Riv. Mat. Univ. Parma (5) 4 (1995), 69-78

GIANCARLO CANTARELLI (*)

Criteri di limitatezza parziale dei moti di sistemi olonomi scleronomi dissipativi (**)

1 - Introduzione

Si consideri un sistema *olonomo scleronomo* S con n gradi di libertà, e sia $q^T=(q_1, \dots, q_n)$ una n-upla di coordinate lagrangiane *indipendenti*. Sia $T=\frac{1}{2}\dot{q}^T A(q)\dot{q}$ l'energia cinetica di S, dove $A=A(q)$ è una matrice $n \times n$, simmetrica, *definita positiva* per ogni $q \in \boldsymbol{R}^n$, e di classe $C^1(\boldsymbol{R}^n)$. Col simbolo $\pi(t, q)$, funzione di classe $C^1(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n)$, si indichi l'energia potenziale delle forze agenti su S che derivano da un potenziale *generalizzato*. Inoltre, si supponga che il sistema S sia soggetto a forze *dissipative* di componenti lagrangiane $Q^T=(Q_1, \dots, Q_n)$, funzioni definite e continue in $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$, soddisfacenti la condizione

$$(1.1) \qquad Q^T(t, q, \dot{q})\dot{q} \leqslant -a(t)\|z\|^h \|\dot{z}\|^k \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n,$$

dove $a: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}_0^+=(0, \infty)$ è una funzione continua, z è un vettore avente per componenti l $(1 \leqslant l \leqslant n)$ coordinate lagrangiane, $h \geqslant 0$, $k>1$ sono due costanti reali, mentre $\|z\|$, $\|\dot{z}\|$ indicano la norma euclidea dei vettori z, $\dot{z}$ in $\boldsymbol{R}^l$.

(*) Dip. di Matem., Univ. Parma, Via M. D'Azeglio 85, 43100 Parma, Italia.
(**) Ricevuto il 21.9.1994. Classificazione AMS 34 C 11. Lavoro eseguito con fondi MURST 40% e 60%.

In [4], [8], scegliendo come funzione di Liapunov l'energia totale del sistema S ed utilizzando il metodo di confronto, sono stati stabiliti dei criteri per l'esistenza globale in futuro e per la limitatezza dei moti dei sistemi olonomi scleronomi. In tali lavori si suppone che l'energia potenziale $\pi(t, q)$ sia *inferiormente limitata* in insiemi del tipo $I \times \boldsymbol{R}^n$, dove $I \subset \boldsymbol{R}^+$ è un arbitrario intervallo limitato (cfr. anche [6]).

Tale ipotesi restrittiva è stata eliminata dall'autore in [1] introducendo come funzione di Liapunov la somma dell'energia cinetica $T(q, \dot{q})$ e di un'opportuna funzione $F(t, q)$, e da P. Pucci e J. Serrin in [7].

In [1], nell'ipotesi che sia soddisfatta la condizione (1.1), è stata utilizzata la funzione di Liapunov

$$F(t, q) = \pi(t, q) + 2\sigma(t)\|z\|^{h+k}, \tag{1.2}$$

dove $\sigma\colon \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}_0^+$ è una funzione di classe C^1.

Nel presente lavoro, scegliendo la medesima funzione di Liapunov e utilizzando criteri stabiliti in [3], si forniscono delle condizioni sufficienti per la limitatezza parziale delle soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema S. È importante sottolineare che anche nei successivi teoremi *non si richiede che l'energia potenziale del sistema S sia inferiormente limitata.*

2 - Definizioni e risultati preliminari

Nel seguito si indica con $x^T = (q_1, \dots, q_m)$ il vettore costituito dalle prime $m(\leqslant n)$ coordinate lagrangiane, con ξ un vettore avente per componenti alcune delle coordinate lagrangiane (o anche tutte), e con $\|q\|$, $\|x\|$, $\|\xi\|$ le norme euclidee dei vari vettori nei rispettivi spazi vettoriali.

