia $h\colon \mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ un morfismo di $\mathcal{M}od(\mathcal{T}')$. Si ha che $h[\,|\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})|\,]\subseteq|\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}')|$. Sfruttando la (3), si ottiene che $h\restriction|\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})|\colon |\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})|\to|\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}')|$ è un'immersione elementare. Definiamo quindi $\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(h)=h\restriction|\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})|$. Ovviamente la funzione $\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}$ conserva composizione e identità. Abbiamo così ottenuto il

Teorema 2. *Se* $\mathcal{K}\colon \mathcal{T}\to\mathcal{T}'$, *la funzione* $\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}$ *che associa ad ogni oggetto* $\mathcal{M}'$ *di* $\mathcal{M}od(\mathcal{T}')$ *l'oggetto* $|\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}')|$ *di* $\mathcal{M}od(\mathcal{T})$ *e ad ogni morfismo* h *di* $\mathcal{M}od(\mathcal{T}')$ *il morfismo* $\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(h)$ *di* $\mathcal{M}od(\mathcal{T})$ *è un funtore fra le categorie* $\mathcal{M}od(\mathcal{T}')$ *e* $\mathcal{M}od(\mathcal{T})$.

Definizione 2. Diremo che il funtore $\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}\colon \mathcal{M}od(\mathcal{T}')\to\mathcal{M}od(\mathcal{T})$ è *debolmente rappresentativo* se è suriettivo sugli oggetti a meno di elementare equivalenza: per ogni $\mathcal{M}\in\mathcal{M}od(\mathcal{T})$ esiste $\mathcal{M}'\in\mathcal{M}od(\mathcal{T}')$ tale che $\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}')\equiv\mathcal{M}$.

Definizione 3. Diremo che un'interpretazione $\mathcal{K}\colon \mathcal{T}\to\mathcal{T}'$ è *conservativa* se per ogni $A\in\Phi(\mathcal{L})$ si ha che $\vdash_{\mathcal{T}}A$ se e solo se $\vdash_{\mathcal{T}'}A^{\mathcal{K}}$.

Teorema 3. *Ogni estensione di una teoria individua un'interpretazione; tale interpretazione è conservativa se e solo se l'estensione è conservativa.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{T}$ una teoria nel linguaggio $\mathcal{L}$ e $\mathcal{T}'$ un'estensione di $\mathcal{T}$; sia $H = (x_1 \doteq x_1)$; per ogni $P \in \mathcal{P}_k(\mathcal{L})$ sia $F(P) = P(x_1, \ldots, x_k)$; per ogni $f \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ sia $F(f) = f$. Allora $\mathfrak{I} = (H, F)$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$; infatti per induzione si ottiene che $\vdash_{\mathcal{T}} A \leftrightarrow A_{\mathfrak{I}}$ per ogni $A \in \Phi(\mathcal{L})$. Il resto della tesi si ottiene osservando che:

$$\vdash_{\mathcal{T}'} A \leftrightarrow A^{\mathfrak{I}} \qquad A \in \Phi(\mathcal{L}). \tag{4}$$

Esempio 1. Sia $\mathfrak{I}$ un'interpretazione individuata da un'estensione non conservativa secondo il Teorema 3. Allora $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{I}}$ risulta non debolmente rappresentativo.

2 - L'isomorfismo di teorie

Lemma 1. *Siano* $\mathcal{H}$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$, $\mathcal{K} = (K, G)$: $\mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ *tali che* $\vdash_{\mathcal{T}} (A^{\mathcal{H}})^{\mathcal{K}} \leftrightarrow A$ *per ogni* $A \in \Phi(\mathcal{L})$. *Allora* $M = |\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})|$ *per ogni* $\mathcal{M} \in \mathcal{M}od(\mathcal{T})$.

Dimostrazione. Per definizione è $|\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})| \subseteq M$. Sia ora $a \in M$, allora si ha che $\nvDash_{\mathcal{M}} \neg(x_1 \doteq x_1)[a]$; essendo $\vdash_{\mathcal{T}} \neg(x_1 \doteq x_1) \leftrightarrow ((\neg(x_1 \doteq x_1))^{\mathcal{H}})^{\mathcal{K}}$, si ha che $\nvDash_{\mathcal{M}} ((\neg(x_1 \doteq x_1))^{\mathcal{H}})^{\mathcal{K}}[a]$; poiché $((\neg(x_1 \doteq x_1))^{\mathcal{H}})^{\mathcal{K}} = K \to ((\neg(x_1 \doteq x_1))^{\mathcal{H}})_{\mathcal{K}}$, si ha che $\vDash_{\mathcal{M}} K[a]$; allora $a \in |\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})|$; quindi $M \subseteq |\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})|$.

