Riv. Mat. Univ. Parma (5) 3 (1994), 3-65

MARCEL BERGER (*)

Géométrie et dynamique sur une surface (**)

Ce texte est dédié à la mémoire de Franco Tricerri, tragiquement décédé le 6 Juin 1994. C'était un collègue à la gentillesse proverbiale et en pleine période de production. C'est une grande perte pour les mathématiques italiennes.

0 - Introduction

Nous allons nous intéresser à la géométrie *sur* une surface (pas *d'une* surface, voir plus bas les précisions sur cette importante distinction) et en même temps à la mécanique sur elle (V. Arnold, [2], 1978). Il y a pour cela au moins trois motivations. Première motivation: notre planète est, en première approximation, une surface et qui est assez bien décrite comme un ellipsoïde de révolution (voir plus bas). Il est donc important de comprendre quelle est la géométrie d'une telle surface; question typique: quel est le plus court chemin d'un point à un autre? C'est l'aspect *vivre* sur une surface.

Deuxième motivation: étudier le mouvement d'un point sur une surface (en l'absence de gravité) est pratiquement, après le mouvement d'un point sur une courbe, le problème mécanique le plus simple qui soit. Or les physiciens, qui s'intéressent en fait évidemment à des systèmes mécanique beaucoup plus complexes, ont besoin d'étudier des systèmes très simples parce que ces derniers leur fournissent de bons tests pour des hypothèses générales. Voici par exemple ce qu'écrivait Poincaré en 1905:

Dans mes Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste j'ai étudié les particularités des solutions du problème des trois corps et en particulier des solutions périodiques et asymptotiques. Il suffit de se reporter à ce que j'ai écrit à ce sujet pour comprendre l'extrême complexité du problème; à côté de la difficulté principale, de celle qui tient au fond même des choses, il y a une foule de difficultés secondaires qui viennent encore compliquer la tâche du chercheur. Il y aurait donc intérêt à étudier d'abord un problème où on rencontrerait cette difficulté principale, mais où

(*) Inst. Hautes Etudes Sci., 35 route de Chartres, 91440 Bures sur Yvette, France.
(**) Reçu le 23 Février 1995. Classification AMS 53 C 22.

on serait affranchi de toutes les difficultés secondaires. Ce problème est tout trouvé, c'est celui des lignes géodésiques d'une surface; c'est encore un problème de dynamique, de sorte que la difficulté principale subsiste; mais c'est le plus simple de tous les problèmes de dynamique; d'abord il n'y a que deux degrés de liberté, et puis si l'on prend une surface sans point singulier, on n'a rien de comparable avec la difficulté que l'on rencontre dans les problèmes de dynamique aux points où la vitesse est nulle; dans le problème des lignes géodésiques, en effet, la vitesse est constante et peut donc être regardée comme une des donnés de la question.

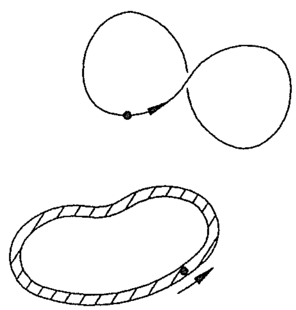
M. Hadamard l'a bien compris, et c'est ce qui l'a déterminé à étudier les lignes géodésiques des surfaces à courbure opposées; il a donné une solution complète du problème dans un mémoire du plus haut intérêt. Mais ce n'est pas aux géodésiques des surfaces à courbures opposées que les trajectoires du problème des trois corps sont comparables, c'est au contraire aux geodésiques des surfaces convexes.

Enfin la question générale la plus importante est: décrire le mouvement des particules sur une surface quand le temps devient très grand, c'est l'aspect *prédiction.*

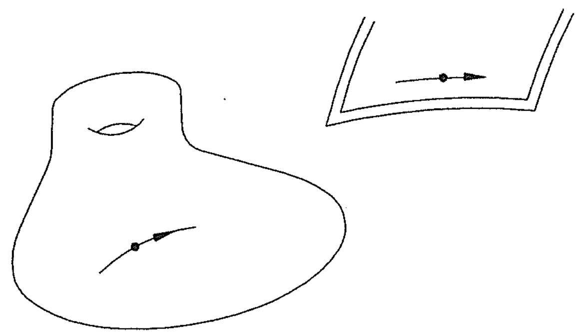
Dans le présent texte nous nous intéresserons essentiellement à l'aspect mécanique, dynamique, plutôt qu'à l'aspect *plus courts chemins*; mais ce dernier recèle encore aussi des problèmes délicats, pour lesquels on pourra par exemple consulter I. Chavel, [**14**] 1993.

Enfin nous nous sommes absolument restreints au cas des surfaces, c'est à dire, en réalité, au cas des variétés riemanniennes de dimension deux. Pour celles de dimensions plus grandes, les naturels et grands problèmes ouverts sont encore plus nombreux, voire irritants. Il n'existe pas, à notre connaissance, d'ouvrage de synthèse sur le sujet, ni d'article de synthèse. Le plus simple nous semble être de donner les quelques références récentes que voici, à partir desquelles le lecteur pourra, si on le désire, remonter en arrière comme il faut: (H. Rademacher, [**41**] 1994), (G. Besson, G. Courtois et al., [**8**] 1994).

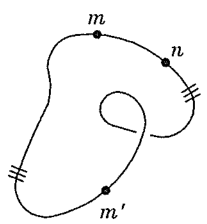
Pour terminer cette introduction, disons pourquoi le cas des surfaces est le premier à vraiment considérer. En effet le cas d'une courbe est simple et, pour ainsi dire, sans intérêt. Voyons pourquoi. Considérons dans l'espace ordinaire, une courbe fermée quelconque. Alors le plus court chemin d'un point à une autre consiste à parcourir la courbe entre ces deux points, et ce, sans revenir sur ses pas. Pour le mécanicien, les choses sont plus précises. Un point massique se déplacant sur la courbe (attaché de la façon que vous voudrez, par exemple vous pouvez penser à la courbe comme un tube très étroit à l'intérieur duquel une petit bille se déplace), *mais qui n'est soumis à aucune force extérieure, en particulier pas à une force de gravitation,* a une trajectoire qui est nécessairement à vitesse constante, à la condition bien sûr qu'il n'y ait pas de frottement. Ceci se démontre ainsi: la seule force à laquelle le point est réellement soumis est une force de réaction du petit tube, force qui est perpendiculaire à la courbe quand il n'y a ni frottement ni force extérieure. La loi fondamentale de la mécanique dit que l'accélération du point est donc perpendiculaire à la courbe. Or le calcul différentiel le plus simple dit que la partie de l'accélération qui n'est pas perpendiculaire à la trajectoire est la dérivée de la vitesse. La dérivée de la vitesse est donc nulle, c'est exactement dire que la vitesse est constante. Ainsi dans notre petit tube le mouvement de la masse est très simple: elle se promène sans arrêt dans le tube (sur la courbe) avec une vitesse constante. La prédiction est enfantine; par exemple elle repassera en un point donné à des temps t, $t + k$, $t + 2k$, $t + 3k$, ... où k dépend seulement de la longueur de la courbe et de la vitesse initiale. Remarquer les deux différences avec le problème du plus court chemin: ici on obtient le plus court chemin mais à condition de ne pas continuer trop longtemps et seulement le plus court chemin à vitesse constante. Plus précisément: deux points de la courbe sont joints par un plus court chemin bien déterminé si et seulement si leur distance est strictement inférieure à la demi-longueur de la courbe. Sinon ce sont deux points *antipodes*: il y a exactement deux choix pour aller de l'un à l'autre.



particule se déplacant sur une courbe



particule se déplacant sur une surface



un seul plus court chemin de m à n
deux plus courts chemins de m à m'

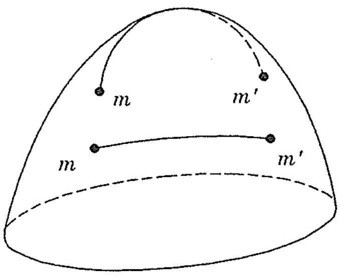
Note. Le mot juste serait *cinématique*, plutôt que *dynamique*. Cependant c'est le mot dynamique qui est maintenant toujours utilisé dans le cadre plus général de la théorie dite des *systèmes dynamiques*, c'est à dire la théorie qui étudie les ensembles où agit le groupe des entiers ou un groupe à un paramètre, le premier cas étant la version discrète du dernier, et finalement celui auquel on se ramène le plus souvent, même dans le cas d'un paramètre continu.

