

MARIA PETTINEO (*)

**Alcuni problemi di probabilità geometriche
nello spazio euclideo E^3 (**)**

1 - Preliminari

Sia E^3 lo spazio euclideo di coordinate cartesiane ortogonali x_1, x_2, x_3 . Si consideri un reticolo \mathcal{R} di piani paralleli equidistanti, di equidistanza a , e sia T un *corpo test* convesso di diametro $d < a$. Si consideri inoltre un reticolo ausiliario $\mathcal{R}^{(3)}$ la cui cellula fondamentale sia un parallelepipedo di lati $a_3 \geq a_2 \geq a_1 = a$ e tale che tra i piani del reticolo $\mathcal{R}^{(3)}$ vi siano i piani di \mathcal{R} . Indicate con $p_T^{(3)}$ e con p_T le *probabilità* affinché il corpo test T intersechi un piano del reticolo $\mathcal{R}^{(3)}$ ed \mathcal{R} rispettivamente, A. Duma e M. Stoka [3] hanno dimostrato preliminarmente la formula

$$(1) \quad p_T = \lim_{a_2, a_3 \rightarrow \infty} p_T^{(3)}.$$

Per determinare la probabilità $p_T^{(3)}$ (cfr. pure [5]) si fissa un *parallelepipedo* \mathcal{P} , cellula del reticolo $\mathcal{R}^{(3)}$ e si ricorre alla formula

$$(2) \quad p_T^{(3)} = 1 - \frac{\mu(\mathcal{X})}{\mu(\mathcal{N})}$$

dove $\mu(\mathcal{N})$ e $\mu(\mathcal{X})$ sono rispettivamente le *misure cinematiche* dell'insieme \mathcal{N} dei corpi T che hanno il baricentro nell'interno di \mathcal{P} e dell'insieme \mathcal{X} dei medesimi corpi interamente contenuti nell'interno di \mathcal{P} .

La misura cinematica nello spazio E^3 è [2] $dK = dP \wedge d\Omega \wedge d\psi$, dove $P(x_1, x_2, x_3)$ è il baricentro del corpo T , sicchè $dP = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$,

(*) Dip. di Matem. e Appl., Univ. Palermo, Via Archirafi 34, 90123 Palermo, Italia.

(**) Ricevuto il 9.1.1995. Classificazione AMS 60 D 05. Lavoro eseguito con parziale contributo del MURST.

$d\Omega = |\sin \vartheta| d\varphi \wedge d\vartheta$ è l'elemento d'area sulla sfera unità S^2 (φ longitudine, ϑ colatitudine) e ψ è un angolo di rotazione.

Risulta

$$(3) \quad \mu(\mathcal{N}) = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta d\vartheta \iiint_{P \in \mathcal{P}} dP = 4\pi^2 a_1 a_2 a_3 .$$

Per calcolare la misura $\mu(\mathcal{N})$ si considerano le *posizioni limite*, quando T è *tangente* alle facce del parallelepipedo \mathcal{P} . Per valori fissi di φ e ϑ , indichiamo con $\mathcal{P}'(\varphi, \vartheta)$ il parallelepipedo con le facce parallele a quelle di \mathcal{P} e con i vertici nei baricentri delle posizioni limite dei corpi T . Allora i lati del parallelepipedo $\mathcal{P}'(\varphi, \vartheta)$ sono

$$a_1 - a_1(\varphi, \vartheta) \quad a_2 - a_2(\varphi, \vartheta) \quad a_3 - a_3(\varphi, \vartheta)$$

dove $a_i(\varphi, \vartheta)$, ($i = 1, 2, 3$) sono funzioni da determinare che dipendono, ovviamente, dalla forma del corpo test T (oltre che dai valori dei parametri φ e ϑ). Ne segue