Definizione 4. Diremo che $\mathcal{H}$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ è un *isomorfismo di teorie* se esiste $\mathcal{K}$: $\mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ tale che:

$$\vdash_{\mathcal{T}} A \leftrightarrow (A^{\mathcal{H}})^{\mathcal{K}} \quad \text{e} \quad \vdash_{\mathcal{T}'} B \leftrightarrow (B^{\mathcal{K}})^{\mathcal{H}} \qquad A \in \Phi(\mathcal{L}), \ B \in \Phi(\mathcal{L}'). \tag{5}$$

Se vale la (5) si dirà anche che $\mathcal{K}$ è un isomorfismo di teorie *associato* ad $\mathcal{H}$.

Cerchiamo ora una caratterizzazione categoriale del concetto di isomorfismo di teorie. Le interpretazioni sono i morfismi di $\mathcal{T}eor$; ha quindi senso chiedersi quando un'interpretazione è un isomorfismo (nel significato categoriale).

Teorema 4. *Siano* $\mathcal{H}$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ *e* $\mathcal{K}$: $\mathcal{T}' \to \mathcal{T}$. *Allora sono equivalenti:*

i. $\mathcal{H}$ *è un isomorfismo di teorie con isomorfismo associato* $\mathcal{K}$.

ii. $\mathcal{H}$ *è un morfismo invertibile della categoria* $\mathcal{T}eor$ *e* $\mathcal{K}$ *è il suo inverso.*

Ricordiamo che a rigore dovremmo parlare di $[\mathcal{H}]$ rispetto all'equivalenza della Definizione 5 di [3].

Dimostrazione. La **ii** equivale a $\mathcal{K}\mathcal{H} \sim \mathcal{T}$ e $\mathcal{H}\mathcal{K} \sim \mathcal{T}'$ e cioè a

$$\vdash_{\mathcal{T}} A^{\mathcal{K}\mathcal{H}} \longrightarrow A^{\mathcal{T}} \quad \text{e} \quad \vdash_{\mathcal{T}'} B^{\mathcal{H}\mathcal{K}} \leftrightarrow B^{\mathcal{T}'} \qquad A \in \Phi(\mathcal{L}), \ B \in \Phi(\mathcal{L}')$$

per il Lemma 15 di [3]; con semplici calcoli si verifica che questo equivale a:

$$\vdash_{\mathcal{T}} (A^{\mathcal{H}})^{\mathcal{K}} \leftrightarrow A^{\mathcal{T}} \quad \text{e} \quad \vdash_{\mathcal{T}'} (B^{\mathcal{K}})^{\mathcal{H}} \leftrightarrow B^{\mathcal{T}'} \qquad A \in \Phi(\mathcal{L}), \ B \in \Phi(\mathcal{L}').$$

Per come sono definite $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$, sfruttando la (1) di [3], si ha che

$$\vdash_{\mathcal{T}} A^{\mathcal{T}} \leftrightarrow A \quad \text{e} \quad \vdash_{\mathcal{T}'} B^{\mathcal{T}'} \leftrightarrow B \quad A \in \Phi(\mathcal{L}), \ B \in \Phi(\mathcal{L}').$$

In definitiva la condizione **ii** equivale alla **i**.

Diamo ora una caratterizzazione semantica del concetto di isomorfismo di teorie.

Teorema 5. *Siano $\mathcal{H}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ e $\mathcal{K}\colon \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$. Allora sono equivalenti:*

i. $\vdash_{\mathcal{T}} A \leftrightarrow (A^{\mathcal{H}})^{\mathcal{K}}$ *e* $\vdash_{\mathcal{T}'} B \leftrightarrow (B^{\mathcal{K}})^{\mathcal{H}}$ $\qquad A \in \Phi(\mathcal{L}), \ B \in \Phi(\mathcal{L}')$

ii. $\mathcal{M} = \boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}))$ *e* $\mathcal{M}' = \boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}(\mathcal{M}'))$ $\quad \mathcal{M} \in \mathcal{M}od(\mathcal{T}), \ \mathcal{M}' \in \mathcal{M}od(\mathcal{T}')$.

