Riv. Mat. Univ. Parma (5) 4 (1995), 205-218

G. AMENDOLA e A. MANES (*)

Deformazioni finite in solidi elastici omogenei e isotropi (**)

1 - Introduzione

Lo studio delle deformazioni controllabili o universali è stato affrontato originariamente per solidi incomprimibili da Rivlin [9]-[12] ed è stato esaminato successivamente da vari autori, tra i quali Ericksen [5] che iniziò a studiare i materiali comprimibili, omogenei ed isotropi dimostrando che le deformazioni finite controllabili devono essere omogenee [13].

In recenti lavori Carroll [3], [4] ha esaminato tre particolari classi di materiali nell'intento di studiare la possibilità di avere deformazioni controllabili in essi. I materiali sono caratterizzati da un potenziale elastico W espresso dalla somma di tre funzioni, una delle quali è arbitraria mentre le altre due lineari, ciascuna dipendente ciclicamente da uno degli invarianti principali del tensore sinistro $\boldsymbol{V}$. I materiali armonici introdotti da John [6] sono una delle tre classi studiate da Carroll.

In [3] Carroll, dopo aver esaminato la dipendenza del potenziale W dal gradiente di deformazione $\boldsymbol{F}$ o, per l'invarianza alla rotazione, dal tensore destro di Cauchy-Green $\boldsymbol{C}$, considera nel caso di materiali isotropi la dipendenza di W dagli invarianti di $\boldsymbol{V}$. In particolare, sono ricavate tre soluzioni per deformazioni cilindriche, una per ogni classe dei materiali esaminati.

Lo stesso autore in [4], analizzando le deformazioni cilindriche e sferiche determinate in [3], studia le condizioni che devono essere verificate perché assegnate deformazioni siano controllabili per ogni classe di materiali. Dimostra così

(*) Ist. di Matem. Appl. U. Dini, Fac. di Ing., via Diotisalvi 2, 56126 Pisa; Dip. di Matem., Univ. Pisa, via Buonarroti 2, 56127 Pisa.

(**) Recevuto il 18.7.1995. Classificazione ASM 73 G 05. Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del CNR con finanziamenti del MURST.

che le tre classi di materiali da lui considerate sono le più larghe classi di materiali che ammettono le deformazioni controllabili di [3].

In [1] gli autori studiano una particolare classe di materiali assumendo il potenziale proposto da Tolotti in [14] (ved. [2], [7] e [8]), lasciando un grado di arbitrarietà nella funzione di $J = \det \boldsymbol{F}$ presente in esso, arrivando a dare come soluzioni controllabili, sia in coordinate cilindriche che sferiche, quelle espresse da una proporzionalità tra le coordinate radiali della configurazione attuale e della configurazione di riferimento, sovrapposta ad un allungamento assiale nel caso di deformazioni cilindriche.

In questa nota si considerano le tre classi di materiali di Carroll ma si ammette che W dipenda dagli invarianti principali di $\boldsymbol{C}$, come imposto dai principi fondamentali per materiali elastici isotropi. Tale scelta è giustificata in modo naturale dal fatto che per i continui solidi, contrariamente a quanto accade per i fluidi, è essenziale considerare la deformazione nella configurazione attuale in relazione ad una configurazione di riferimento, alla quale è associato il tensore lagrangiano $\boldsymbol{C}$. In tutti e tre i casi, contrariamente ai risultati ottenuti da Carroll, si trova in coordinate cilindriche la stessa soluzione di [1] e si verifica che le soluzioni di [3], perché possano essere deformazioni controllabili, devono ridursi alle relazioni di proporzionalità qui ottenute.

Si ricava infine l'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine che caratterizza la forma di W compatibile con una deformazione del tipo di quella ammessa. Se questa è la deformazione determinata precedentemente, si trova che essa è compatibile con qualunque forma di W, quindi anche per le tre classi di materiali studiate, in armonia con quanto dimostrato in [5] e [13].

