Riv. Mat. Univ. Parma (5) 3 (1994), 333-339

C. Cotti Ferrero e G. Ferrero (*)

Osservazioni elementari sulle dilatazioni di un quasi-anello (**)

Introduzione

Ogni gruppo abeliano può essere gruppo additivo di un anello, ed ogni gruppo, gruppo additivo di un quasi-anello. Invece il problema della individuazione dei semigruppi che possono essere semigruppi moltiplicativi di anelli o quasi-anelli è notoriamente molto difficile (cfr. per es. [8]), anche se molto studiato e ricco di risultati parziali (cfr. p. es. [**10**]). Sembra invece studiata solo incidentalmente la possibilità che un semigruppo sia un semigruppo di dilatazioni per un anello od un quasi-anello.

Qui proviamo ad iniziare un tale studio, ovviamente con considerazioni del tutto elementari (il che ci permetterà di omettere le dimostrazioni più dirette), anche per fissare definizioni ed impostazione della ricerca, concludendo con un esame dei quasi-anelli in cui i semigruppi ϕ, Ψ delle dilatazioni rispettivamente sinistre o destre sono zero-destri o zero-sinistri e rinviando a successivi lavori ulteriori sviluppi. Incidentalmente questo completa le considerazioni partite con [**6**] sui quasi-anelli in cui valgono identità semigruppali un cui membro è costituito da tre fattori distinti.

Vale la pena di segnalare che lo studio che stiamo intraprendendo è legato al problema 2.16 di [4], che essenzialmente chiede di vedere quali gruppi possano essere gruppi additivi di quasi-anelli *non banali* (aventi cioè dilatazioni sinistre di-

---

(*) Dip. di Matem., Univ. Parma, Via M. D'Azeglio 85, 43100 Parma, Italia.
(**) Ricevuto il 10.1.1994. Classificazione AMS 16 Y 30. Lavoro parzialmente finanziato dal MURST 40%.

verse dall'endomorfismo nullo e dall'identità), naturale controparte del classico studio dei gruppi *nil* e *quasi nil* nel senso di Szele.

1 - Notazioni e definizioni

Nel seguito useremo sempre, senza ulteriori commenti, le notazioni e le definizioni qui sotto prospettate, oltre che la nomenclatura di [12] e [4]. In presenza di funzioni $f\colon A \to \mathrm{Map}(B)$ scriveremo tuttavia spesso f_a in luogo di $f(a)$.

Sia N un quasi-anello, siano rispettivamente N^+ ed N^* il suo gruppo additivo ed il suo semigruppo moltiplicativo. Siano $\varphi_a\colon x \to ax$, $\psi_a\colon x \to xa$ le dilatazioni (rispettivamente sinistra e destra) indotte da $a \in N$ (1), siano Φ, Ψ i semigruppi delle dilatazioni sinistre (destre) di N ove si ponga $\varphi_a \varphi_b = \varphi_{ab} = \varphi_a \odot \varphi_b$ $(\psi_a \psi_b = \psi_{ab} = \psi_b \odot \psi_a)$. Nasce ovviamente un omomorfismo moltiplicativo $\varphi\colon a \to \varphi_a$, che chiameremo *funzione di Clay associata* ad N. Anche ricordando [1], quando N^+ è un gruppo additivo chiamiamo *funzione di Clay di* N^+ ogni funzione $\varphi\colon N^+ \to \mathrm{End}(N^+)$ tale che $N_\varphi = [N^+, +, \cdot]$ sia un quasi-anello con il prodotto $\cdot$ definito dicendo che $a \cdot b = \varphi_a b$. La φ è allora la funzione di Clay associata al quasi-anello N_φ. Ovviamente una funzione $\varphi\colon N^+ \to \mathrm{End}(N^+)$ è di Clay se, e solo se $\varphi_a \varphi_b = \varphi_{\varphi_a b}$. Simmetricamente dato un quasi-anello N possiamo considerare l'omomorfismo moltiplicativo $\psi\colon a \to \psi_a$, che chiameremo *funzione di Gallina associata ad* N, per esempio ricordando [8]. Se viceversa N^+ è un gruppo additivo e $\psi\colon N^+ \to \mathrm{Map}(N^+)$ è una funzione tale che ponendo $ab = \psi_b a$ si ottiene un quasi-anello $N_\psi = [N; +, \cdot]$ diciamo che ψ è una *funzione di Gallina di* N^+. Questo accade quando ψ è un omomorfismo da N^+ a $[\mathrm{Map}(N^+), +]$ ed inoltre $\psi_a \psi_b = \psi_{\psi_a b}$, $\forall a, b \in N^+$.