Dimostrazione.
i⇒ii. Sia $\mathcal{M} \in \mathcal{M}od(\mathcal{T})$; allora $M = |\boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}))|$. Siano $A \in \Phi(\mathcal{L})$ e $s\colon \mathcal{V} \to M$. Sfruttando **i** e la (2), si ha che $\models_{\mathcal{M}} A[s]$ se e solo se $\models_{\boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}))} A[s]$. Prendendo $A = P(x_1, \ldots, x_k)$ oppure $A = (x_{k+1} \doteq f(x_1, \ldots, x_k))$, si ha rispettivamente che $P^{\mathcal{M}} = P^{\boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}))}$ oppure $f^{\mathcal{M}} = f^{\boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}))}$. Essendo P e f arbitrari, $\mathcal{M} = \boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}))$. Per simmetria si ha la seconda parte della tesi.

ii⇒i. Siano $A \in \Phi(\mathcal{L})$, $\mathcal{M} \in \mathcal{M}od(\mathcal{T})$ e $s\colon \mathcal{V} \to M$. Sfruttando **ii** e la (2), si ha che $\models_{\mathcal{M}} A[s]$ se e solo se $\models_{\mathcal{M}} (A^{\mathcal{H}})^{\mathcal{K}}[s]$. Essendo s e $\mathcal{M}$ arbitrari, $\vdash_{\mathcal{T}} A \leftrightarrow (A^{\mathcal{H}})^{\mathcal{K}}$; per simmetria si ha la seconda parte della tesi.

Indicando con $\mathbb{M}od$ la sottocategoria piena di $\mathbb{C}at$ avente come oggetti le categorie dei modelli delle teorie con le immersioni elementari, allora la funzione $\mathcal{M}od$ che associa ad ogni teoria $\mathcal{T}$ la categoria $\mathcal{M}od(\mathcal{T})$ dei suoi modelli e che associa ad ogni $[\mathcal{H}]$ il funtore $\boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}$ (che risulta indipendente dal rappresentante di $[\mathcal{H}]$), è un funtore controvariante fra $\mathbb{T}eor$ e $\mathbb{M}od$. Come tutti i funtori, $\mathcal{M}od$ conserva gli isomorfismi; quindi, sfruttando il Teorema 4, si ottiene subito una dimostrazione alternativa di **i⇒ii** del Teorema 5.

3 - I quasi-isomorfismi di teorie

Teorema 6. *Siano* $\mathcal{H}: \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ *e* $\mathcal{K}: \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$. *Sono equivalenti:*

i. $\vdash_{\mathcal{T}} A \leftrightarrow (A^{\mathcal{H}})^{\mathcal{K}}$ $\qquad A \in \mathcal{E}n(\mathcal{L})$

ii. $\mathcal{M} \equiv \boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}))$ $\qquad \mathcal{M} \in \mathcal{M}od(\mathcal{T})$.

Dimostrazione.

i$\Rightarrow$ii. Sia $B \in \mathcal{E}n(\mathcal{L})$ tale che $\models_{\mathcal{M}} B$. Per la **i** si ha che $\models_{\mathcal{M}} (B^{\mathcal{H}})^{\mathcal{K}}$; per la (1), $\models_{\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})} B^{\mathcal{H}}$ e quindi $\models_{\boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}))} B$. Essendo B arbitrario, si ha la tesi.

ii$\Rightarrow$i. Si procede analogamente all'implicazione precedente.

Corollario 1. *Siano* $\mathcal{H}: \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ *e* $\mathcal{K}: \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$. *Sono equivalenti:*

i. $\vdash_{\mathcal{T}} A \leftrightarrow (A^{\mathcal{H}})^{\mathcal{K}}$ *e* $\vdash_{\mathcal{T}'} B \leftrightarrow (B^{\mathcal{K}})^{\mathcal{H}}$ $\qquad A \in \mathcal{E}n(\mathcal{L})$, $B \in \mathcal{E}n(\mathcal{L}')$

ii. $\mathcal{M} \equiv \boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}))$ *e* $\mathcal{M}' \equiv \boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}(\mathcal{M}'))$ $\qquad \mathcal{M} \in \mathcal{M}od(\mathcal{T})$, $\mathcal{M}' \in \mathcal{M}od(\mathcal{T}')$.

Il Teorema 5 mostra come il concetto di isomorfismo fra teorie sia troppo forte, giacché vanifica l'operazione di *doppio ritaglio*. Per questo motivo si ritiene opportuno indebolire tale concetto, limitando la (5) ai soli enunciati secondo la successiva Definizione 5. Per questo nuovo concetto, il Corollario 1 dà una caratterizzazione semantica più soddisfacente.