2 - Premesse

Sia S un solido elastico, che occupa la configurazione C, i cui punti sono individuati, rispetto ad un prefissato sistema di coordinate cartesiane ortogonali, dal vettore $\boldsymbol{x}$. Fissata una configurazione di riferimento C_0, che assumiamo naturale, omogenea e a temperatura uniforme, e indicando con $\boldsymbol{X}$ il vettore che individua la stessa particella di S individuata con $\boldsymbol{x}$ in C, il *gradiente di deformazione* è definito da

$$\boldsymbol{F} = \mathrm{grad}_X \boldsymbol{x} \qquad J = \det \boldsymbol{F} > 0 . \tag{2.1}$$

Tenendo presente il teorema di decomposizione polare, si ha

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R} \tag{2.2}$$

dove $\boldsymbol{R}$ è un tensore ortogonale proprio, $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$ sono due tensori simmetrici e definiti positivi, con i quali è possibile introdurre i *tensori destro* $\boldsymbol{C}$ *e sinistro* $\boldsymbol{B}$ *di Cauchy-Green ed il tensore di deformazione* $\boldsymbol{E}$ mediante le relazioni:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \boldsymbol{1} + 2\boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T . \tag{2.3}$$

Rivolgendo l'attenzione a trasformazioni $C_0 \rightarrow C$ isoterme, è possibile considerare il *potenziale isotermo* $W = W(\boldsymbol{F})$. Tenendo conto dell'invarianza della forma di W alle rotazioni [15], si dimostra che la dipendenza di W dalla deformazione è possibile tramite $\boldsymbol{C}$ o $\boldsymbol{E}$.

Assumiamo pertanto

$$W = \hat{W}(\boldsymbol{C}) \tag{2.4}$$

con la quale il *tensore degli sforzi di Cauchy* $\boldsymbol{T}$ *e i tensori di Piola-Kirchhoff* $\boldsymbol{T}_k$ *e* $\boldsymbol{T}_0$, legati dalle relazioni:

$$J\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_k\boldsymbol{F}^T \qquad \boldsymbol{T}_k = \boldsymbol{F}\boldsymbol{T}_0 \tag{2.5}$$

sono espressi da:

$$\boldsymbol{T}_0 = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}} \qquad \boldsymbol{T}_k = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}} = 2\boldsymbol{F}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{C}} \qquad \boldsymbol{T} = 2J^{-1}\boldsymbol{F}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{C}}\boldsymbol{F}^T . \tag{2.6}$$

La (2.4), supponendo che il materiale sia *isotropo*, per i teoremi di rappresentazione [15], si può scrivere

$$W = \tilde{W}(I_C, II_C, III_C) \tag{2.7}$$

cioè W viene a dipendere dagli invarianti principali di $\boldsymbol{C}$.

Nelle (2.6) è

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{C}} &= \frac{\partial W}{\partial I_C}\frac{\partial I_C}{\partial \boldsymbol{C}} + \frac{\partial W}{\partial II_C}\frac{\partial II_C}{\partial \boldsymbol{C}} + \frac{\partial W}{\partial III_C}\frac{\partial III_C}{\partial \boldsymbol{C}} \\ &= \left(\frac{\partial W}{\partial I_C} + I_C\frac{\partial W}{\partial II_C}\right)\boldsymbol{1} - \frac{\partial II_C}{\partial \boldsymbol{C}}\boldsymbol{C} + III_C\frac{\partial W}{\partial III_C}\boldsymbol{C}^{-1} \end{aligned} \tag{2.8}$$

e di conseguenza si ha, in particolare (ved. $(2.6)_3$), l'espressione del *tensore degli sforzi* di Cauchy

$$\boldsymbol{T} = 2J\frac{\partial W}{\partial III_C}\boldsymbol{1} + \frac{2}{J}\left(\frac{\partial W}{\partial I_C} + I_C\frac{\partial W}{\partial II_C}\right)\boldsymbol{B} - \frac{2}{J}\frac{\partial W}{\partial II_C}\boldsymbol{B}^2 \tag{2.9}$$

che, in condizioni statiche ed in assenza di forze di massa, deve verificare *l'equazione di equilibrio* in C

$$\text{div}\, \boldsymbol{T} = \boldsymbol{0} \,. \tag{2.10}$$

Osserviamo che il potenziale (2.7) e lo sforzo (2.9) si annullano in C_0 se

$$\tilde{W}(3,3,1) = 0 \qquad \left[\frac{\partial W}{\partial I_C} + 2\frac{\partial W}{\partial II_C} + \frac{\partial W}{\partial III_C}\right]_{I_C = II_C = 3,\, III_C = 1} = 0 \,. \tag{2.11}$$

3 - Deformazione cilindrica

Con riferimento ad un sistema di coordinate cilindriche $T' \equiv O,\ \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\vartheta, \boldsymbol{e}_z$ con $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{k}$, terzo versore del riferimento cartesiano precedentemente fissato $T \equiv O,\ \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, consideriamo la *deformazione* espressa da

$$r = r(R) \qquad \theta = \Theta \qquad z = \lambda Z \tag{3.1}$$

in base alla quale la particella, che in C_0 occupa la posizione espressa da (X, Y, Z) o (R, Θ, Z), in C si trova nel punto di coordinate (x, y, z) o (r, θ, z).