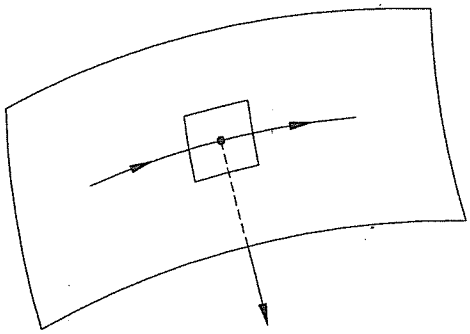
1 - Le flot géodésique sur une surface: des questions

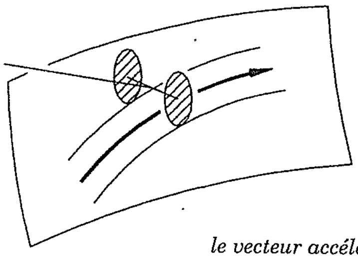
Ici donc maintenant la vie, les choses se passent sur une surface donnée de l'espace, ce peut être une belle sphère bien ronde, mais aussi bien un ellipsoïde de révolution ou beaucoup plus généralement une *pomme de terre* bien cabossée. Un cas mis à part par bien des auteurs est celui où la surface est convexe, c'est à dire toujours située d'une seul côté de ses plans tangents. On verra d'ailleurs que les choses n'en sont pas tellement plus simples pour autant.

C'est Jacob Bernouilli (I^{er}), le professeur d'Euler à Bâle, qui lui enseigna au début du 18ème siècle comment trouver le plus court chemin d'un point à un autre: il montra (ce qui n'est pas trop difficile dans le langage et avec les outils d'aujourd'hui) qu'une courbe joignant deux points p et q sur notre surface S ne peut être un plus court chemin que si, lorsqu'on la parcourt à vitesse constante, son accélération est toujours perpendiculaire à la surface. C'est, plus simplement, *aller droit devant soi*; ou encore, *fuir le plus vite quelqu'un qui nous poursuit*. On peut aussi dire: aller doit devant soi, c'est ne pas tourner, pas plus à droite qu'à gauche. Il s'agit d'une courbe *droite* sur la surface, qui n'a pas de courbure propre *sur* la surface (bien sûr notre courbe possède une courbure, mais dans l'espace, pas sur la surface). Ou encore: on reste toujours bien droit, entendez perpendiculaire à la surface, durant le mouvement. Car, si vous êtes poursuivis, et que vous tournez, votre poursuivant, s'il est assez malin pour aller tout droit, gagnera sur vous.

Et donc les plus courts chemins sont fournis par l'étude de la mécanique sur la surface. On peut imaginer, soit un point attaché convenablement (par tout moyen qui vous plaira) sur la surface, soit une toute petite bille circulant sans frottement aucun entre deux feuilles parallèles à la surface distances l'une de l'autre d'une épaisseur égale au diamètre de notre bille. *Bien réaliser que dans tout ce qui suit la bille a une masse mais qu'il n'y a pas de gravitation, qu'il n'y a aucune force extérieure s'exercant sur la bille autre que la réaction de la surface, réaction qui lui est perpendiculaire car il n'y a pas de frottement.*







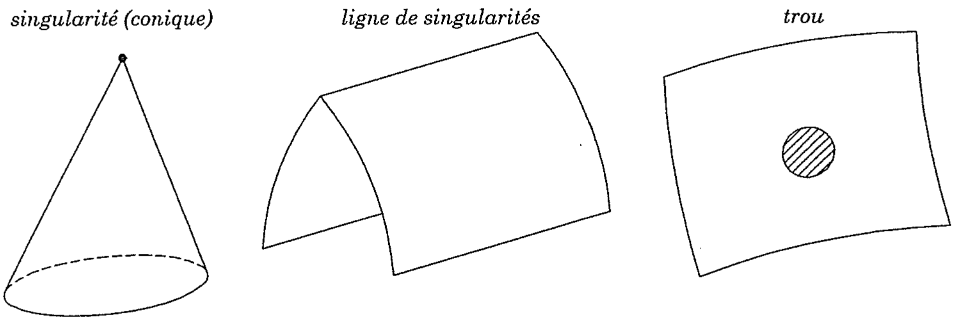
le vecteur accélération est toujours normal à la surface

Il s'agit donc de voir, notre surface étant donnée, s'il existe des courbes qui sont telles que leur accélération est constamment perpendiculaire à la surface; et, si oui, les décrire le mieux possible. Intuitivement nous en sommes bien sûrs: par exemple, dans un morceau où la surface est convexe, on tire au maximum un fil ou un caoutchouc entre deux points, ce qui réalise un plus court chemin. Physiquement: une bille lancée sur la surface aura une trajectoire bien déterminée si l'on connaît d'où l'on part et avec quelle vitesse (en grandeur et en direction). Le mot pour ces trajectoires est *géodésiques*. Mathématiquement on montre qu'il y en a une et une seule satisfaisant aux conditions précédentes, dites conditions initiales.

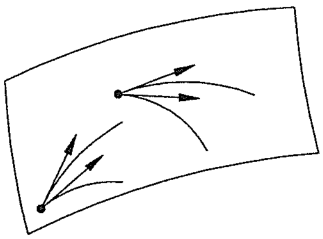
Une autre façon *pratique* de trouver ces courbes, ces chemins, c'est de faire rouler sur la surface in petit chariot rudimentaire, composé de deux roues égales, fixées rigidement sur un essieu. Les deux roues marqueront sur la surface deux courbes qui encadrent une courbe du type cherché, ceci de plus en plus près au fur et à mesure ques les roues sont plus petites. C'est une façon de forcer à aller tout droit.

N o t e. La condition de normalité à la surface de l'accélération entraîne que la vitesse (scalaire) est toujours constante sur une géodésique. *Désormais nous la normaliserons en la prenant constamment égale à* 1.

Dans toute cet article nous ne considérerons que des surfaces lisses et *fermées* c'est à dire sans trou, sans frontière et bornées, c'est à dire situées dans une région finie de l'espace (le jargon le plus courant est *compactes*).



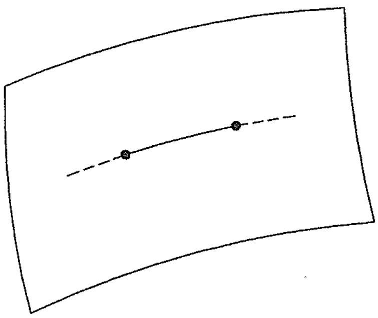
mauvaises surfaces, à rejeter



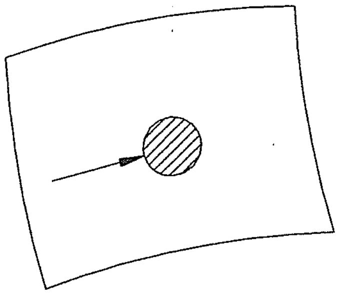
sur une bonne surface, il y a une géodésique et une seule de conditions initiales données

Alors il est facile de voir que la géométrie sur la surface est bonne, au moins en théorie et si on ne veut pas en savoir trop, c'est à dire localement: deux points quelconques sont toujours connectés par au moins un plus court chemin. Mais on voit bien que ce plus court chemin n'est pas toujours unique puisque la surface est fermée (bornée). Par contre, il l'est toujours si les deux points sont assez proches l'un de l'autre. Savoir complètement ce qui se passe est assez difficile, même pour un ellipsoïde de révolution. Cela a été assez bien compris depuis la fin du siècle dernier pour tous les ellipsoïdes (voir plus bas la contribution de Jacobi). Pour la sphère la situation est très spéciale: il y a toujours un unique plus court chemin excepté pour des points antipodes pour lesquels on peut partir dans n'importe quelle direction: on arrive toujours à l'antipode, et avec la même distance. Pour le lecteur curieux (ou qui sait que les mathématiciens sont friands de ce gendre de questions), mentionnons que ce n'est que dans les années 60 que Leon Green put démontrer une vieille conjecture de Blaschke dans les années 20, à savoir que cette propriété antipodale n'arrive que pour les sphères et donc pour aucune autre surface (A. L. Besse, [7] 1978 est la référence générale pour les variétés à géodésiques toutes périodiques). Voir une application à la fin du Section **6**.