Chiamiamo (ricordando [11]) *funzione di Dickson* (2) *del quasi-anello* N ogni funzione $\delta\colon N \to \mathrm{End}(N)$ tale che il prodotto $\odot_\delta$ (che diremo *di Dickson* rispetto a δ) definito dalla $a \odot_\delta b = a(\delta_a b)$ dia luogo ad un quasi-anello $N'_\delta = [N, +, \odot_\delta]$, il che ovviamente succede se, e solo se $a(\delta_a b)\, \delta_{a(\delta_a b)}(c) = a\delta_a(b\delta_b(c))$, $\forall a, b, c \in N$. In tali condizioni il quasi-anello N'_δ sarà detto *quasi-anello derivato da* N *per mezzo della* δ. Si veda, anche per questioni di composizione, il trattato [14].

---

(1) Più spesso le nostre *dilatazioni* vengono dette *traslazioni*. Per ragioni geometriche preferiamo riservare tale termine alle funzioni $N \to N$ del tipo $x \to a + x$ o del tipo $x \to x + a$.

(2) Nel caso classico [14] si parla di *funzioni di accoppiamento*, ma qui conviene rimanere in casi più generali.

2 - Confronti fra funzioni

È facile vedere che una funzione φ di Clay di un gruppo N^+ è di Gallina, se e solo se è un endomorfismo da N^+ ad End(N^+), cioè quando N_φ è un quasi-anello distributivo.

Si verifica facilmente che *la funzione di Clay φ associata ad un quasi-anello N è una funzione di Dickson di N, se e solo se il prodotto in N è distributivo a sinistra rispetto a sé stesso. Nel derivato $N'_\varphi = [N, +, *]$ ove $a * b = a^2 b$ di N per mezzo di φ il prodotto è ancora distributivo a sinistra rispetto a sè ed il derivato $(N'_\varphi)'_\varphi$ di N'_φ per mezzo di φ coincide con N'_φ*. Questo si vede con calcoli semplici e diretti.

Per approfondire lo studio di situazioni di questo tipo si può vedere per esempio [2], [3], [5], [14].

La funzione ψ di Gallina associata al quasi-anello N è di Dickson, se e solo se N è un quasi-anello distributivo ed inoltre il prodotto in esso definito è distributivo a destra rispetto a sé stesso.

In tali condizioni il derivato N'_ψ è un quasi-anello sinistro in cui il prodotto è distributtivo a sinistra rispetto a sé stesso.

Se anche la ψ di Gallina è di Dickson, accade che in generale la ψ non è più di Dickson nel derivato N'_ψ. Possiamo tuttavia osservare che *se $N = [N, +, \cdot]$ è un quasi-anello distributivo in cui il prodotto è distributivo a destra rispetto a sè stesso allora N individua due quasi-anelli sinistri $N'_\psi = [N, +, *]$, $(N'_\psi)'_\varphi = [N, +, \odot]$ (ove φ è la funzione di Clay associata a N'_ψ) aventi lo stesso gruppo additivo di N con i prodotti definiti rispettivamente dalle $x * y = xyx$, $x \odot y = xyx^2$. Entrambi tali prodotti risultano distributivi a sinistra rispetto a sé stessi.*

3 - Quasi-anelli zero-destri

Ovviamente il semigruppo ϕ delle dilatazioni di un quasi-anello N è zero-destro, se e solo se in N vale l'identità $abc = bc$. Chiameremo zero-destri i quasi-anelli in cui ϕ è zero-destro.