Tale deformazione descrive un'espansione radiale dei cilindri cavi $R = c$ costante, accompagnata da un allungamento lungo il loro asse z. Si ammette per essa:

$$r' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}R} > 0 \qquad \lambda > 0 \tag{3.2}$$

per cui potremo considerare anche la funzione inversa $R = R(r)$.

Il calcolo del tensore di deformazione (2.1) in coordinate cilindriche porta ai seguenti risultati

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} r' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}, \boldsymbol{R} = \boldsymbol{1} \tag{3.3}$$

per cui (ved. (2.3)) si ha

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} \qquad \mu_1 = (r')^2, \mu_2 = \frac{r^2}{R^2}, \mu_3 = \lambda^2 \,. \tag{3.4}$$

Quindi

$$I_C = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \qquad II_C = \mu_1\mu_2 + \mu_3(\mu_1 + \mu_2) \qquad III_C \equiv J^2 = \mu_1\mu_2\mu_3 \,. \tag{3.5}$$

Dalla (2.9), tenendo conto dei risultati ottenuti, con qualche calcolo, si trova che le componenti principali del tensore degli sforzi sono espresse da

$$\begin{aligned} T_{rr} &= 2\{J \frac{\partial W}{\partial III_C} + \frac{\mu_1}{J}[\frac{\partial W}{\partial I_C} + (\mu_2 + \mu_3)\frac{\partial W}{\partial II_C}]\} \\ T_{\theta\theta} &= 2\{J \frac{\partial W}{\partial III_C} + \frac{\mu_2}{J}[\frac{\partial W}{\partial I_C} + (\mu_3 + \mu_1)\frac{\partial W}{\partial II_C}]\} \\ T_{zz} &= 2\{J \frac{\partial W}{\partial III_C} + \frac{\mu_3}{J}[\frac{\partial W}{\partial I_C} + (\mu_1 + \mu_2)\frac{\partial W}{\partial II_C}]\} \,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Queste devono verificare la (2.10), che nel nuovo sistema di coordinate si riduce alla equazione radiale

$$\frac{\mathrm{d}T_{rr}}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) = 0 \tag{3.7}$$

che diventa

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\{J \frac{\partial W}{\partial III_C} + \frac{\mu_1}{J}[\frac{\partial W}{\partial I_C} + (\mu_2 + \mu_3)\frac{\partial W}{\partial II_C}]\} \\ &+ \frac{1}{r}\frac{\mu_1 - \mu_2}{J}(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \mu_3 \frac{\partial W}{\partial II_C}) = 0 \,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

4 - Forme particolari del potenziale W

Consideriamo ora la classe di materiali per i quali l'espressione (2.7) del potenziale assume la forma

$$W = f_1(I_C) + f_2(II_C) + f_3(III_C) \,. \tag{4.1}$$

Di conseguenza il tensore degli sforzi (2.9) diventa

$$\boldsymbol{T} = 2Jf_3'(III_C)\mathbf{1} + \frac{2}{J}[f_1'(I_C) + I_C f_2'(II_C)]\boldsymbol{B} - \frac{2}{J}f_2'(II_C)\boldsymbol{B}^2 \tag{4.2}$$

e le condizioni (2.11) si riducono a:

$$f_1(3) + f_2(3) + f_3(1) = 0 \qquad f_1'(3) + 2f_2'(3) + f_3'(1) = 0 \,. \tag{4.3}$$