Pour en revenir aux géodésiques c'est à dire à la mécanique sur la surface, pour un temps assez court une géodésique est un plus court chemin mais ensuite *elle n'est pas plus qu'une trajectoire*. C'est justement ce qui va nois intéresser: *que deviennent ces trajectoires, poursuivies indéfinitement*? Bien remarquer qu'une géodésique peut toujours être continuée indéfiniment parce que la surface est *fermée, elle n'a pas de bord:*

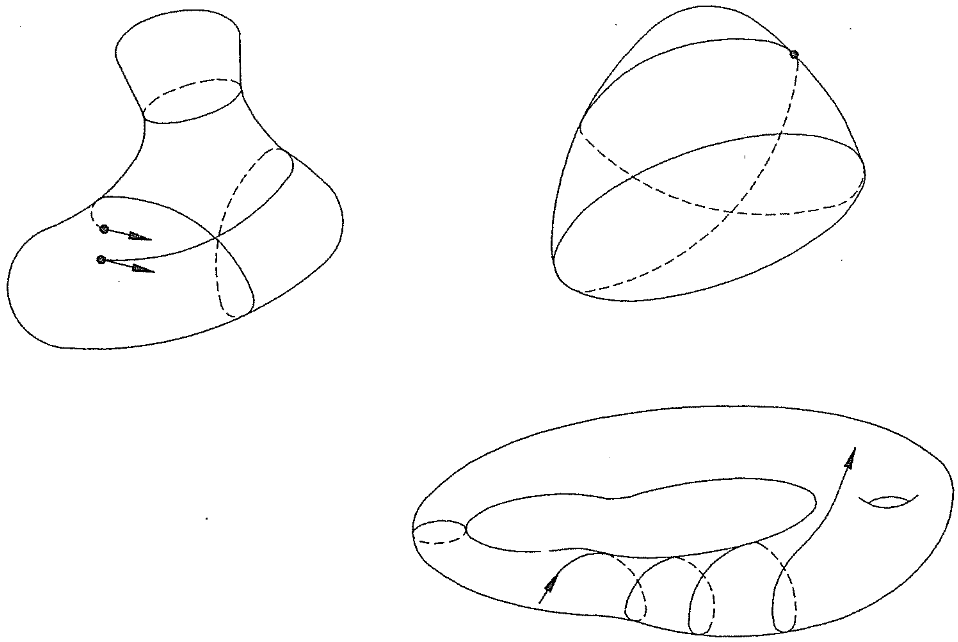


par deux points suffisamment voisins il y a un plus court chemin (porté par une géodésique)



si la surface avait un bord, une géodésique pourrait y être stoppée

Désormais nous nous intéressons seulement à la mécanique sur nos surfaces c'est à dire à décrire quelles sont les géodésiques, comment elles se répartissent, ce qu'elles deviennent quand le temps est grand.



géodésiques périodiques et géodésiques qui se perdent...

Mais on peut tout de suite déja dire qu'il y a une *dichotomie* capitale et absolument générale (qui provient de l'unicité d'une géodésique à point de départ et vitesse vectorielle donnée): ou, au bout d'un certain temps k, on revient au même point et avec la même vitesse vectorielle. Alors on repart sur la même courbe, puis au bout du temps $2k$ on revient au point de départ, etc. Une telle géodésique est dite *périodique*. Par exemple pour la sphère ronde, elles le sont toutes: ce sont les grands cercles. Pour une surface de révolution, toutes les méridiennes seront des géodésiques périodiques. Notre marcheur poura s'arrêter en fait au bout du temps k, il n'a plus rien à apprendre. Mais si au contraire il n'en est pas ainsi, c'est que la géodésique se *perd* en quelque sorte dans la surface: notre marcheur devra marcher indéfiniment pout connaître son avenir. Mais bien de questions se posent aussitôt: reste-t-elle confinée dans une partie stricte de la surface? comment se répartit-elle dans cette partie: y est-elle régulièrement distribuée? Ces questions sont fondamentales en physique, ce sont les questions de la *théorie ergodique*.

Et pour en revenir aux géodésiques périodiques, les questions qui viennent immédiatement à l'esprit sont: en existe-t-il? beaucoup? peut-on compter celles qui sont de longueurs données? leur ensemble est-il bien réparti dans la surface?

Le lecteur pourra avoir remarqué des analogies avec le problème du billard, et il n'aura pas tort, voir par exemple (S. Tabachnikov, [45] 1944), la synthèse assez dense (Y. Sinai, [43], Chapter 8, 1987) et le texte de vulgarisation (M. Berger, [5] 1991). En fait la question importante pour la physique n'est pas que les géodésiques noircissent toute la surface (ceci, c'est l'ergodicité dans l'espace des positions), c'est qu'elles noircissent l'espace de l'ensemble des directions tangentes aux différents points de la surface (c'est un espace de dimension 3, deux pour la surface et une pour l'angle de la direction, appelé espace des phases). Ceci est l'ergodicité en *phase.*

Par *noircissement,* nous avons popularisé, sur un écran d'ordinateur ou dans l'espace, le jargon mathématique de sous-ensemble *partout dense* dans un espace topologique donné.

Avant de dire ce que l'on sait actuellement sur ces questions (qui viennent de beaucoup progresser sur plusieurs points tout récemment) il convient de disposer d'un réservoir d'exemples (plus ou moins difficiles à construire) afin, entre autres, à la fois de ne pas croire à n'importe quoi; mais aussi de réaliser la difficulté du problème.

Quelques chose de très important pur terminer. nous ne pourrons pas, nous en seront forcés, en rester aux surfaces telles qu'elles figurent dans les descriptions précédentes. C'est normal en géométrie; comme dans l'échelle de Jacob (Genèse chapitre 28, verset 12) nous devrons nous élever vers le ciel. Nous serons obligés, pour bien comprendre ce qui se passe, d'introduire des surfaces abstraites. En langage moderne, ce sont les variétés différentielles de dimension égale à deux; si abstraites qu'elle soient, nous n'en considérerons encore que des compactes et orientables, par souci de place et de simplification et surtout parce que le cas non orientable ne présente aucune différence essentielle. Nous le ferons en deux temps, dans la Section 2 pour les tores, dans la Section 4.***B*** pour les surfaces de genre supérieur, c'est à dire *à plusieurs trous.*

2 - Des exemples pour sentir la difficulté du problème

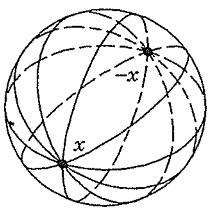
A. Les sphères

Un premier résusltat suprenant est le phénomène dit *des surfaces de Zoll.* Le fait que les géodésiques d'une sphère (ronde) soit toute périodiques n'est pas caractéristique de la sphère. C'ext une histoire commencée par Darboux dans la deuxième moitié du 19^{eme} siècle. Darboux essaya, avec seulement un succès partiel, de trouver des surfaces de révolution dont toutes les géodésiques soient périodiques. Mais Zoll réussit en 1903 à en construire (et même des non convexes, ce qui n'est pas très intuitif), et donc montre la difficulté du problème. Nous reviendrons très bientôt sur ces surfaces.