Assegnato un arbitrario numero reale $r > 0$, si indicano con i simboli S_r^+ e C_r i sottoinsiemi di $\boldsymbol{R}^n$ così definiti

$$S_r^+ = \bigcup_{t \geqslant 0} \{q \in \boldsymbol{R}^n \,|\, F(t, q) \leqslant r\} \qquad C_r = \{q \in \boldsymbol{R}^n \,|\, \|x\| \leqslant r\}. \tag{2.1}$$

Inoltre, si indica con K_* la classe delle funzioni continue $\varphi\colon \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$, strettamente crescenti, con $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(s) \to \infty$ per $s \to \infty$.

In [1] è stato dimostrato che: *assegnate due costanti reali $h \geqslant 0$, $k > 1$, e due funzioni continue $a, \sigma\colon \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}_0^+$, sussiste la seguente disuguaglianza, valida* *per ogni* $(t, z, \dot{z}) \in \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{R}^l$,

$$2(h+k)\,\sigma(t)\,\|\dot{z}\|\,\|z\|^{k-1} \leqslant a(t)\,\|\dot{z}\|^k + c_0(t)\,\|z\|^{h+k}, \tag{2.2}$$

dove è
$$c_0(t) = (k-1)\,a(t)\Big[\frac{2(h+k)\,\sigma(t)}{ka(t)}\Big]^{\frac{k}{k-1}}.$$

Lemma. *Siano soddisfatte le condizioni:*

L_1. *esistono una funzione continua* $a\colon \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}_0^+$, *e due costanti reali* $h \geqslant 0$, $k > 1$, *tali che si abbia*

$$Q^T(t, q, \dot{q})\,\dot{q} \leqslant -a(t)\,\|z\|^h\,\|\dot{z}\|^k \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$$

L_2. *esistono una funzione continua* $\lambda\colon \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ *e una funzione* $\sigma\colon \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}_0^+$ *di classe* C^1, *tali che si abbia*

$$\pi(t, q) + \sigma(t)\,\|z\|^{h+k} \geqslant 0 \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} \leqslant \lambda(t)[\pi(t, q) + \sigma(t)\,\|z\|^{h+k}] \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n.$$

Allora, posto $w(t) = \max\{\lambda(t), [c_0(t) + 2\dot{\sigma}(t)](\sigma(t))^{-1}\}$ *e* $F(t, q) = \pi(t, q) + 2\sigma(t)\,\|z\|^{h+k}$, *sussiste la disuguaglianza differenziale*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + F) \leqslant w(t)\,(T + F) \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n. \tag{2.3}$$

Dimostrazione. Tenendo conto della identità $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + \pi) = Q^T\dot{q} + \dfrac{\partial \pi}{\partial t}$, della (2.2) e delle condizioni del lemma, si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + F) &= Q^T\dot{q} + \frac{\partial \pi}{\partial t} + 2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sigma(t)\,\|z\|^{h+k}) \\
&\leqslant -a(t)\,\|z\|^h\,\|\dot{z}\|^k + \lambda(t)[\pi + \sigma(t)\,\|z\|^{h+k}] \\
&\quad + 2\dot{\sigma}(t)\,\|z\|^{h+k} + 2\sigma(t)(h+k)\,\|\dot{z}\|\,\|z\|^{h+k-1} \\
&\leqslant \lambda(t)[T + \pi + \sigma(t)\,\|z\|^{h+k}] + \frac{c_0(t) + 2\dot{\sigma}(t)}{\sigma(t)}\,\sigma(t)\,\|z\|^{h+k}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

da cui segue la (2.3).

Infine è utile riportare l'enunciato di due teoremi dimostrati in [3] e qui indicati come Teorema A e Teorema B.