L'equazione di equilibrio (3.8), calcolando le derivate rispetto ad r tenendo conto delle posizioni $(3.4)_{2,3,4}$ e della (4.1), si scrive

$$
\begin{aligned}
&f_1'(I_C)\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\frac{(r')^2}{J}]+\frac{1}{rJ}[(r')^2-\frac{r^2}{R^2}]\}\\
&+f_2'(II_C)\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\frac{(r')^2}{J}(\frac{r^2}{R^2}+\lambda^2)]+\frac{\lambda^2}{rJ}[(r')^2-\frac{r^2}{R^2}]\}\\
&+f_3'(III_C)\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}r}+f_1''(I_C)\frac{(r')^2}{J}\frac{\mathrm{d}I_C}{\mathrm{d}r}\\
&+f_2''(II_C)[\frac{(r')^2}{J}(\frac{r^2}{R^2}+\lambda^2)\frac{\mathrm{d}II_C}{\mathrm{d}r}]+f_3''(III_C)2J^2\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}r}=0\,.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Esaminiamo ora separatamente tre casi caratterizzati dall'ipotesi che nella (4.1) solo una delle tre funzioni f_i $(i=1,2,3)$ sia arbitraria mentre le altre due siano lineari, ciclicamente.

4a - Materiali di classe I

Questi solidi sono caratterizzati dal potenziale (4.1) con $f_1(I_C)$ funzione arbitraria mentre le altre due funzioni sono lineari, cioè

$$
W=f_1(I_C)+b(II_C-3)+c(III_C-1)
\tag{4.5}
$$

con (ved. (4.3))

$$
f_1(3)=0 \qquad f_1'(3)=-(2b+c)\,.
\tag{4.6}
$$

La (4.4) si riduce all'equazione

$$
\begin{aligned}
&f_1'(I_C)\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\frac{(r')^2}{J}]+\frac{1}{rJ}[(r')^2-\frac{r^2}{R^2}]\}+f_1''(I_C)\frac{(r')^2}{J}\frac{\mathrm{d}I_C}{\mathrm{d}r}\\
&+b\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\frac{(r')^2}{J}(\frac{r^2}{R^2}+\lambda^2)]+\frac{\lambda^2}{rJ}[(r')^2-\frac{r^2}{R^2}]\}+c\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}r}=0
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

che è verificata qualunque sia la funzione $f_1(I_C)$ e per ogni valore di b e c, con le limitazioni (4.6), se e solo se risulta (ved. (3.2))

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}r}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\frac{(r')^2}{J}(\frac{r^2}{R^2}+\lambda^2)]=\frac{\lambda^2}{rJ}[\frac{r^2}{R^2}-(r')^2]\\
&f_1'(I_C)\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\frac{(r')^2}{J}]+\frac{1}{rJ}[(r')^2-\frac{r^2}{R^2}]\}+f_1''(I_C)\frac{(r')^2}{J}\frac{\mathrm{d}I_C}{\mathrm{d}r}=0\,.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Dalla prima segue

$$J = c_1 \tag{4.9}$$

con c_1 costante ($c_1 > 0$), per cui, in base alle $(3.5)_3$ e $(3.4)_{2,3,4}$, si ottiene

$$r' = \frac{c_1}{\lambda} \frac{R}{r} \tag{4.10}$$

la cui integrazione dà

$$r^2 = \frac{c_1}{\lambda} R^2 + c^* \tag{4.11}$$

con c^* costante ($c^* \geqslant 0$).

La $(4.8)_2$, tenendo presente che $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \dfrac{1}{r'} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}$ e sostituendo in essa l'espressione di J, r' e $r^2 R^{-2}$ date dalle (4.9), (4.10) e (4.11), si riduce a $(c^*)^2 R^{-4} = 0$, per cui si ha

$$c^* = 0\,. \tag{4.12}$$

La soluzione (4.11) assume pertanto la forma

$$r = \xi R \qquad \xi = \left(\frac{c_1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.13}$$

indipendentemente dalla particolare epressione di $f_1(I_C)$ e quindi di $f_1'(I_C)$, che compare, con $f_1''(I_C)$, nella $(4.8)_3$, in quanto, procedendo in modo analogo a come si è ricavata la (4.12), si può controllare che la $(4.8)_3$ è automaticamente verificata essendo nulli i coefficienti di $f_1'(I_C)$ e di $f_1''(I_C)$, avendosi in particolare

$$I_C = 2\,\frac{c_1}{\lambda} + \lambda^2 = \text{costante}\,. \tag{4.14}$$

4b - Materiali di classe *II*

Il potenziale (4.1) assume per questi materiali la forma

$$W = a(I_C - 3) + f_2(II_C) + c(III_C - 1) \tag{4.15}$$

con (ved. (4.3))

$$f_2(3) = 0 \quad \text{e} \quad 2f_2'(3) = -(a + c) \tag{4.16}$$

dove $f_2(II_C)$ è una funzione arbitraria del secondo invariante principale di $\boldsymbol{C}$.