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{N}) &= \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \left(\iiint_{P \in \mathcal{P}'(\varphi, \vartheta)} dP \right) d\vartheta \right] d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a_1 - a_1(\varphi, \vartheta))(a_2 - a_2(\varphi, \vartheta))(a_3 - a_3(\varphi, \vartheta)) \sin \vartheta d\vartheta \right] d\varphi \end{aligned}$$

e, per ragioni di simmetria, risulta

$$(4) \quad \mu(\mathcal{N}) = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a_1 - a_1(\varphi, \vartheta))(a_2 - a_2(\varphi, \vartheta))(a_3 - a_3(\varphi, \vartheta)) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi .$$

Adesso, in forza delle (2), (3), (4), dalla (1) si trae facilmente

$$(5) \quad p_T = \frac{2}{\pi a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_1(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi .$$

Questa formula, come vedremo tosto, consentirà l'effettiva determinazione della probabilità p_T nei casi in cui il corpo test T sia una *zona sferica* o un *cilindro sormontato da un cono* (matita). Ritroveremo tra l'altro, come casi particolari, talune probabilità ottenute precedentemente da P. Barbe, A. Duma e M. Stoka.

2 - Zona sferica (primo caso)

Nel piano euclideo E^2 sia D il cerchio di centro O' e raggio R . Si consideri in D la zona circolare ZC di raggi r_1 ed r_2 , avente il centro O' di D nel suo interno (Fig. 1). Supporremo $2R < a$. Sia poi ZS la *zona sferica* ottenuta mediante una rotazione di π della zona circolare ZC attorno al suo asse di simmetria (Fig. 2).

Senza ledere la generalità, possiamo supporre $r_2 \leq r_1$ e di conseguenza, per gli angoli α_1, α_2 della Fig. 1, si ha $\alpha_2 \leq \alpha_1$.

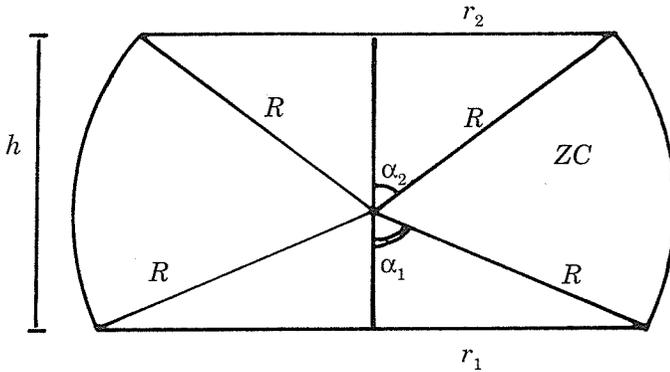


Figura 1.

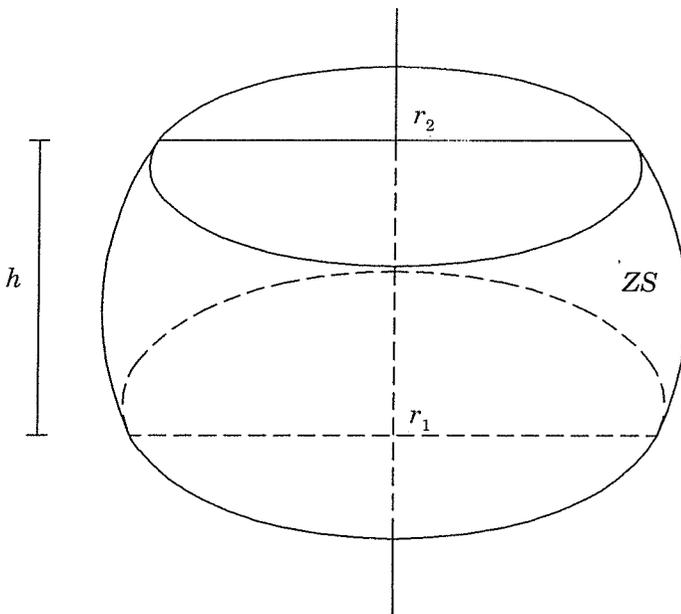


Figura 2.