Lemma 1. *Se G è un gruppo e ϕ è un suo semigruppo zero-destro di endomorfismi allora*

1. *tutti gli elementi di ϕ hanno la stessa immagine I e subordinano su essa l'identità*

2. *ogni elemento* $\eta \in \phi$ *è permutabile con tutti gli automorfismi interni indotti da elementi di* I.

Viceversa se G *è prodotto* α*-semidiretto* $K \rtimes_\alpha I$ (3) *ed* F *è un insieme di omomorfismi di* K *in* I *permutabili con tutti gli automorfismi interni di* G *indotti da elemento di* I, *allora l'insieme* ϕ *delle funzioni* η *definite dalla* $\eta(i+k) = i + fk$ *(per* $f \in F$, $x = i + k$ *con* $i \in I$, $k \in K$*) è un semigruppo zero-destro di endomorfismi di* G.

Se η, $\gamma \in \phi$ e $y \in \eta G$, risulta, per un opportuno $g \in G$, $\gamma y = \gamma\eta g = \eta g = y$, e $y \in \gamma G$. Lo stesso accade se si scambiano η e γ. Possiamo allora indicare con I la comune immagine degli elementi di ϕ: poiché ogni $\eta \in \phi$ è idempotente risulta subito che $\eta i = i$, $\forall i \in I$. Naturalmente allora G è somma semidiretta di I e del nucleo K di un qualunque $\eta \in \phi$, e possiamo indicare con α_i (per $i \in I$) l'automorfismo interno indotto in G da i pur mantenendo notazioni coerenti. Ora per $\eta \in \phi$ si verifica che (qualunque siano gli elementi $i, j \in I$, k, $h \in K$)

$$\eta(i+k+j+h) = \eta(i+j+\alpha_j k + h) = i + j + \eta\alpha_j k + \eta h$$

$$\eta(i+k) + \eta(j+h) = i + \eta k + j + \eta h$$

di qui, eguagliando, $j + \eta\alpha_j k = \eta k + j$ e dunque $\eta\alpha_j k = \alpha_j \eta k$.

Per la seconda parte dell'enunciato, basta verificare per via diretta che tutti gli η così ottenuti sono endomorfismi di G che tengono fermi gli elementi di I.

Possiamo dare ora una costruzione per i quasi-anelli zero-destri capace di indicarne la struttura.

Teorema 1. *Sia il gruppo* $N^+ = K \rtimes_\alpha I$ *prodotto* α*-semidiretto di* I *e* K, *e si consideri una funzione* H *da* I *ad* $\mathrm{Hom}(K, I)$ *che ad ogni elemento* $i \in I$ *associa un omomorfismo* $f_i \colon K \to I$ *permutabile con tutti gli automorfismi interni di* N^+ *indotti da elementi di* I. *Definendo in* N^+ *una operazione di prodotto con la*

$$(i+k)(i'+k') = i' + f_i k'$$

si ottiene un quasi-anello (sinistro) zero-destro.

Viceversa tutti i quasi-anelli zero-destri si ottengono con la costruzione sopra prospettata.

---

(3) Se cioè il generico $g \in G$ può essere scritto come $g = i + k$ $(i \in I, k \in K)$ e $(i+k) + (i'+k) = (i+i') + (\alpha(i')k + k')$, ove α è un omomorfismo $I \to \mathrm{Aut}(K)$.

Il lemma dice infatti che le funzioni $\varphi_g: x \to gx$ sono omomorfismi di N^+, il che assicura che il prodotto ora definito è distributivo a sinistra rispetto alla somma. La associatività del prodotto segue da una verifica diretta. Si nota subito che ϕ, costituito dalle funzioni φ_x, è un semigruppo zero-destro.