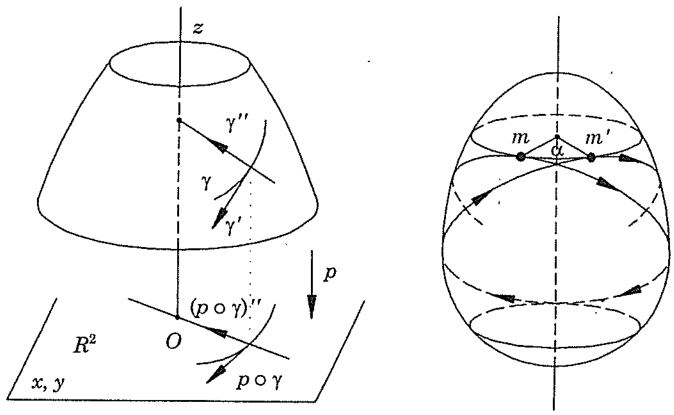
Il est naturel de porter son attention sur les surfaces de révolution, car ce sont pratiquement les seules où le calcul soit facile.

B. Les surfaces de révolution et le contre-exemple de Weinstein

Nous allons donc d'abord décrire le comportement des géodésiques sur les surfaces de révolution. Ce sera utile pour plus d'une raison dans la suite, pas seulement pour le problème de Darboux. C'est quelque chose que Clairaut avait découvert dès la première moitié du $18^{\text{ème}}$ siècle. L'idée est de projeter la surface sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution. Que deviennent les géodésiques? Puisque leur accélération est normale à la surface et que la normale à une surface de révolution rencontre toujours son axe notre courbe projetée sera une courbe plane dont l'accélération passe constamment par le centre de ce plan. Ces courbes sont dites en mécanique *à accélération centrale*. Le modèle le plus célèbre est celui du mouvement d'une seule planète autour du soleil: toute les trajectoires sont des coniques ayant le centre pour foyer. Un autre cas familier aux physiciens est celui de l'oscillateur harmonique (le point est attiré par une force proportionnelle à sa distance au centre): ici encore toutes les trajectoires sont des ellipses. Ce cas représente d'ailleurs exactement le cas des projections planes des grands cercles de la sphère.



ce qui se passe sur une sphére



ce qui se passe sur une surface de révolution: m' se déduit de m par une rotation d'angle α

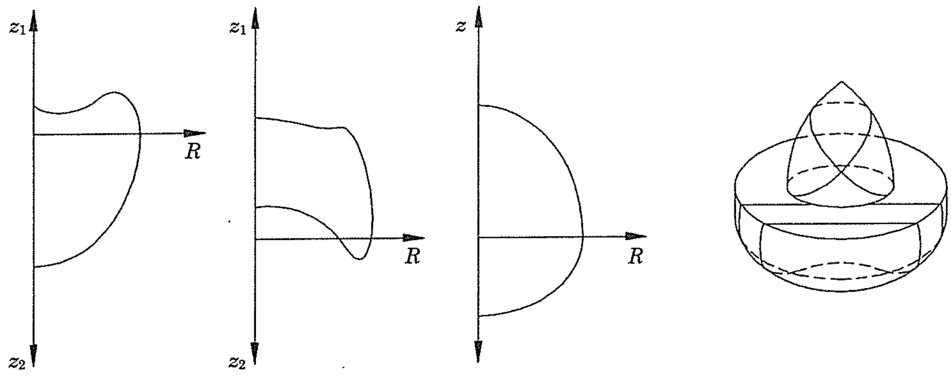
En général ce qui arrivera toujours c'est que toutes ces courbes oscilleront constamment entre deux cercles (fixes pour une géodésique donnée mais qui changeront quand on change les conditions initiales) correspondant à des niveaux d'énergie donnée. Là-haut, sur la surface considérée (que l'on a prise convexe pour simplifier ce qui se passe), on obtiendra des courbes qui oscilleront entre les deux parallèles de la surface qui se projettent sur le cercle intérieur et croisent l'équateur entre les deux passages sur ces paralléles. L'équateur se projette sur le cercle extérieur.

Ceci permet de bien décrire le comportement des géodésiques sur les surfaces de révolution (mettons convexes, toujours pour simplifier mais ce n'est pas absolument essentiel). Puisqu'il y a révolution on voit qu'une géodésique donnée, partant du paralléle supérieur (sous-entendu en lui étant tangent, c'est à dire à vitesse initiale horizontale) y reviendra au bout d'un certain temps k, mais en un point qui en général a tourné d'un angle α par rapport au point initial. Comme dans le billiard rectangulaire, il y a une *dichotomie* parfaite. Deux cas et deux seulement sont possibles. Dans le premier α est un multiple rationnel de π: $\alpha = \frac{p}{q}\pi$ avec p et q nombres entiers. Alors on bout du temps qk on reviendra aux mêmes conditions initiales, et donc la géodésique sera périodique. Si α n'est pas un multiple rationnel de π, donc un multiple irrationnel de π, alors la géodésique continuera sans arrêt à osciller dans le zone de la surface comprise entre les deux parallèles. Comme dans le cas du billiard rectangulaire, il est facile de voir qu'elle noircit (est partout dense dans) toute la zone et ceci de façon régulière, bien distribuée. On dit qu'il y a ergodicité (en espace, pas en phase); mais seulement dans cette zone. De plus il s'agit d'ergodicité en un sens faible, voir plus bas a Section **5.*A*** le vocabulaire plus précis de la théorie ergodique.

L'étude précédente donne en outre une façon (en faisant varier la paire de parallèles) de construire une infinité de géodésiques périodiques. Ce qui répond, dans le cas *général*, à l'une de nos questions. Il peut y avoir des exceptions, l'une est décrite plus bas.

Pour en revenir à la question de Darboux, les géodésiques seront toutes périodiques si la méridienne de la surface à la propriété spéciale que, de quelque parallèle supérieur que l'on parte, on revient au même point après exactement un seul aller et retour *haut-bas-haut*, c'est à dire si $\alpha = 0$ (plutôt on a fait une rotation complète autour de l'axe). Darboux réussit à trouver des morceaux de méridienne, mais il ne savait pas les raccorder. Malgré les efforts de plusieurs géomètres dans la fin du 19$^{\text{eme}}$ siècle, ce n'est qu'en 1903 seulement qu'un élève de Hilbert, Zoll, réussit à obtenir une surface fermée complète. On peut même en trouver des analytiques réelles, et mieux encore, non convexes, ce qui est contraire à une première intuition; voir les figures ci-dessous et, plus généralement, tout le chapitre de A. L. Besse [7], qui est consacré à ce seul sujet.

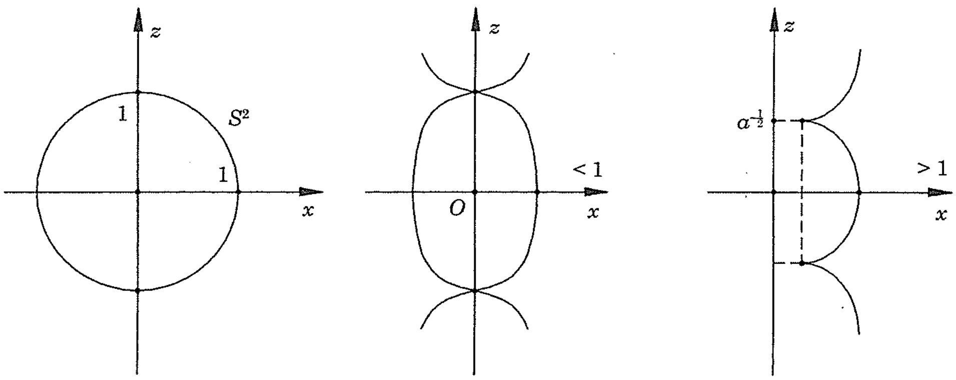
Une surface de Zoll avec un partie concave