L'equazione di equilibrio (4.4), che ora diventa

$$
\begin{aligned}
& a\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{(r')^2}{J}\right]+\frac{1}{rJ}\left[(r')^2-\frac{r^2}{R^2}\right]\right\}+c\,\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}r}\\
& +f_2'(II_C)\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{(r')^2}{J}\left(\frac{r^2}{R^2}+\lambda^2\right)\right]+\frac{\lambda^2}{rJ}\left[(r')^2-\frac{r^2}{R^2}\right]\right\}\\
& +f_2''(II_C)\,\frac{(r')^2}{J}\left(\frac{r^2}{R^2}+\lambda^2\right)\frac{\mathrm{d}II_C}{\mathrm{d}r}=0
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

deve essere verificata per ogni valore di a e c e qualunque sia la funzione $f_2(II_C)$. Ciò accade se e solo se:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}r}=0 \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{(r')^2}{J}\right]=\frac{1}{rJ}\left[\frac{r^2}{R^2}-(r')^2\right]\\
& f_2'(II_C)\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{(r')^2}{J}\left(\frac{r^2}{R^2}+\lambda^2\right)\right]+\frac{\lambda^2}{rJ}\left[(r')^2-\frac{r^2}{R^2}\right]\right\}\\
& +f_2''(II_C)\,\frac{(r')^2}{J}\left(\frac{r^2}{R^2}+\lambda^2\right)\frac{\mathrm{d}II_C}{\mathrm{d}r}=0\,.
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Dalla $(4.18)_1$ segue $J=e_1$ con e_1 costante ($e_1>0$). Si ha quindi (ved. $(3.5)_3$, $(3.4)_{2,3,4}$ come nel caso precedente)

$$
r'=\frac{e_1}{\lambda}\,\frac{R}{r} \qquad \text{cioè} \qquad r^2=\frac{e_1}{\lambda}R^2+e^* \tag{4.19}
$$

con e^* costante d'integrazione ($e^*\geqslant 0$).

Operando ancora come si è fatto per ricavare la (4.12), la $(4.18)_2$ si riduce a $(e^*)^2R^{-4}=0$, per cui è $e^*=0$ nella $(4.19)_2$ e questa si può porre nella forma seguente

$$
r=\xi R \qquad\qquad \xi=\left(\frac{e_1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.20}
$$

La soluzione trovata verifica la $(4.18)_3$, in quanto è nulla l'espressione a fattore di $f_2'(II_C)$ e nel termine con $f_2''(II_C)$ è $II_C=e_1^2\lambda^{-2}+2e_1\lambda=$ costante.

4c - Materiali di classe *III*

Supponiamo ora che il potenziale (4.1) sia del tipo

$$
W=a(I_C-3)+b(II_C-3)+f_3(III_C)\,. \tag{4.21}
$$

con (ved. (4.3))

$$f_3(1) = 0 \qquad f_3'(1) = -(a+2b). \tag{4.22}$$

L'equazione (4.4), che ora si modifica come segue

$$\begin{aligned} &a\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\frac{(r')^2}{J}] + \frac{1}{rJ}[(r')^2 - \frac{r^2}{R^2}]\} \\ &+b\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\frac{(r')^2}{J}(\frac{r^2}{R^2}+\lambda^2)] + \frac{\lambda^2}{rJ}[(r')^2 - \frac{r^2}{R^2}]\} \\ &+[f_3'(III_C) + 2J^2 f_3''(III_C)]\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}r} = 0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

deve essere soddisfatta per ogni valore di a e b e qualunque sia la funzione $f_3(III_C)$, per cui deve essere

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\frac{(r')^2}{J}] = \frac{1}{rJ}[\frac{r^2}{R^2} - (r')^2] \\ &\frac{1}{\lambda^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\frac{(r')^2}{J}(\frac{r^2}{R^2}+\lambda^2)] = \frac{1}{rJ}[\frac{r^2}{R^2} - (r')^2] \\ &[f_3'(III_C) + 2J^2 f_3''(III_C)]\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}r} = 0\,. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Nelle $(4.24)_{1,2}$ i secondi membri coincidono per cui devono essere uguali anche i primi membri. Questa condizione, tenendo presente l'espressione $(3.5)_3$ di J con le $(3.4)_{2,3,4}$, si riduce a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r'\frac{r}{R}) = 0 \tag{4.25}$$

e da questa si ha $r'\dfrac{r}{R} = d_1$, che integrata dà

$$r^2 = d_1 R^2 + d^* \tag{4.26}$$

con $d_1 > 0$ e $d^* \geqslant 0$.