Viceversa per vedere che il generico quasi-anello zero-destro N avente gruppo additivo N^+ si può ottenere con la costruzione indicata utilizziamo l'abituale decomposizione scrivendo che $N = 0N + N_0$ (e poniamo $0N = I$, $N_0 = K$, ricordando che allora $N = N_0 \rtimes_\alpha 0N$, per un qualche α), in modo da indicare il generico $x \in N$ come $x = 0x + (-0x + x) = 0x + x_0 = i + k$ $(i \in I,\ k \in K)$. Essendo ϕ zero destro si ha che $\varphi_x = \varphi_0 \varphi_x = \varphi_{0x}$, e dunque il generico prodotto $(i + k)(j + h)$ di elementi di N può essere scritto come $\varphi_i(j + h) = \varphi_i(j) + \varphi_i(h)$. Ora $j \in 0N = N_c$ è costante, e dunque $(i + k)(j + h) = j + \varphi_i h$. Naturalmente $\varphi_i h \in I$, e φ_i è un omomorfismo da K ad I. Calcoli simili a quelli relativi al lemma dicono che la distributività sinistra del prodotto rispetto alla somma impone che φ_i sia permutabile con tutti gli automorfismi interni di N^+ indotti da elementi di I, e che quindi N può essere ottenuto con la nostra costruzione.

Nota 1. Nelle condizioni prospettate l'annullatore destro di y risulta essere $A_d(y) = A_d(i + k) = \{-f_i x + x \mid x \in K\}$.

Nota 2. È chiaro che il teorema permette di individuare una vasta classe di gruppi sostegno di quasi-anelli con prodotto non banale (e può dunque contribuire alla soluzione del problema 2.16 citato nell'introduzione), ma su questo speriamo di pubblicare abbastanza presto risultati ben più interessanti.

Corollario 1. *Un quasi-anello zero-destro N il cui gruppo additivo sia abeliano è astratto affine, se e solo se la funzione H: $i \to f_i$ introdotta nel Teorema 1 è un omomorfismo.*

Infatti, per N zero-destro con gruppo additivo abeliano e con le solite notazioni, $N_0 = K$. L'elemento $k \in K$ risulta distributivo, se e solo se risulta $\forall i, j \in I$, $f_i k + f_j k = f_{i+j} k$, e dunque $K \subseteq D$, se e solo se $f_{i+j} = f_i + f_j$. Se d'altronde $d = i + k$ $(i \in I,\ k \in K)$ è distributivo, risulta

$$(j + h)(i + k) = j(i + k) + h(i + k) = i + f_j k + i + f_0 k = i + f_j k \qquad \forall j \in I,\ h \in K$$

da cui $i + f_0 k = 0$, e dunque deve essere $d = -f_0 k + k \in K$.

Allora, se N è astratto affine, la H è, per quanto sopra, un omomorfismo da I ad $\mathrm{Hom}(K, I)$. Se viceversa la H è un omomorfismo si ha che $f_0 = 0$ e dunque $D \subseteq K$ e anzi, per quanto sopra $K = D$.

4 - Quasi-anelli zero sinistri ed identità semigruppali

I quasi-anelli N in cui ϕ è zero-sinistro, in cui cioè vale l'identità $abc = ac$ sono, naturalmente, quelli in cui Ψ è zero-destro.

Osservazione 1. *Il semigruppo ϕ delle dilatazioni sinistre di un quasi-anello N è zero-sinistro, se e solo se N è rettangolare* (giusta [7]).

Se infatti ϕ è zero-sinistro $\forall a \in N$ è $\varphi_a \varphi_0 = \varphi_a$, e dunque, $\forall x \in N$, $a0x = ax = 0x$; allora $\varphi_a = \varphi_0$ e $\phi = \{\varphi_0\}$. Allora il prodotto di due elementi dipende solo dal secondo ed N è rettangolare. L'inverso è ovvio.