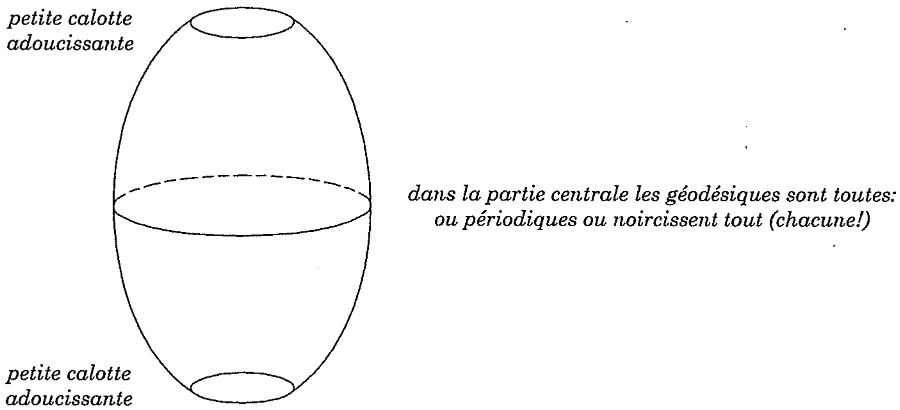
En fait à l'heure actuelle on ne connait pas toutes les surfaces qui ont cette propriété: en jargon, on appelle cela un problème de *classification*, problèmes dont les mathématiciens sont aussi très friands. Bien entendu on ne considère pas comme différentes deux surfaces qui sont déduites par une déplacement (ou une transformation miroir) de l'espace. Mais, depuis Guillemin en 1976, on connaît plein d'autres surfaces à géodésiques toutes périodiques et qui ne sont pas de révolution (elles peuvent même n'avoir aucune symétrie). Mieux: le travail (très difficile) de Guillemin classe toutes celles qui ne sont pas trop bosselées, c'est à dire assez voisines d'une sphère ronde. Encore une fois, la référence de base est A. L. Besse, [7] 1978 et là plus récente à notre connaissance est D. Gromoll and K. Grove, [22] 1981.

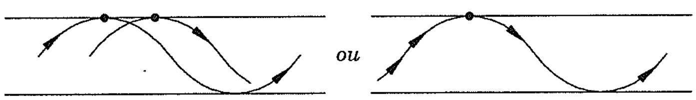
Construisons maintenant avec Weinstein des *méchantes surfaces*. Il va s'agir d'infirmer une conjecture qui disait que, non seulement il y a toujours beaucoup de géodésiques périodiques sur une surface, mais mieux encore qu'elles noircissent toutes les directions tangentes la surface (ergodicité en phase). Rappelons ce que veut dire noircir en toute rigueur: cela veut dire que toute direction, en un point quelconque de la surface, pourra être approchée d'aussi près que l'on veut par un vecteur vitesse convenable de la géodésique considérée (il faudra peut-être attendre très longtemps pour cela!). C'est Weinstein qui fut le premier en 1970 à remarquer qu'il est facile construire de telles méchantes surfaces, c'est à dire violant cette conjecture. La chose est en fait très simple.

Si l'on recherche une surface de révolution qui soit à courbure constante (égale à 1 pour normaliser), donc en fait ayant partout localement la même géométrie que la sphère unité, on tombe sur une équation différentielle ordinaire pour l'équation de la méridienne. Elle a des solutions qui dépendent d'un paramètre et fournissent donc les surfaces cherchées. Les méridiennes correspondantes sont dessinées ci-dessous.



Ce sont ou des fuseaux ou des bourrelets: dans les deux cas on doit ôter les points singuliers. Prenons maintenant un tel bourrelet et adoucissons-le aux deux bouts. On obtient ainsi une surface de révolution lisse, composée de trois parties: les deux adoucissements (notez qu'ils peuvent être aussi petits que l'on veut) et la partie centrale, qui donc sera, si l'on veut, presque toute la surface. Quel est le comportement d'une géodésique qui part horizontalement d'un parallèle situé dans la partie centrale?



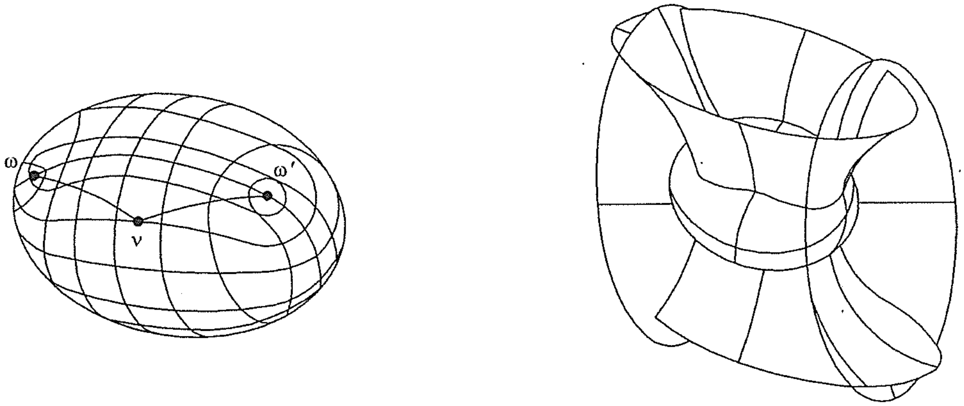


C'est ici qu'est toute la beauté de la construction de Weinstein: notre partie centrale a partout localement la géométrie de la sphère de rayon 1, mais son équateur a une longueur différente, précisément égale à $2\pi D$, si l'on a noté D la distance de cet équateur à l'axe de révolution. Ceci implique donc que notre géodésique va revenir horizontal et sur son parallèle de départ en ayant tourné de $2\pi D$ (et non pas de 2π exactement comme sur la sphère de rayon 1). Et, encore une fois, deux cas se présentent. Le premier est celui où il existe deux entiers p et q tels que $D = \frac{p}{q}$. Alors *toutes* les géodésiques considérées, non seulement restent dans la partie centrale mais sont toutes périodiques (et de longueur commune égale à $2q\pi$). Si au contraire, et c'est la méchanceté que nous avons en vue, D est un nombre irrationnel, alors aucune des géodésiques partant dans la partie centrale avec une direction horizontale ne sera périodique. C'est exactement dire que les géodésiques périodiques (et ici il y en a plein, ce sont entre autres les méridiennes) ne pourront jamais donner des directions tangentes dans un grand nombre de phases de cette partie centrale. Mieux, cette partie centrale peut-être rendue d'aire aussi voisine que l'on veut de l'aire totale de la surface, puisque les deux adoucissements ci-dessus peuvent être très, très petits.

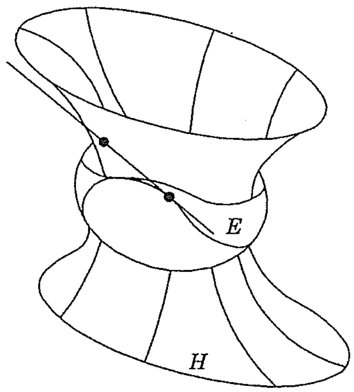
C. Les ellipsoïdes à trois axes

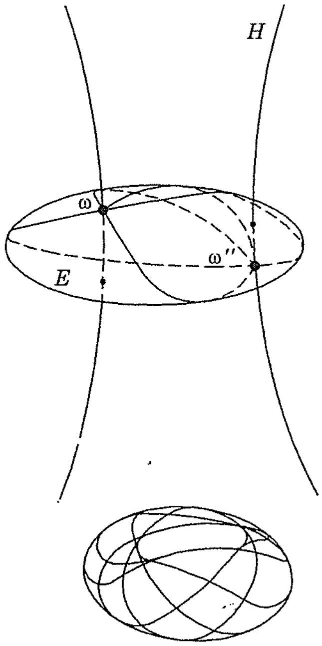
Et si nous revenions à notre brave planète? C'est à dire à la recherche des plus courts chemins sur un ellipsoïde révolution. Etude qui nécessite d'abord la découverte des géodésiques. Puisqu'il s'agit d'une surface de révolution, l'étude *globale* est faite. Mais si l'on veut des calculs *exacts* alors on voit intervenir les fonctions elliptiques. C'est à Gauss que l'on doit une étude complète. Celle-ci permet de donner les formules exactes pour construire les cartes géographiques. Rappelons que les plus utilisées *sur la planète* ne sont pas celles de la projection Lambert chère aux français mais les projections de Mercator *transverses universelles* (cartes MTU), que Gauss maniait déja! Le lecteur curieux désirera savoir ce qu'il en est du problème de l'unicité du plus court chemin: il a été résolu (voir plus bàs dans quel cadre plus général) mais même pour les ellipsoïdes de révolution l'étude rigoureuse reste si délicate qu'elle ne figure actuellement à notre connaissance dans aucun livre! Voir cependant la référence à von Mangoldt, page 311 de W. Klingenberg, [32] 1982.