Sostituendo tale relazione in una delle $(4.24)_{1,2}$ si ricava in entrambi i casi $(d^*)^2 R^{-2} = 0$, onde $d^* = 0$, per cui la soluzione (4.26) assume la forma

$$r = \xi R \qquad \text{con} \qquad \xi = (d_1)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.27}$$

L'ultima delle (4.24) è automaticamente verificata da tale soluzione essendo $J = \lambda d_1 =$ costante, conseguenza questa già presente nella (4.25) dove compare la derivata di $J\lambda^{-1}$.

5 - Esame delle soluzioni di [3]

In [3] sono state trovate le *deformazioni*:

$$(5.1)\quad r=\frac{1}{2}(\alpha-\lambda)R+\frac{\beta}{R}\qquad r=[(\alpha+\lambda^2)R^2+\beta]^{\frac{1}{2}}-\lambda R\qquad r^2=\frac{\alpha}{\lambda}R^2+\beta$$

rispettivamente per le classi I, II, III dei materiali ivi esaminati, supponendo cioè una delle f_i $(i=1, 2, 3)$ funzione arbitraria, mentre le altre sono lineari negli invarianti di V, ciclicamente.

Con noiosi calcoli, sostituendo la $(5.1)_1$ nella (4.7), si ricava una equazione che è verificata per ogni valore di b, c e qualunque sia $f_1(I_C)$ se e solo se nella $(5.1)_1$ è

$$(5.2)\qquad \beta=0\,.$$

In modo analogo, con la soluzione $(5.1)_3$ sostituita nella (4.23) si ottiene ancora $\beta=0$. Risulta invece molto più complessa la verifica della $(5.1)_2$ con la (4.17), per cui faremo altre considerazioni e precisamente sulla condizione $(2.1)_2$ verificata certamente per le assunzioni espresse dalle (3.2), cioè (ved. $(3.5)_3$)

$$(5.3)\qquad J=r'\,\frac{r}{R}\,\lambda>0\qquad \forall R>0\,.$$

Con la prima soluzione $(5.1)_1$ si ha

$$(5.4)\qquad J=\lambda\Big[\frac{1}{4}(\alpha-\lambda)^2-\frac{\beta^2}{R^4}\Big]>0\qquad \forall R>0$$

e ciò equivale a $\beta=0$.

Per la seconda classe di materiali la $(5.1)_2$, dovendo essere nel radicando $\beta\geqslant 0$, dà

$$(5.5)\qquad J=\lambda(\alpha+2\lambda^2)-\frac{\lambda^2}{R}\,\frac{2(\alpha+\lambda^2)R^2+\beta}{[(\alpha+\lambda^2)R^2+\beta]^{\frac{1}{2}}}\quad \text{con}\ \lim_{R\to 0}J=-\infty$$

cioè J cambierebbe il segno positivo ammesso, mentre invece $\beta=0$ implica $J=\lambda[\alpha+2\lambda^2-2\lambda(\alpha+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}]>0$.

Per la terza soluzione vale il discorso fatto per ricavare la (5.2), in quanto tale soluzione non contrasta con la condizione $(2.1)_2$.

In definitiva le soluzioni (5.1) devono assumere la forma da noi ricavata

$$\begin{aligned} & & &= \frac{1}{2}(\alpha - \lambda) \\ r &= \xi R & 0 < \xi &= (\alpha + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} - \lambda \\ & & &= (\alpha\lambda^{-1})^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{5.6}$$

con la notazione di [3].

6 - Un'osservazione sulla forma di W compatibile con la soluzione trovata

L'equazione di equilibrio (2.10) in coordinate cilindriche e nell'ipotesi di deformazioni espresse dalle (3.1) si riduce alla sola equazione radiale (3.7). Come si è visto precedentemente, tale equazione nel caso di materiali isotropi, per i quali W è data dalla (2.7), assume la forma (3.8).