Definizione 5. Diremo che $\mathcal{H}: \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ e $\mathcal{K}: \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ sono *quasi-isomorfismi (associati)* se $\vdash_{\mathcal{T}} A \leftrightarrow (A^{\mathcal{H}})^{\mathcal{K}}$ per ogni $A \in \mathcal{E}n(\mathcal{L})$ *e* $\vdash_{\mathcal{T}'} B \leftrightarrow (B^{\mathcal{K}})^{\mathcal{H}}$ *per ogni* $B \in \mathcal{E}n(\mathcal{L}')$.

In virtù del Corollario 1, se $\mathcal{H}$ è un quasi-isomorfismo di teorie, allora $\boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}$ è debolmente rappresentativo. Diamo ora un esempio di quasi-isomorfismi di teorie che non sono isomorfismi di teorie.

Esempio 2. Siano $\mathcal{L}$ il linguaggio con $\mathcal{P}(\mathcal{L}) = \mathcal{P}_1(\mathcal{L}) = \{P_1, \ldots, P_n, \ldots\}$ e $\mathcal{F}(\mathcal{L}) = \emptyset$ e $\mathcal{T}$ la teoria in $\mathcal{L}$ avente i seguenti assiomi:

$$(\exists! x) \neg P_1(x) \quad (\exists! x)(P_n(x) \wedge \neg P_{n+1}(x)) \quad (\forall x)(P_{n+1}(x) \to P_n(x)) \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Posto $H = P_1(x_1)$ e $F(P_i) = P_{i+1}(x_1)$ per ogni $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, con semplici calcoli si verifica che la coppia $\mathcal{H} = (H, F)$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}$. Si verifica che $\mathcal{M} \approx \boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}(\mathcal{M})$ per ogni

$\mathcal{M} \in \mathcal{M}od(\mathcal{T})$ (con $\approx$ indichiamo l'isomorfismo fra interpretazioni di uno stesso linguaggio). Chiaramente è $\boldsymbol{R}_{\mathcal{T}}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ per ogni $\mathcal{M} \in \mathcal{M}od(\mathcal{T})$. Fissato $\mathcal{M} \in \mathcal{M}od(\mathcal{T})$, si ha dunque che $\boldsymbol{R}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}(\mathcal{M})) \approx \mathcal{M}$ e $\boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{R}_{\mathcal{T}}(\mathcal{M})) \approx \mathcal{M}$. Essendo $\mathcal{M}$ arbitraria, $\mathcal{H}$ è un quasi-isomorfismo di teorie con quasi-isomorfismo associato l'identità $\mathcal{T}$. Tuttavia $\mathcal{H}$ e $\mathcal{T}$ non sono isomorfismi di teorie uno associato all'altro in quanto $((\neg P_1(x))^{\mathcal{H}})^{\mathcal{T}} \vDash\!\dashv_{\mathcal{T}} P_1(x) \wedge \neg P_2(x)$ e $\neg P_1(x) \not\vDash\!\dashv_{\mathcal{T}} P_1(x) \wedge \neg P_2(x)$.

4 – Rapporti fra i vari concetti di interpretazione

Consideriamo adesso alcune condizioni sulle interpretazioni fra teorie per esaminare i rapporti che valgono fra di esse:

i. $\mathcal{H}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$

ii. $\mathcal{H}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ è conservativa

iii. $\mathcal{H}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ e $\mathcal{K}\colon \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$

iv. $\mathcal{H}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$, $\mathcal{K}\colon \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ e $\vdash_{\mathcal{T}} (A^{\mathcal{H}})^{\mathcal{K}} \leftrightarrow A$, per ogni $A \in \Phi(\mathcal{L})$

v. $\mathcal{H}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$, $\mathcal{K}\colon \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ e vale la (5)

α. $\mathcal{H}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ e $\boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}(\mathcal{M}') \in \mathcal{M}od(\mathcal{T})$ per ogni $\mathcal{M}' \in \mathcal{M}od(\mathcal{T}')$

β. $\mathcal{H}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ e il funtore $\boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}$ è debolmente rappresentativo

γ. $\mathcal{H}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ $\mathcal{K}\colon \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ e $\mathcal{M} \equiv \boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}))$ per ogni $\mathcal{M} \in \mathcal{M}od(\mathcal{T})$

δ. $\mathcal{H}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ $\mathcal{K}\colon \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ sono quasi-isomorfismi di teorie associati

ε. $\mathcal{H}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ $\mathcal{K}\colon \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$, $\mathcal{M} \approx \boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}))$ per ogni $\mathcal{M} \in \mathcal{M}od(\mathcal{T})$ ed $\mathcal{M}' \approx \boldsymbol{R}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{R}_{\mathcal{H}}(\mathcal{M}'))$ per ogni $\mathcal{M}' \in \mathcal{M}od(\mathcal{T}')$.