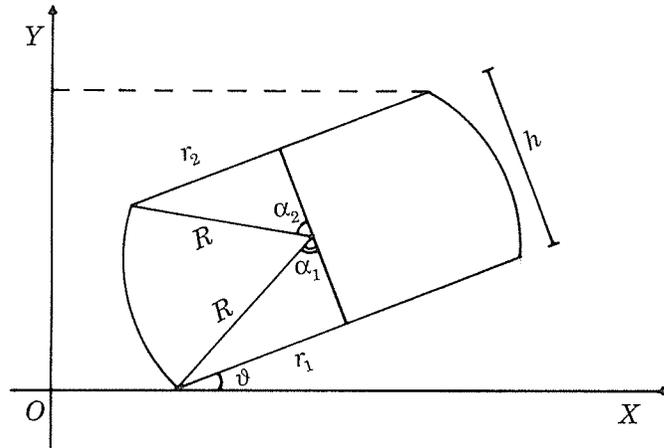


Figura 3.

Per un valore prefissato di $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, che rappresenta l'angolo tra l'asse Ox e la base di lunghezza $2r_1$ della zona circolare considerata nel piano E^2 , indichiamo con $pr(\vartheta)$ la proiezione della zona circolare sull'asse Oy (Fig. 3). Allora

$$(6) \quad a_1(\varphi, \vartheta) = pr(\vartheta) \quad \forall \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Si ha

$$pr(\vartheta) = \begin{cases} R \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \vartheta) + R \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 + \vartheta) & \text{se } 0 \leq \vartheta \leq \alpha_2 \\ R \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \vartheta) + R & \text{se } \alpha_2 \leq \vartheta \leq \alpha_1 \\ 2R & \text{se } \alpha_1 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi, tenuta presente la (6), risulta

$$a_1(\varphi, \vartheta) = \begin{cases} R[\cos(\alpha_1 - \vartheta) + \cos(\alpha_2 - \vartheta)] & \text{se } 0 \leq \vartheta \leq \alpha_2 \\ R[\cos(\alpha_1 - \vartheta) + 1] & \text{se } \alpha_2 \leq \vartheta \leq \alpha_1 \\ 2R & \text{se } \alpha_1 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Dopo di ciò, dalla (5) si trae

$$(7) \quad p_{ZS} = \frac{R}{2a} (\alpha_1 \sin \alpha_1 + \alpha_2 \sin \alpha_2) + \frac{R}{a} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2).$$

Possiamo quindi enunciare il

Teorema 1. *Siano dati, nello spazio euclideo E^3 , la sfera di centro O' e raggio R , un reticolo \mathcal{R} di piani paralleli equidistanti, di equidistanza a , e, come corpo test, la zona sferica di raggi r_1 , ed r_2 , contenente il centro O' della sfera. Inoltre, sia $2R < a$. La probabilità che il corpo test intersechi un piano del reticolo \mathcal{R} è fornita dalla formula (7), dove $\alpha_i = \arcsin \frac{r_i}{R}$.*

Sono interessanti i casi particolari:

1. Se $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, ZS diventa una sfera di raggio R e si ritrova un risultato di M. Stoka [5], cioè $p = \frac{2R}{a}$.

2. Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, ZS si riduce ad un cerchio di raggio R e si ritrova un altro risultato di M. Stoka [4], p. 178, cioè $p = \frac{\pi R}{2a}$,

3. Se $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = 0$, ZS diventa una semisfera di raggio R e si ottiene la probabilità di Duma-Stoka [3], cioè $p = (1 + \frac{\pi}{4}) \frac{R}{a}$.

4. Se $\alpha_2 = 0$ e $0 < \alpha_1 \leq \frac{\pi}{2}$, ZS diventa un segmento sferico con base di raggio r_1 e col centro O' della sfera nel suo interno. La formula (7) si semplifica così

$$p = \frac{R}{2a} \alpha_1 \sin \alpha_1 + \frac{R}{a} (1 + \cos \alpha_1).$$

3 - Zona sferica (secondo caso)

Consideriamo ora nella sfera di centro O' e raggio R , in luogo di ZS , la zona sferica zs di raggi r_1 ed r_2 , col centro O' al suo esterno. Sia ancora $2R < a$ (Fig. 4).