Ici arrive un petit miracle au cours d'une curieuse histoire. Au milieu du $19^{\text{ème}}$ siècle le mathématicien Weierstrass se posa la question de trouver les géodésiques sur un ellipsoïde non de révolution, c'est à dire dont les troix axes sont inégaux. Sa motivation était celle de la forme de la terre. Des mesures avaient montré que l'hypothèse de l'ellipsoïde de révolution ne coïncidait pas avex l'expérience. Certains émirent donc l'hypothèse d'un ellipsoïde à trois axes inégaux.



ω, ω′, ω″ *sont des ombilics*



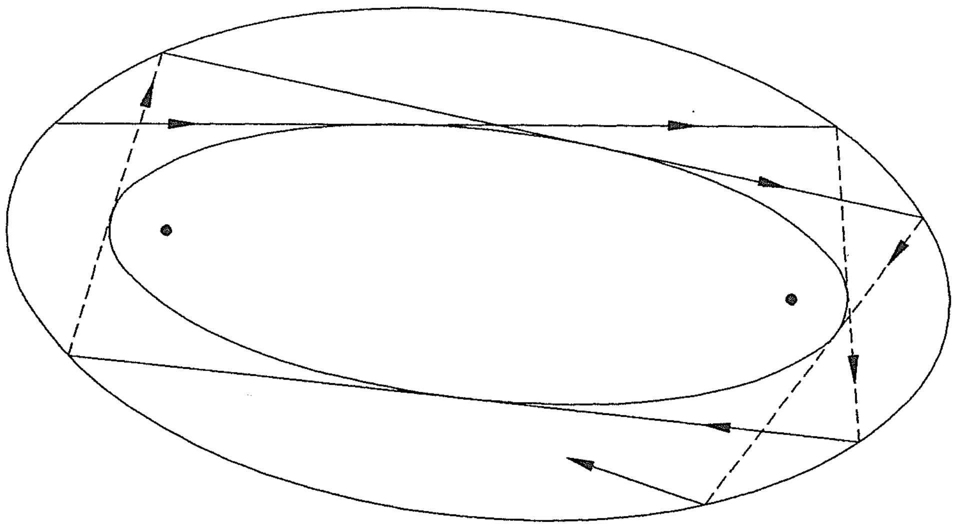


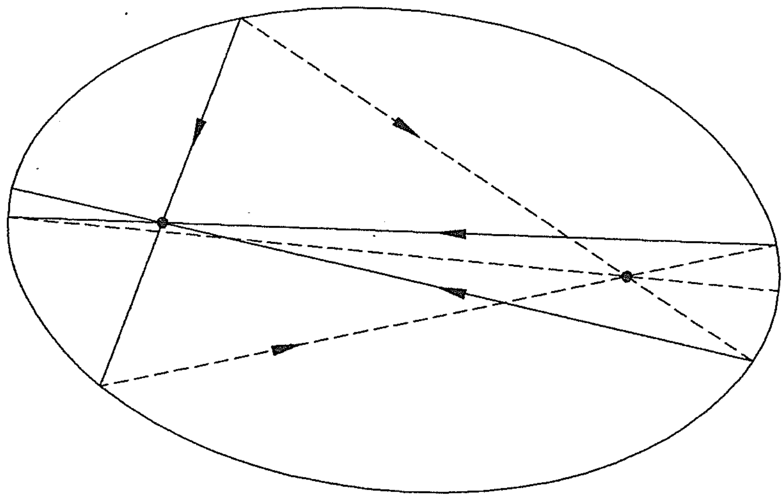
En fait on sait maintenant que la bonne hypothèse est celle d'un ellipsoïde de révolution mais à changer près des pôles en l'aplatissant un peu là-bas.

C'est Jacobi en 1839 qui réussit le premier à trouver ces géodésiques. Un petit peu comme les surfaces de révolution elles se répartissent en des *bandes* (pour le technicien de la mécanique ceci provient dans les deux cas de l'existence d'une *intégrale première*, c'est à dire d'une fonction constant, dans l'espace des phases, sur le flot qu'y déterminent les géodésiques). Dans le cas des surfaces de révolution ces bandes étaient celles déterminées par les paires de parallèles situés à la même distance de l'axe de révolution. Ici ce sont les paires de lignes que découpent sur notre ellipsoïde les quadriques qui lui sont homofocales. Ces quadriques homofocales jouent un rôle très important dans plusieurs problèmes d'analyse, de dynamique, de géométrie et les lient entre eux. Entre autres parce qu'elles donnent un système de coordonnées dans lequel l'opérateur différentiel fondamental, celui de Laplace-Beltrami, se décompose.

Rappelons cette construction. On part d'un ellipsoïde quelconque $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ et on l'enveloppe, pour ainsi dire, avec la famille de quadriques à un paramètre λ définies par l'équation $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1$. On suppose ici que $a > b > c$. Selon celui des intervalles $]-c^2;\ \infty[$, $]-b^2;\ -c^2[$, $]-a^2;\ -b^2[$ où se trouve λ la quadrique est: un ellipsoide, un hyperboloïde à une nappe, un hyperboloïde à deux nappes. En chaque point de l'espace il passe en général trois de ces quadriques, une de chaque type et leurs trois plans tangents sont perpendiculaires deux à deux. Leurs courbes d'intersection sont, sur chacune d'entre elles, des lignes dites *de courbure*, qui jouent un rôle important en théorie des surfaces (mais en tant que situées dans l'espace; ce ne sont pratiquement jamais des géodésiques). Enfin les géodésiques de notre ellipsoïde ont la propriété que les droites de l'espace qui leur sont tangentes restent constamment tangentes aussi à l'une (fixe) de ces quadriques homofocales. Il y a, sur l'ellipsoïde, quatre points très importants, ses *ombilics*. Ce sont les quatre points d'intersection de l'ellipsoïde avec la quadrique homofocale *dégénérée* constituée par l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2-c^2} = 1$ située dans le plan $y = 0$ des z et des x. Toute géodésiques issue d'un ombilic repasse, au bout d'un temps toujours le même, en l'ombilic *antipode*. Mais, attention, contrairement au cas de la sphère, quand on itère cette opération, on revient certes au même ombilic, mais en général pas avec la même direction! Pour le lecteur curieux de géométrie élémentaire sur les surfaces, les lignes de courbure précédentes peuvent être obtenues comme lieux des points qui sont à une somme constante de distances à deux ombilics.

Note. Depuis Birkhoff, certains aiment à visualiser les géodésiques sur un ellipsoïde à trois axes comme les trajectoires de billard dans une ellipse. Celles-ci enveloppent des ellipses homofocales ou des hyperboles (toujours homofocales), le cas particulier des ombilics correspondant aux trajectoires passant par les deux foyers. Nous laissons au lecteur la joie de découvrir ce qui se passe





pour ces dernières. Faire attention à ce que, en réalité, il s'agit d'une ellipse pleine à *double face*, à chaque réflexion on change de face. Ceci correspond, sur l'ellipsoïde, à passer du demi-ellipsoïde supérieur à l'inférieur.