Teorema A ([3], Teorema 2). *Si supponga che tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema S esistano globalmente in futuro e che siano soddisfatte le condizioni:*

A_1. *esistono una fuznione* $F\colon \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^+$ *di classe* C^1 *e una funzione continua* $v\colon \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ *tali che si abbia* $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+F) \leqslant v(t)(T+F)$ *in* $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$

A_2. *esistono una funzione* $\varphi \in K_*$ *ed una funzione continua* $h\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^+$, *tali che, per ogni* $(t, q) \in \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n$, *si abbia*

$$\varphi(\|x\|) \exp\Big\{\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s\Big\} \leqslant F(t, q) \leqslant h(q) \exp\Big\{\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s\Big\}.$$

Allora tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema S sono x-uniformemente limitate.

In realtà la condizione A_2 del Teorema A è più generale dell'analoga del Teorema 2 di [3]. Tale differenza non comporta però sostanziali modifiche della dimostrazione.

Teorema B ([3], Teorema 3). *Si supponga che tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema S esistano globalmente in futuro e che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

B_1. *esiste una funzione* $F\colon \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^+$ *di classe* C^1 *tale che si abbia*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + F) \leqslant g(t, T + F) \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$$

dove $g\colon \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$ *è una funzione continua e tale da assicurare l'unicità e la limitatezza di ogni soluzione* $u(t) = u(t, t_0, u_0)$ *dell'equazione differenziale di confronto* $\dot{u} = g(t, u)$.

B_2. *esistono una funzione* $\varphi \in K_*$ *e, per ogni* $t_0 \geqslant 0$, $u_0 \geqslant 0$, *una costante* $\alpha = \alpha(t_0, u_0) > 0$ *tali che si abbia*

$$F(t, q) \geqslant \alpha u(t)\, \varphi(\|x\|) \qquad \text{in } [t_0, \infty) \times \boldsymbol{R}^n.$$

B_3. *fissate ad arbitrio due costanti reali* $r > 0$, $\tilde{r} > 0$, *esiste una costante* $\beta = \beta(r, \tilde{r}) > 0$ *tale che si abbia* $T(q, \dot{q}) \geqslant \beta \|\dot{\xi}\|^2$ *in* $(S_r^+ \cap C_{\tilde{r}}) \times \boldsymbol{R}^n$.

Allora tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema S sono $(x, \dot{\xi})$*-equilimitate.*

Inoltre, se le soluzioni dell'equazione di confronto $\dot{u} = g(t, u)$ *sono uniformemente limitate, se la costante* α *è indipendente da* t_0 *e se esiste una funzione continua* H: $\boldsymbol{R}^n \mapsto \boldsymbol{R}^+$ *tale che si abbia* $F(t, q) \leqslant H(q)$ *in* $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n$, *allora tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema S sono* $(x, \dot{\xi})$*-uniformemente limitate.*

3 - Condizioni sufficienti per la limitatezza parziale delle soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema *S*.

Teorema 1. *Si supponga che tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema S esistano globalmente in futuro. Si supponga inoltre che siano soddisfatte le condizioni* L_1, L_2 *del Lemma unite alla seguente*

T_1. *esistono una funzione continua* h: $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^+$ *ed una funzione* $\varphi \in K_*$ *tali che si abbia*

$$\varphi(\|x\|) \exp\{\int_0^t w(s)\,ds\} - 2\sigma(t)\|z\|^{h+k} \leqslant \pi(t, q) \leqslant h(q) \exp\{\int_0^t w(s)\,ds\} - 2\sigma(t)\|z\|^{h+k}$$

in $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n$.

Allora tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema S sono x-uniformemente limitate.

Dimostrazione. In virtù del Lemma, è facile riconoscere che il Teorema 1 è un corollario del Teorema A, con $v(t) = w(t)$ e $F(t, q) = \pi(t, q) + 2\sigma(t)\|z\|^{h+k}$.