In maniera analoga al caso della zona sferica ZS , perveniamo al seguente

Teorema 2. *Siano dati, nello spazio euclideo E^3 , la sfera di centro O' e raggio R , un reticolo \mathcal{R} di piani paralleli equidistanti, di equidistanza a , e, co-*

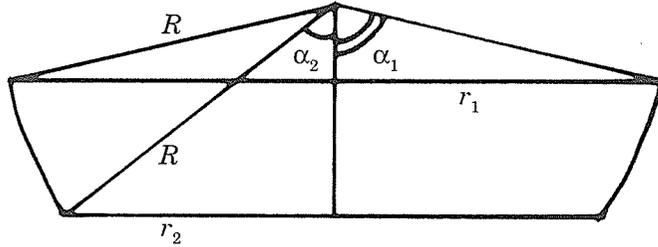


Figura 4.

me corpo test, la zona sferica di raggi r_1 ed r_2 , col centro O' della sfera al suo esterno. Inoltre sia $2R < a$. La probabilità che il corpo test intersechi un piano del reticolo \mathcal{R} è fornita dalla formula

$$(8) \quad p_{zs} = \frac{R}{a} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_1}{2} \right) \sin \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} \sin \alpha_2 + \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \right]$$

dove $\alpha_i = \arcsin \frac{r_i}{R}$.

Conviene segnalare i casi particolari:

1. Se $\alpha_1 = \alpha_2 \in]0, \frac{\pi}{2}]$, zs diventa un *cerchio* di raggio $r_1 = r_2 = r$ e si ritrova la probabilità di M. Stoka $p = \frac{\pi r}{2a}$.

2. Se $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = 0$, zs diventa una *semisfera* di raggio R e ritroviamo la probabilità di A. Duma e M. Stoka $p = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \frac{R}{a}$.

3. Se $0 < \alpha_1 \leq \frac{\pi}{2}$, e $\alpha_2 = 0$, zs diventa un *segmento sferico* con base di raggio r_1 e col centro O' della sfera al suo esterno. La formula (8) si semplifica così

$$p = \frac{R}{2a} (\pi - \alpha_1) \sin \alpha_1 + \frac{R}{a} (1 - \cos \alpha_1).$$

4 - Cilindro sormontato da cono

Consideriamo ora, in un piano euclideo E^2 , un rettangolo di base $2R$ e di altezza l sormontato da un triangolo isoscele di altezza h (Fig. 5) e sia M il corpo test ottenuto mediante una rotazione di π di questa figura attorno al suo asse di

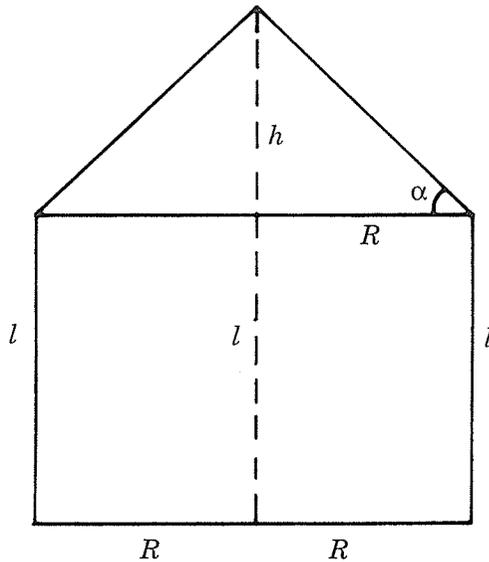


Figura 5.

simmetria. Il corpo test è dunque un cilindro sormontato da un cono; per brevità: una *matita*.

Per un valore prefissato di $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, che rappresenta l'angolo tra l'asse Ox e la base di lunghezza $2R$ del rettangolo considerato nel piano E^2 , indichiamo con $\text{pr}(\vartheta)$ la proiezione della *matita* sull'asse Oy (Fig. 6). Allora

$$\text{pr}(\vartheta) = \begin{cases} R \sin \vartheta + (h + l) \cos \vartheta & \text{se } 0 \leq \vartheta \leq \alpha \\ 2R \sin \vartheta + l \cos \vartheta & \text{se } \alpha \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

dove $\alpha = \text{arctg} \frac{h}{R}$.