La variabile r, che compare nella (3.8), può essere eliminata con la rela zione

$$r \frac{\mathrm{d}\mu_2}{\mathrm{d}r} = 2 \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_1}} (\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}) \tag{6.1}$$

ottenuta in base alle (3.1) e (3.4). Ma con tale sostituzione è possibile eliminare anche la $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$, per cui la (3.8) assume la forma

$$\begin{aligned} & J \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu_2} \{ J \frac{\partial W}{\partial III_C} + \frac{\mu_1}{J} [\frac{\partial W}{\partial I_C} + (\mu_2 + \mu_3) \frac{\partial W}{\partial II_C}] \} \\ & \quad + \frac{1}{2} (\frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}})(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \mu_3 \frac{\partial W}{\partial II_C}) = 0 . \end{aligned} \tag{6.2}$$

Effettuate le derivate e tenuto conto delle relazioni (3.5), nelle quali λ è costante (ved. $(3.2)_2$), con qualche calcolo, si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{d\mu_1}{d\mu_2}+\frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}}\right)\frac{\partial W}{\partial I_C}+\frac{1}{2}\left[\mu_1+\mu_2\frac{d\mu_1}{d\mu_2}+\mu_3\left(\frac{d\mu_1}{d\mu_2}+\frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}}\right)\right]\frac{\partial W}{\partial II_C}\\
&+\frac{1}{2}\mu_3\left(\mu_1+\mu_2\frac{d\mu_1}{d\mu_2}\right)\frac{\partial W}{\partial III_C}+\mu_1\left(1+\frac{d\mu_1}{d\mu_2}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial I_C^2}\\
&+\mu_1(\mu_2+\mu_3)\left[\mu_1+\mu_2\frac{d\mu_1}{d\mu_2}+\mu_3\left(1+\frac{d\mu_1}{d\mu_2}\right)\right]\frac{\partial^2 W}{\partial II_C^2}\\
&+\mu_1\mu_2\mu_3^2\left(\mu_1+\mu_2\frac{d\mu_1}{d\mu_2}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial III_C^2}\\
&+\mu_1\left[\mu_1+\mu_2\frac{d\mu_1}{d\mu_2}+(\mu_2+2\mu_3)\left(1+\frac{d\mu_1}{d\mu_2}\right)\right]\frac{\partial^2 W}{\partial I_C II_C}\\
&+\mu_1\mu_3\left[\mu_1+\mu_2\frac{d\mu_1}{d\mu_2}+\mu_2\left(1+\frac{d\mu_1}{d\mu_2}\right)\right]\frac{\partial^2 W}{\partial I_C III_C}\\
&+\mu_1\mu_3\left[(2\mu_1+\mu_3)\left(\mu_1+\mu_2\frac{d\mu_1}{d\mu_2}\right)+\mu_2\mu_3\left(1+\frac{d\mu_1}{d\mu_2}\right)\right]\frac{\partial^2 W}{\partial II_C III_C}=0\,.
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Osserviamo che la (6.3) può essere ricavata anche dalla (3.11) di [3] calcolando le derivate in base alla (2.7) ed esprimendo le λ_i $(i = 1, 2, 3)$ in funzione delle μ_i. Si ha cioè $\lambda_i = \sqrt{\mu_i}$ ed in particolare $\frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} = \frac{\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1}}\frac{d\mu_1}{d\mu_2}$.

Questa equazione può essere usata nella ricerca delle deformazioni cilindriche del tipo descritto dalla (3.1), purché sia assegnata le forma del potenziale W nella (2.7). Essa diventa una equazione differenziale del primo ordine per la funzione $\mu_1 = \mu_1(\mu_2, \mu_3)$, che caratterizza, in base alle (3.4), la deformazione $r = r(R)$. In tale senso l'equazione (3.8), ad essa equivalente, è stata usata per determinare le deformazioni compatibili con le tre forme di W, date dalle (4.5), (4.15) e (4.21).

Supponendo invece nota la deformazione radiale e quindi anche $\frac{d\mu_1}{d\mu_2}$ in funzione di μ_1, μ_2 e μ_3, la (6.3) costituisce una equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine che caratterizza la forma di W compatibile con la deformazione ammessa.