Teorema 2. *Si supponga che tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema S esistano globalmente in futuro. Si supponga inoltre che siano soddisfatte le condizioni* L_1, L_2 *del Lemma con* $\int^\infty w(t)\,dt < \infty$, *unite alle seguenti*

T_2'. *esiste una funzione* $\varphi \in K_*$ *tale che si abbia*

$$\pi(t, q) \geqslant \varphi(\|x\|) - 2\sigma(t)\|z\|^{h+k} \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n$$

T$''_2$. *per ogni costante reale* $r > 0$ *esiste una costante* $\beta = \beta(r) > 0$ *tale che si abbia* $T(q, \dot{q}) \geq \beta \|\dot{\xi}\|^2$ *in* $S_r^+ \times \boldsymbol{R}^n$, *l'insieme* S_r^+ *essendo definito dalla* (2.1) *con* $F(t, q) = \pi(t, q) + 2\sigma(t)\|z\|^{h+k}$.

Allora tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema S sono $(x, \dot{\xi})$*-equilimitate.*

Inoltre, se la funzione $\sigma(t)$ *è limitata, e se esiste una funzione continua* $H_*: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^+$ *tale che si abbia* $\pi(t, q) \leq H_*(q)$ *in* $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n$, *allora tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema S sono* $(x, \dot{\xi})$*-uniformemente limitate.*

Dimostrazione. Posto $F(t, q) = \pi(t, q) + 2\sigma(t)\|z\|^{h+k}$, in virtù del Lemma, si deduce $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + F) \leq w(t)(T + F)$ e pertanto è soddisfatta la condizione B_1 del Teorema B, con $g(t, u) = w(t)u$. Infatti, essendo per ipotesi $\int^{\infty} w(t)\,\mathrm{d}t < \infty$, tutte le soluzioni dell'equazione di confronto $\dot{u} = w(t)u$ sono *uniformemente limitate* (cfr. [5]).

Sia $u(t) = u_0 \exp\{\int_{t_0}^{t} w(s)\,\mathrm{d}s\}$ la soluzione dell'equazione di confronto $\dot{u} = w(t)u$ soddisfacente la condizione iniziale $u(t_0) = u_0$. Posto $\nu = \int_0^{\infty} w(t)\,\mathrm{d}t$, per la condizione T_2' si ottiene

$$F(t, q) \geq \varphi(\|x\|) \geq \frac{e^{-\nu}}{u_0} u(t)\,\varphi(\|x\|) \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n \tag{3.1}$$

e quindi è soddisfatta anche la condizione B_2 del Teorema B, con $\alpha = e^{-\nu}u_0^{-1}$.

Infine, senza perdere in generalità (come si deduce dalla dimostrazione del Teorema B), si può supporre $\hat{r} \geq \varphi^{-1}(r)$. Siccome sotto tale ipotesi è $S_r^+ \subset C_{\hat{r}}$, la condizione T_2'' coincide con la condizione B_3 del Teorema B.

Il Teorema 2 è pertanto conseguenza del Teorema B.

Condizione minimale affinchè sia possibile utilizzare i precedenti teoremi è che tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema S esistano globalmente in futuro. Grazie a condizioni più restrittive è possibile rimuovere tale ipotesi. Sussistono infatti i corollari.

Corollario 1. *Si supponga che siano soddisfatte le condizioni* L_1, L_2 *del Lemma, e la condizione* T_1 *del Teorema* 1. *Inoltre, si supponga che ogni coordinata lagrangiana sia componente di x o di z (o eventualmente di entrambi i vettori).*

Allora tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema S esistono globalmente in futuro e sono x-uniformemente limitate.

La dimostrazione è simile a quella del Corollario 1 di [1], e perciò viene omessa.

Corollario 2. *Si supponga che siano soddisfatte le condizioni* L_1, L_2 *del Lemma, con* $\int^{\infty} w(t)\,dt < \infty$, $z = q$, *e* $\sigma(t) \geqslant \sigma_* = cost. > 0$.