Teorema 2. *In un quasi-anello N risulta che:*

1. *una identità della forma $abc = x_1 x_2$, con $x_1, x_2 \in \{a, b, c\}$ e $x_1 \neq x_2$ è soddisfatta, se e solo se N è rettangolare o zero-destro*

2. *la $abc = a^2$ e la $abc = b^2$ si equivalgono e sono soddisfatte da tutti e soli i quasi-anelli zero quadrati* (giusta [13]) *a cubo nullo*

3. *la $abc = c^2$ è soddisfatta, se e solo se $(NN)N_0 = 0$* (qui si tratta di prodotti di complessi) *e, scritto ogni $n \in N$ come $n = n_0 + n_c$, risulta $nn_0 = 0$*

4. *le $abc = a$ ed $abc = b$ valgono se e solo se $|N| = 1$, la $abc = c$ se, e solo se $N = N_c$.*

Per il primo punto basta osservare che se nella $abc = x_1 x_2$ è $x_2 \neq c$ basta porre $c = 0$ per vedere che siamo in presenza di uno zero-quasi-anello (ovviamente rettangolare). Gli altri casi sono già stati incontrati.

Ora dalla $abc = a^2$ segue, per $b = c = 0$, $a0 = 0 = a^2$, $\forall a \in N$, e dunque $a^2 = 0$ e perciò $abc = 0$. L'inverso è ovvio, come pure lo studio della $abc = b^2$.

Per il terzo punto notiamo che se N soddisfa la $abc = c^2$ allora, $\forall c \in N$ risulta $0c = c^2$. Di qui, $\forall c \in N_0$, $c^2 = 0$, e subito $(NN)N_0 = 0$ ed inoltre $0(c_0 + c_c) = c_c = c(c_0 + c_c) = cc_0 + c_c$, da cui $cc_0 = 0$. Il resto e ovvio.

Conseguenza immediata di quanto sopra è il

Teorema 3. *In un quasi-anello N si equivalgono le condizioni*

1. *Ψ è zero destro,*

2. *Ψ è zero sinistro,*

3. *N è rettangolare.*

Bibliografia

[1] A. Benini, *Near-rings on certain groups*, Riv. Mat. Univ. Parma **15** (1989), 149-158.

[2] B. Birkenmeier and H. Heaterly, *Medial near-rings*, Monatsh. Math. **107** (1989), 89-110.

[3] B. Birkenmeier and H. Heaterly, *Left self distributive near-rings*, J. Austral. Mat. Soc. (A) **49** (1990), 273-296.

[4] J. R. Clay, *Nearrings (Geneses and Applications)*, Oxford Univ. Press, Oxford 1992.

[5] C. Cotti Ferrero, *Sugli stems il cui prodotto è distributivo rispetto a sé stesso*, Riv. Mat. Univ. Parma **1** (1972), 203-220.

[6] C. Cotti Ferrero, *Sugli stems il cui semigruppo moltiplicativo possiede un ideale con proprietà commutative deboli*, Rend Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **36** (1977-78), 261-269.

[7] G. Ferrero, *Sui problemi «tipo Sylow» relativi ai quasi-anelli finiti*, Atti Accad. Sci. Torino **100** (1966), 643-657.

[8] G. Ferrero, *Sul semigruppo moltiplicativo di un quasi-anello*, Atti Convegno Teoria dei semigruppi, Univ. Siena 1983.

[9] G. Gallina, *On the structure of some near-rings*, Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **121** (1987), 73-80.

[10] S. J. Mahamood, J. D. P. Meldrum and L. O'Carrol, *Inverse semigroup and near-rings*, J. London Math. Soc. **23** (1981), 45-60.

[11] C. J. Maxon, *Dickson near-rings*, J. Algebra **14** (1970), 152-1169.

[12] G. Pilz, *Near-rings*, North-Holland, Amsterdam 1983.

[13] R. P. Stanley, *Zero square rings*, Pacific J. Math. **30** (1969).

[14] H. Waehling, *Theorie der Fastkörper*, Thales Verlag, Essen 1987.

Summary

To start a systematical study of structure and construction of near-rings with simple dilatation semigroup, some simple observations are collected, mainly for near-degenerate cases.

* * *