Ovviamente **ii**$\Rightarrow$**i**; **iii**$\Rightarrow$**i**; $\gamma \Rightarrow \beta$; $\gamma \Rightarrow$**iii**; $\delta \Rightarrow \gamma$; **v**$\Rightarrow$**iv**; $\varepsilon \Rightarrow \delta$. Dai Teoremi 1, 5, 3, 6 e dall'Esempio 2, si hanno rispettivamente **i**$\Rightarrow \alpha$; **v**$\Rightarrow \varepsilon$; **ii**$\not\Rightarrow$**i**; **v**$\Rightarrow \varepsilon$; **iv**$\Rightarrow \gamma$; $\varepsilon \not\Rightarrow$**v**.

Lemma 2. *Valgono le seguenti relazioni:*

a. $\alpha \Rightarrow$**i** e $\beta \Rightarrow$**ii**;

b. *le condizioni* **iii** *e* **ii** *sono indipendenti; inoltre* **iii**$\not\Rightarrow \beta$, **i**$\not\Rightarrow$**iii** *e* **iii**$\not\Rightarrow \gamma$;

c. $\gamma \not\Rightarrow$**iv** e $\beta \not\Rightarrow \gamma$;

d. **iv**$\not\Rightarrow$**v**; *inoltre* $\delta \not\Rightarrow$**iv** e **iv**$\not\Rightarrow \varepsilon$.

Dimostrazione.

a. Si procede in modo standard, sfruttando in entrambi i casi la (1).

b. Se vale **i**, allora $\mathcal{T}$ è coerente relativamente a $\mathcal{T}'$. Dunque, se vale la condizione **iii**, le due teorie sono equicoerenti. Anche la condizione **ii** assicura, ovviamente, l'equicoerenza: ha quindi senso chiedersi quali siano i rapporti fra le condizioni **ii** e **iii**.

iii $\not\Rightarrow$ **ii**. Siano $\mathcal{L}$ il linguaggio con $\mathcal{P}(\mathcal{L}) = \mathcal{P}_1(\mathcal{L}) = \{P, Q\}$ e $\mathcal{F}(\mathcal{L}) = \emptyset$, $\mathcal{T}$ la teoria in $\mathcal{L}$ con l'assioma $(\exists x)\, Q(x)$, $\mathcal{L}'$ il linguaggio con $\mathcal{P}(\mathcal{L}') = \mathcal{P}_1(\mathcal{L}') = \{Q\}$ e $\mathcal{F}(\mathcal{L}') = \emptyset$ e $\mathcal{T}'$ la teoria in $\mathcal{L}'$ con l'assioma $(\exists x)\, Q(x)$. Prendendo $H = Q(x_1)$ e $F(Q) = F(P) = Q(x_1)$, si ha che $\mathcal{H} = (H, F)$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$. Prendendo $K = Q(x_1)$ e $G(Q) = Q(x_1)$, si ha che $\mathcal{K} = (K, G)$: $\mathcal{T}' \to \mathcal{T}$. Si ha che

$$\vdash_{\mathcal{T}'} (\exists x_1)\,(Q(x_1)) \mathrel{\vDash\!\!\dashv} ((\exists x_1)\, P(x_1))^{\mathcal{H}}; \qquad \text{tuttavia} \qquad \nvdash_{\mathcal{T}} (\exists x_1)\, P(x_1).$$

ii $\not\Rightarrow$ **iii**. Siano $\mathcal{L}$ il linguaggio con $\mathcal{P}(\mathcal{L}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{L}) = \emptyset$, $\mathcal{T}$ la teoria in $\mathcal{L}$ senza assiomi specifici, $\mathcal{L}'$ il linguaggio con $\mathcal{P}(\mathcal{L}') = \emptyset$ e $\mathcal{F}(\mathcal{L}') = \mathcal{F}_0(\mathcal{L}') = \{f\}$ e $\mathcal{T}'$ la teoria in $\mathcal{L}'$ senza assiomi specifici. Essendo $\mathcal{T}'$ un'estensione linguistica, e quindi conservativa, di $\mathcal{T}$, sia $\mathfrak{I}$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ secondo il Teorema 3; $\mathfrak{I}$ è conservativa. Tuttavia non può esistere $\mathcal{H}$: $\mathcal{T}' \to \mathcal{T}$, in quanto $\mathcal{F}_0(\mathcal{L}) = \emptyset$.