Allora tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema S *sono* $(q, \dot{q})$*-equilimitate.*

Inoltre, se la funzione $\sigma(t)$ *è limitata, e se esiste una funzione continua* $H_*: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^+$ *tale che si abbia* $\pi(t, q) \leqslant H_*(q)$ *in* $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n$, *allora la limitatezza è uniforme.*

Dimostrazione. L'esistenza globale in futuro di tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema S è garantita dal Corollario 6 di [1]. Inoltre, essendo $\sigma(t) \geqslant \sigma_*$, dalla condizione L_2 del Lemma segue

$$\pi(t, q) \geqslant \sigma_* \|q\|^{h+k} - 2\sigma(t)\|q\|^{h+k} \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n. \tag{3.2}$$

Pertanto, è soddisfatta la condizione T_2' del Teorema 2 con $x = z = q$ e $\varphi(s) = \sigma_* s^{h+k}$.

Per verificare che è soddisfatta anche la condizione T_2'', è sufficiente ricordare (cfr. [4]) che esiste una funzione continua $\psi: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}_0^+$ tale che si abbia

$$T(q, \dot{q}) \geqslant \psi(\|q\|)\|\dot{q}\|^2 \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n. \tag{3.3}$$

Quindi, tenuto conto che è $S_r^+ \subset \{q \in \boldsymbol{R}^n \mid \sigma_* \|q\|^{h+k} \leqslant r\}$, posto $\psi_r = \min\{\psi(s) \mid \sigma_* s^{h+k} \leqslant r\}$, dalla (3.3) si ottiene

$$T(q, \dot{q}) \geqslant \psi_r \|\dot{q}\|^2 \qquad \text{in } S_r^+ \times \boldsymbol{R}^n \tag{3.4}$$

ed è dunque soddisfatta la condizione T_2'' con $\beta = \psi_r$ e $\xi = q$.

Con ciò resta dimostrato che il Corollario 2 è un corollario del Teorema 2.

Nel caso particolare, di notevole interesse fisico, in cui l'energia potenziale π è indipendente dal tempo, il Corollario 2 può essere enunciato nella forma seguente, assai utile nelle applicazioni.

Corollario 3. *Si supponga che l'energia potenziale π sia indipendente dal tempo, che sia soddisfatta la condizione* L_1 *del Lemma con* $z = q$ *e* $\int^{\infty} [a(t)]^{\frac{1}{1-k}} \, dt < \infty$, *e che esista una costante reale* $p > 0$ *tale che si abbia*

$$C_3. \qquad \pi(q) \geqslant -p \|q\|^{h+k} \qquad in \ \boldsymbol{R}^n .$$

Allora tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema S sono $(q, \dot{q})$*-uniformemente limitate.*

Dimostrazione. Siccome la condizione L_2 del Lemma è soddisfatta con $z = q$, $\lambda(t) = 0$ e $\sigma(t) = p$, risulta

$$w(t) = \frac{k-1}{p} \left(2p \frac{h+k}{k}\right)^{\frac{k}{k-1}} (a(t))^{\frac{1}{k-1}} . \tag{3.5}$$

Pertanto, in virtù dell'ipotesi sulla funzione $a(t)$, è

$$\int^{\infty} w(t) \, dt < \infty \tag{3.6}$$

dal che si deduce che il Corollario 3 rientra, come caso particolare, nel Corollario 2.

Esempio. Sia P un elemento materiale di massa unitaria vincolato, senza attrito, a muoversi nel piano Oxy di una terna di riferimento $Oxyz$. Tale terna si muove, rispetto ad un riferimento inerziale, di moto rotatorio ed uniforme, con velocità angolare $\vec{\omega}$, attorno all'asse fisso z.

L'elemento sia soggetto alla forza elastica $\vec{f} = -\gamma(t) \overrightarrow{P_* P}$ (dove $\gamma \colon \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ è una funzione continua, e P_* è la proiezione ortogonale di P sull'asse y) e alla resistenza di mezzo $\vec{R} = -a(t) \, \vec{v}$ (dove $a \colon \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}_0^+$ è una funzione continua e $\vec{v}$ è la velocità di P).