Le dernier exemple que nous allons donner est dû à Morse en 1934 et montre bien la difficulté de l'étude, de la recherche, des géodésiques périodiques (et donc du comportement des géodésiques en toute généralité). Il s'agit pourtant de surfaces bien simples, des ellipsoïdes. Dans ce que nous avons dit ci-dessus des géodésiques de ces ellipsoïdes nous avons omis le cas trivial, celui des trois géodésiques *de base* c'est à dire celles constituées par les intersections de l'ellipsoïde avec les trois plans de coordonnées. Ce sont des géodésiques puisque leur accélération est toujours normale à la surface.

Morse a montré que, quel que soit le nombre L (pensez un très grand nombre) on pouvait trouver des ellipsoïdes, dont les troix axes sont inégaux mais de longueurs de plus en plus voisines de l'unité, et qui sont tels que leurs géodésiques périodiques soient: soit les trois géodésiques de base (et leurs recouvrements itérés bien sûr, voir le tout début de la Section 4) soit ont nécessairement une longueur au moins égale à L, c'est à dire sont extrêmement longues: il faut en d'autres termes, excepté toujours les trois géodésiques de base, *tourner* sur un tel ellipsoïde un énorme nombre de fois avant de revenire au point de départ et avec la même direction.

En utilisant la description donnée plus haut des géodésiques d'un l'ellipsoïde comme oscillant entre deux lignes de courbure symétrique, on peut deviner assez facilement le résultat de Morse. Pour une démonstration complète dans un ouvrage récent, voir le Lemme 3.4.7 de W. Klingenberg ([32] 1982).

D. Les tores plats

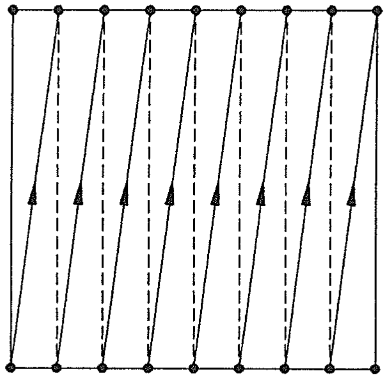
Toutes les surfaces que nous avons considérées jusqu'ici étaient visible, définies en fait dans notres espace ordinaire à trois dimensions. On peut certes y voir des tores, comme dans la figure ci-dessous, les *meilleurs* étant — croyons le pour l'instant — les tores de révolution, c'est à dire engendrés par les rotations autour d'un axe d'un cercle situé dans un plan passant par cet axe, mais n'ayant pas intersection avec l'axe.

Nous laissons le lecteur étudier lui-même le comportement complet des géodésiques d'un tore de révolution, les classer en différents types. La seule référence que nous connaissions à ce sujet est Bliss, [9] 1902-1903.

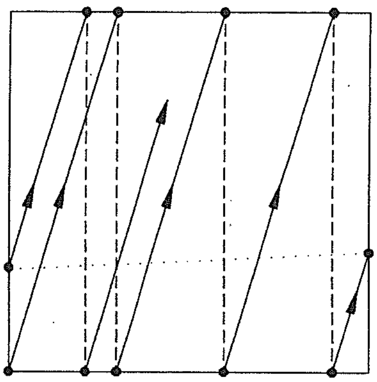
Mais il y a des tores, toujours géométriques, mais abstraits, sur lesquels le comportement des géodésiques est presqu'aussi simple que sur la sphère, ce sont *les tores plats* (plat signifie ayant partout localement la même géométrie que l'espace euclidien, on encore sans courbure). On les construit ainsi: on sait que, topologiquement, on obtient un tore en identifiant les côtés opposés d'un carré. Dans cette identification, les angles aux sommets valant $\frac{\pi}{2}$, on n'introduit pas de singularité et donc la structure (localement) euclidienne du carré se prolonge à cette surface torique. Bien sûr, on ne peut jamais la réaliser comme celle d'un tore de l'espace; parce qu'un telle tore aura toujours des points à courbure strictement positive, comme on le voit en prenant un point fixe assez loin du tore puis en examinant le point de contact avec la plus petite sphère qui contient le tore et centrée en ce point.

Plus abstraitement encore, c'est encore plus simple: on considère l'ensemble quotient de l'espace euclidien par le réseau des translations à coordonnées entières. Les translations respectant la structure euclidienne, celle-ci passe donc au quotient. Bien faire attention que le tore plat quotient a une géométrie qui dépend du réseau choisi, cette géométrie n'est pas en général isométrique à celle du tore *carré*. Mais le comportement des géodésiques, lui, reste le même.

Voici ce qu'est le comportement des géodésiques; si leur pente est un nombre réel rationnel, elles sont périodiques. Noter qu'elles arrivent par *bandes* à une paramètre. Sinon cette géodésique est partout dense; de plus elle est bien également répartie, comme on sait que le sont sur le cercles les points obtenus par les itérées d'une rotation d'un angle non commensurable avec π.



pente $= 8$



pente irrationnelle

Autrement dit il y a pour le comportement des géodésiques une dichotomie parfaite. On a vu ci-dessus que ce n'est pas le cas général; mais cela pourra-t-il arriver encore pour d'autres surfaces?

Dans la suite nous ne considérerons, par souci de simplification, que des surfaces abstraites qui soient compactes et orientables.

Le théorème fondamental de la classification des surfaces dit alors que les seuls types possibles sont la sphère, le tore et les surfaces de genre supérieur (à plusieurs trous). Ce théorème, d'énoncé pourtant bien simple et naturel, reste difficile, même aujourd'hui, à démontrer complètement. Très peu de livres modernes le démontrent complètement. Citons, à notre connaissance, S. Massey ([36] 1991) et J. Stillwell ([44] 1980). Encore ces deux ouvrages admettent-ils l'existence d'une triangulation pour toute surface. Cette existence, incroyablement intuitive, est très délicate à mettere en oeuvre en pratique, voir I. Ahlfors and L. Sario, [1] 1960.

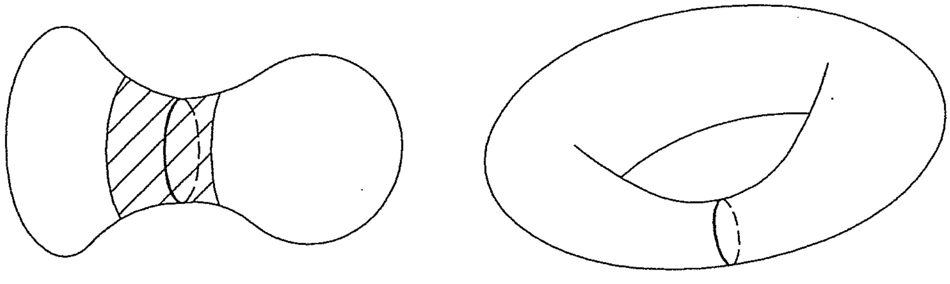
3 - Existence d'une trajectoire périodique

A. Le tore et les surfaces de genre supérieur

Si notre surface présente des trous, au moins un, il suffit de l'entourer par une courbe comme sur la figure. Ensuite on prend, parmi toutes les courbes de même nature topologique (c'est à dire celles obtenables par déformation continue), la plus petite. Elle ne peut pas se réduire à un point, sinon c'est qu'il n'y aurait pas vraiment de trou. Montrer que le minimum des longueurs dans cette famille est vraiment atteint est facile. Particulièrement si l'on utilise la méthode des polygones géodésiques de Birkhoff (décrite plus bas), afin de se réduire à des espaces de dimension finie. Physiquement on peut penser à un caoutchouc (suffisamment petit au départ).

B. La sphère, le résultat de Birkhoff

Mais si notre surface n'a aucun trou (ce qui veut dire que c'est une surface ayant la forme de la sphère (gauchie, bosselée peut-être certes, mais en jargon *ayant la même topologie que la sphère*) comment pouvons nous trouver encore un géodésique périodique?



si "taille" *si trou*

prendre la plus petite courbe

Sur une surface, sans trou, mais ayant en gros la forme de celle ci-dessus (c'est à dire possédant une *taille*) on trouve une géodésique périodique en prenant la plus petite courbe fermée *dans la taille*. Pratiquement on peut la trouver avec un caoutchouc suffisamment petit au départ. L'existence mathématique rigoureuse est alors la même que dans le cas des surfaces à trous.