Il resto del punto **b** si ottiene con semplici calcoli.

c. Se $\gamma \Rightarrow$ **iv**, allora $\delta \Rightarrow$ **v** e questo è contraddetto dall'Esempio 2. Quindi $\gamma \not\Rightarrow$ **iv**. Vediamo ora che $\beta \not\Rightarrow \gamma$. Giacchè $\gamma \Rightarrow$ **iii** è sufficiente provare che $\beta \not\Rightarrow$ **iii**; e questo segue dal punto **b**, in quanto l'interpretazione $\mathfrak{I}$ ivi considerata è tale che il funtore $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{I}}$ è rappresentativo (si verifica che questo succede per ogni estensione linguistica); ma non esiste alcuna $\mathcal{K}$: $\mathcal{T}' \to \mathcal{T}$.

d. Siano $\mathcal{L}$ il linguaggio con $\mathcal{P}(\mathcal{L}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{L}) = \emptyset$, $\mathcal{T}$ la teoria in $\mathcal{L}$ senza assiomi specifici, $\mathcal{L}'$ il linguaggio con $\mathcal{P}(\mathcal{L}') = \mathcal{P}_1(\mathcal{L}') = \{P\}$ e $\mathcal{F}(\mathcal{L}') = \emptyset$ e $\mathcal{T}'$ la teoria in $\mathcal{L}'$ senza assiomi specifici. Essendo $\mathcal{T}'$ un'estensione di $\mathcal{T}$, sia $\mathfrak{I}$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ secondo il Teorema 3. Poniamo $K = (x_1 \doteq x_1)$ e $G(P) = \neg(x_1 \doteq x_1)$. Si verifica facilmente che $\mathcal{K} = (K, G)$: $\mathcal{T}' \to \mathcal{T}$. Sfruttando la (4) ed il fatto che $\vdash_{\mathcal{T}} B^{\mathcal{K}} \leftrightarrow B$, per ogni $B \in \Phi(\mathcal{L})$, si dimostra che vale **iv** e quindi γ. Tuttavia si ha che

$$(((\exists x)\, P(x))^{\mathcal{K}})^{\mathfrak{I}} \mathrel{\vDash\!\!\dashv}_{\mathcal{T}'} (\exists x)\, \neg(x \doteq x) \qquad \text{e} \qquad \nvdash_{\mathcal{T}'} (\exists x)\, \neg(x \doteq x) \leftrightarrow (\exists x)\, P(x);$$

quindi non valgono né δ, né **v**; da ciò segue che $\gamma \not\Rightarrow \delta$ e **iv** $\not\Rightarrow$ **v**; inoltre **iv** $\not\Rightarrow \delta$. Infine, dall'Esempio 2 si ha che $\varepsilon \not\Rightarrow$ **iv** e quindi $\delta \not\Rightarrow$ **iv** e **iv** $\not\Rightarrow \varepsilon$.

References

[1] F. DOTTI, *La 2-categoria delle teorie e il 2-funtore $\mathcal{M}od$*, Tesi di laurea, Dip. di Matem., Univ. Parma 1993-94.

[2] F. DOTTI, *Quasi-isomorfismi fra teorie nei linguaggi con simboli funzionali*, Quad. Dip. Mat. **116**, Univ. Parma 1995.

[3] F. DOTTI, *La categoria delle teorie e delle interpretazioni*, Riv. Mat. Univ. Parma, 5 (1996), 91-102.

[4] H. ENDERTON, *A mathematical introduction to logic*, Academic Press, New York 1972.

[5] G. GRÄTZER, *Universal algebra*, Van Nostrand, New York 1968.

[6] S. MAC LINE, *Categorie nella pratica matematica*, Boringhieri, Torino 1977.

[7] E. MENDELSON, *Introduzione alla logica matematica*, Boringhieri, Torino 1972.

[8] J. R. SHOENFIELD, *Mathematical logic*, Addison-Wesley, Reading, Mass., USA 1967.

Summary

We give a weaker concept of «isomorphism between theories», since the latter is too strong for applications; the resulting concept is that of quasi-isomorphism, which differs from the former in that the defining conditions are requested only for sentences and not for arbitrary formulae.

* * *