Se ω è la componente del vettore $\vec{\omega}$ rispetto all'asse z, allora risulta

$$\begin{aligned} &T(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \qquad && \pi(t, x, y) = \frac{1}{2}\gamma(t) x^2 - \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) \\ &Q_x(t, \dot{x}, \dot{y}) = -a(t)\dot{x} + 2\omega\dot{y} && Q_y(t, \dot{x}, \dot{y}) = -a(t)\dot{y} - 2\omega\dot{x} . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Poichè $Q_x \dot{x} + Q_y \dot{y} = -a(t)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$, è soddisfatta la condizione L_1 del Lemma, con $z^T = q^T = (x, y)$, $h = 0$, $k = 2$.

Si prendano in considerazione due casi:

I. $$\int^{\infty} \frac{dt}{a(t)} < \infty \qquad \gamma(t) = \text{cost.} > 0\,.$$

È facile verificare che sono soddisfatte tutte le condizioni del Corollario 3, per cui *tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange dell'elemento P sono uniformemente limitate rispetto a tutte le variabili* $x, y, \dot{x}, \dot{y}$.

II. Esistono una costante reale $r > 0$ ed una funzione non crescente $\mu: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ di classe C^1 tali che si abbia

$$a(t) \geqslant \frac{2\omega^2}{r} \qquad \gamma(t) = \mu(t) + \omega^2 e^{rt}.$$

Le condizioni L_1, L_2 del Lemma sono soddisfatte con $h = 0$, $k = 2$, $z^T = (x, y)$, $\lambda(t) = r$, $\sigma(t) = \frac{1}{2}\omega^2$. Di conseguenza, essendo $c_0(t) = \omega^4 (a(t))^{-1}$ e $a(t) \geqslant 2\omega^2 r^{-1}$, risulta $w(t) = r$.

Posto $\mu_* = \max\{\mu(t) \mid t \in \boldsymbol{R}^+\}$, è facile riconoscere che è soddisfatta anche la condizione T_1 del Teorema 1, con

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \qquad h(x, y) = (\frac{1}{2}\mu_* + \omega^2)x^2 + \omega^2 y^2.$$

In virtù del Corollario 1, si può quindi affermare che *tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange dell'elemento P esistono globalmente in futuro e sono x-uniformemente limitate.*

References

[1] G. Cantarelli, *Nuovi criteri per l'esistenza globale in futuro dei moti dei sistemi olonomi scleronomi*, Ann. Mat. Pura Appl. **163** (1993), 247-264.

[2] G. Cantarelli, *Sulla limitatezza parziale dei moti dei sistemi olonomi scleronomi*, Riv. Mat. Univ. Parma **3** (1994), 341-354.

[3] G. Cantarelli e C. Risito, *Criteri di esistenza globale e di limitatezza per i sistemi olonomi scleronomi*, Ann. Mat. Pura Appl. **162** (1992), 383-394.

[4] G. Cantarelli and C. Risito, *On the continuation of the solutions of Lagrange equations for holonomic scleronomic systems*, Proc. Equadiff. 91, Barcellona, C. Perelló, C. Simó and J. Solà-Morales eds. 1993.

[5] R. Conti, *Limitazioni «in ampiezza» delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali e applicazioni*, Boll. Un. Mat. Ital. **11** (1956), 344-349.

[6] P. PUCCI and J. SERRIN, *Continuation and limit properties for solutions of strongly nonlinear second order differential equations*, Asymptotic Anal. 4 (1991), 97-160.

[7] P. PUCCI and J. SERRIN, *Continuation and limit behavior for damped quasi-variational systems*, in *Degenerate Diffusions*, W.-M. Ni, L. A. Peletier, J. L. Vazquez eds., IMA Math. Appl. **47**, Springer, Berlin 1993.

[8] C. RISITO, *Sull'esistenza globale e sulla limitatezza dei moti dei sistemi olonomi scleronomi*, Ann. Mat. Pura Appl. **139** (1985), 341-348.

Summary

By means of criteria depending on a choice of suitable Liapunov functions established in a previous author's paper, sufficient conditions for the partial boundedness of the motions of a class of holonomic scleronomic dissipative systems are given. The case in which the potential energy of the system is not bounded from below is also considered. A mechanical example illustrates the theorems.

* * *