Assumiamo, in particolare, la soluzione

$$r = \xi R \tag{6.4}$$

precedentemente determinata per le tre classi di materiali considerati.

In corrispondenza di tale soluzione si deve calcolare l'espressione della derivata $\frac{d\mu_1}{d\mu_2}$, che compare nella (6.3) nei coefficienti di tutte le derivate di W. Si controlla facilmente che tali coefficienti sono contemporaneamente nulli. Si ha infatti:

$$(6.5) \qquad 1 + \frac{d\mu_1}{d\mu_2} = 0 \qquad \mu_1 + \mu_3 + (\mu_2 + \mu_3)\frac{d\mu_1}{d\mu_2} = 0 \qquad \mu_1 + \mu_2\frac{d\mu_1}{d\mu_2} = 0$$

la seconda delle quali è conseguenza del verificarsi delle altre due, ma che in ogni caso esprimono (ved. (3.5)) l'annullarsi delle derivate di $I_C = \text{cost.}$, $II_C = \text{cost.}$, $III_C = \text{cost.}$

Risulta inoltre: $$\frac{d\mu_1}{d\mu_2} + \frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}} = 0$$

avendosi anche $\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_3} = \text{costante}$.

Segue pertanto che la (6.4) è soluzione della (6.3) qualunque sia la forma di W e quindi, in particolare, anche per le tre classi di materiali studiate precedentemente.

References

[1] G. AMENDOLA and A. MANES, *Controllable deformations for compressible elastic solids*, to appear.

[2] A. BRESSAN, *Sulla propagazione delle onde ordinarie di discontinuità nei sistemi a trasformazioni reversibili*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **33** (1963), 99-139.

[3] M. M. CARROLL, *Finite strain solutions in compressible isotropic elasticity*, J. Elasticity **20** (1988), 65-92.

[4] M. M. CARROLL, *Controllable deformations in compressible finite elasticity*, Stability Appl. Anal. Contin. Media 4 (1991), 373-384.

[5] J. L. ERICKSEN, *Deformations possible in every compressible, isotropic, perfectly elastic materials*, J. Math. Phys. 34 (1955), 126-128.

[6] F. JOHN, *Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 239-296.

[7] T. MANACORDA, *Onde d'urto nei materiali di Hadamard*, Ricerche Mat. **41** Suppl. (1992), 181-187.

[8] T. MANACORDA, *Onde nei solidi di Hadamard-Tolotti,* Quaderni Ist. Mat. Appl. U. Dini, Fac. Ing. Pisa, **6** 1993.

[9] R. S. RIVLIN, *Large elastic deformations of isotropic materials, IV. Further developments of the general theory*, Philos. Trans. Roy. Soc. London **241** (1948), 379-397.

[10] R. S. RIVLIN, *A note on the torsion of an incompressible highly-elastic cylinder*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **45** (1949), 485-587.

[11] R. S. RIVLIN, *Large elastic deformations of isotropic materials, V. The problem of flexure*, Proc. Roy Soc. London **195** (1949), 463-473.

[12] R. S. RIVLIN, *Large elastic deformations of isotropic materials, VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure*, Philos. Trans. Roy Soc. London **242** (1949), 173-195.

[13] R. T. SCHIELD, *Deformations possible in every compressible, isotropic, perfectly elastic material*, J. Elasticity **1** (1971), 91-92.

[14] C. TOLOTTI, *Deformazioni elastiche finite: onde ordinarie di discontinuità e caso tipico di solidi elastici isotropi*, Rend. Mat. Appl. 4 (1943), 34-59.

[15] C. TRUESDELL and W. NOLL, *The non-linear field theories of mechanics*, in Handbuck der Physik, Band III/3, Springer, Berlin 1965.

Sommario

Cylindrical expansions or compactions, with axial stretching, are controllable deformations for three particular classes of homogeneous and isotropic materials, studied by Carroll, when the strain energy function depends on the principal invariants of the right Cauchy-Green tensor **C**, *and not of the stretch tensor* **V** *as Carroll supposes, if they reduce to a simple proportionality between the actual and the reference radial coordinates. We note that, with the new strain energy function, Carroll's solutions must reduce naturally to our solution. At last, if we assigne this deformation, we show that it is compatible with any form of the energy function, whose arguments are the principal invariants of* **C**.

* * *