Le (5) e (6) forniscono poi

$$(9) \quad p_M = \frac{R}{2a} \left(\frac{\pi}{2} + \text{arctg} \frac{R}{h} \right) + \frac{h + l}{2a}.$$

Pertanto

Teorema 3. *Siano dati, nello spazio euclideo E^3 , un reticolo \mathcal{R} di piani paralleli equidistanti, di equidistanza a , e, come corpo test una «matita» a base circolare di raggio R e di altezza complessiva $l + h < a$. La probabilità che il corpo test intersechi un piano del reticolo \mathcal{R} è fornita dalla formula (9).*

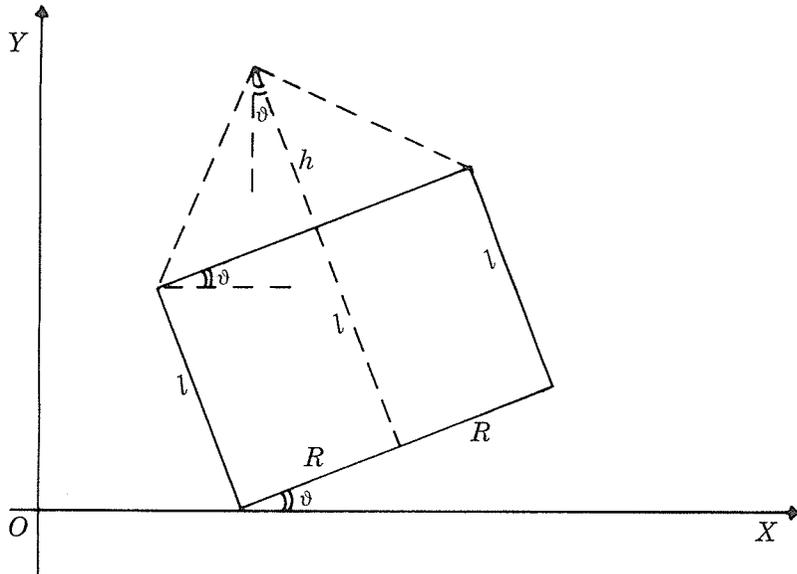


Figura 6.

Dal Teorema 3 discendono i casi particolari:

1. Se $h = 0$, la *matita* si riduce ad un *cilindro* di base un cerchio di raggio R e di altezza l e ritroviamo la probabilità di P. Barbe [2]

$$p = \frac{\pi R + l}{2a}.$$

2. Se $l = 0$, la *matita* si riduce ad un *cono* di base un cerchio di raggio R e di altezza h e ritroviamo la probabilità di A. Duma e M. Stoka [3]

$$p = \frac{R}{2a} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{R}{h} \right) + \frac{h}{2a}.$$

Bibliografia

- [1] P. BARBE, *Sur la probabilité qu'un cylindre aléatoire coupe un réseau de plans dans E_3* , Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 34 1989.
- [2] W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, V.E.B. Deutscher Verlag der Wiss., Berlin 1955.

- [3] A. DUMA and M. STOKA, *Problems of Buffon type in the Euclidean space E_n* , Atti 4° Conv. It. di Geom. Integrata, Probabilità Geometriche e Corpi Convessi, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1994.
- [4] M. STOKA, *Probabilità e Geometria*, Herbita, Palermo 1992.
- [5] M. STOKA, *Sur quelques problèmes de probabilités géométriques pour des réseaux dans l'espace euclidien E_n* , Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 34 1989.

Summary

Let us consider, in the Euclidean space E^3 , a lattice \mathcal{R} of equidistant parallel planes at a distance a . and a convex «test body» T having diameter d with $d < a$. In this paper we investigate the probability that T intersects \mathcal{R} . By the help of a result due to Duma and Stoka [3], if T is a spherical zone or a cone over a cylinder (a pencil), the above probability is calculated.