Mais si maintenant notre surface n'a pas de ceinture, typiquement si elle est convexe et si l'on ne sait rien de plus sur elle, la méthode du caoutchouc ne marchera pas: il va se rétracter de plus en plus, mettons en un point (puis *quittera la surface*). Voici donc les mathématiciens devant le problème fondamental: trouver sur une surface du type de la sphère (typiquement une surface convexe) au moins une géodésique périodique. Les exemples ci-dessus semblent montrer que c'est toujours intuitif, même pour une infinité.

Pourquoi, outre une motivation esthétique bien naturelle, attracher une telle importance aux géodésiques périodiques? D'abord parce ce sont, pour le physicien, les états stationnaires du mouvement, ils donnent en quelque sorte les niveaux d'énergie. Qui n'aime pas une certaine stabilité? Mais nous pouvons aussi citer ici Hadamard dans [**24**] 1898, parlant de Poincaré et du cas de la courbure négative:

En second lieu, l'importance que ce géomètre a reconnu aux solutions périodiques, dans son Traité de Mécanique Céleste, *s'est manifestée également dans la question actuelle. Ici encore, elles se sont montrées «la seule brèche par laquelle nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable».*

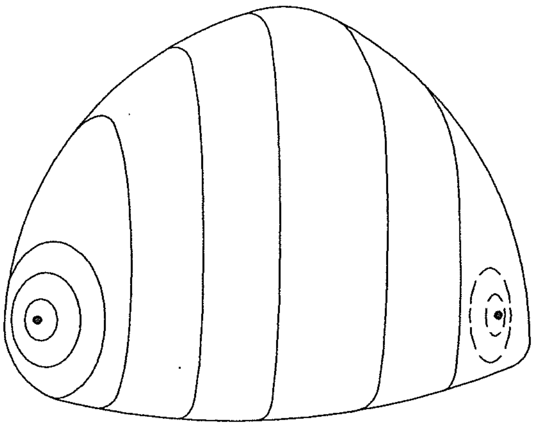
D'une façon plus précise, elles ont joué pour nous le rôle d'une sorte de système de coordonnées auquel nous avons rapporté toutes les autres géodésique.

Poincaré aborda cette question dans son article de 1905 cité plus haut. Mais il ne put, quelque fut son désir, que trouver des méthodes d'attaque (pas moins que trois d'ailleurs), sans pouvoir les *faire marcher* rigoureusement.

Notez ce petit paradoxe: les sphères rondes ont le comportement le plus simple pour leurs géodésiques. Pour toute surface topologiquement différente, le comportement est toujours plus ou moins compliqué. En échange nous avons vu que l'existence de géodésiques périodiques y est enfantin.

Pour en revenir à l'existence d'au moins une géodésique périodique sur une surface dont la topologie est celle de la sphère, c'est Birkhoff en 1917 qui fut le premier à établir rigoureusement cette existence. Et voici sa méthode; nous en expliquons en détail les points principaux car ils sont à la base de la majeure partie des développements ultérieurs de la recherche des géodésiques périodiques (d'ailleurs ceci dans le cadre très général des variétés riemanniennes compactes de dimension quelconque). Dans tout ce qui suit la surface considérée a le type topologique de la sphère, c'est à dire qu'elle est sans trou.

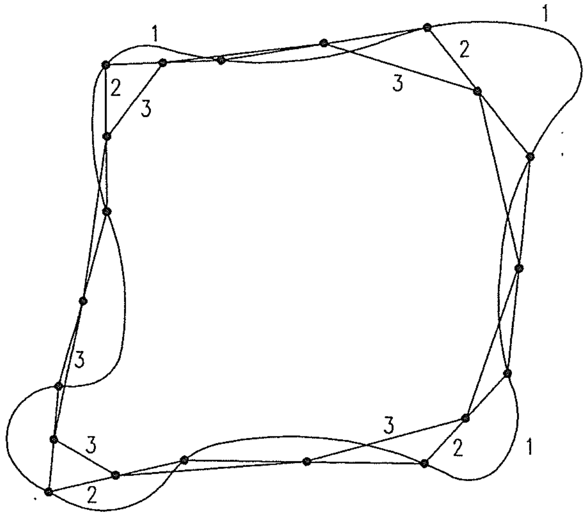
Première idée: *tapisser continûment* la surface par une famille de courbes allant d'une courbe réduite à un point m à une courbe réduite à un point m' (qui peut-être le même que m d'ailleurs). Le tout est que toute la surface soit recouverte. Dans chaque tel tapissage il y a une courbe de plus grande longueur. Maintenant l'idée fondamentale est que, lorsque l'on considère tous les tapissages possibles, il existe au moins un tapissage pour lequel la courbe de longueur maximum est de longueur minimum dans l'ensemble de ces tapissages. En quelque sorte c'est un tapissage le plus économique, le plus efficace, le meilleur possible. Cette technique, quand elle réussit, est appelée *le principe du minimax.* Car il est alors assez évident que la courbe la plus longue d'un tel tapissage optimal sera une géodésique périodique.



tapisser completement la surface

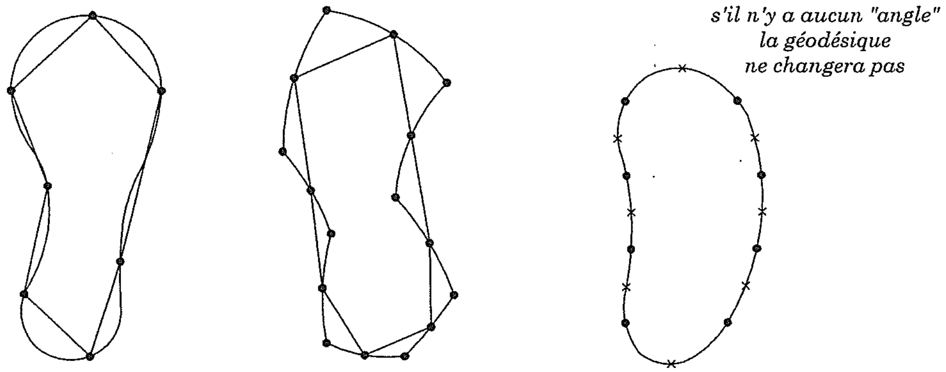
Si ce n'est pas évident pour vous, ce va le devenir lorsque nous allons montrer maintenant comment obtenir une tel tapissage optimal. La théorie complète est délicate, en effet l'ensemble des tapissages de la surface est un *immense* ensemble (en jargon: de dimension infinie, comme tout espace fonctionnel) et y trouver des minima est beaucoup plus délicat que dans les espaces de dimension finie. Il faut toujours des techniques d'analyse fine. Nous vous dispensons de ces subtilités et donnons la deuxième idée de Birkhoff, qui consiste à fabriquer, à partir d'un tapissage quelconque, un deuxième tapissage dont toutes les courbes soient strictement de longueur plus petite à la seule exception de courbes qui sont des géodésiques périodiques (s'il en existe). Si l'on admet l'existence d'un tapissage *minimum*, alors celui-ci devra nécessairement contenir une géodésique périodique, car sinon, en lui appliquant la transformation de Birkhoff, on pourrait en déduire un tapissage dont toutes les courbes auraient des longueurs strictement plus petites, ce ne serait donc pas un tapissage *minimax*.

Le procédé découvert par Birkhoff est très élégant et tout simple. Regardons-le d'abord fonctionner dans le cas des courbes planes ordinaires, c'est plus simple que sur les surfaces. On se fixe une fois pour toutes un entier N et on découpe la courbe plane en N morceaux de longueurs égales. On remplace chacun de ces morceaux, par le segment de droite qui joint ses extrémités. On fait encore un pas de plus (à cause du cas des surfaces, dans le plan ce n'est pas strictement nécessaire): on remplace le polygone ainsi obtenu par le polygone dont les sommets sont les milieux du polygone précédent. Chacune de ces opérations diminue toujours strictement la longueur.

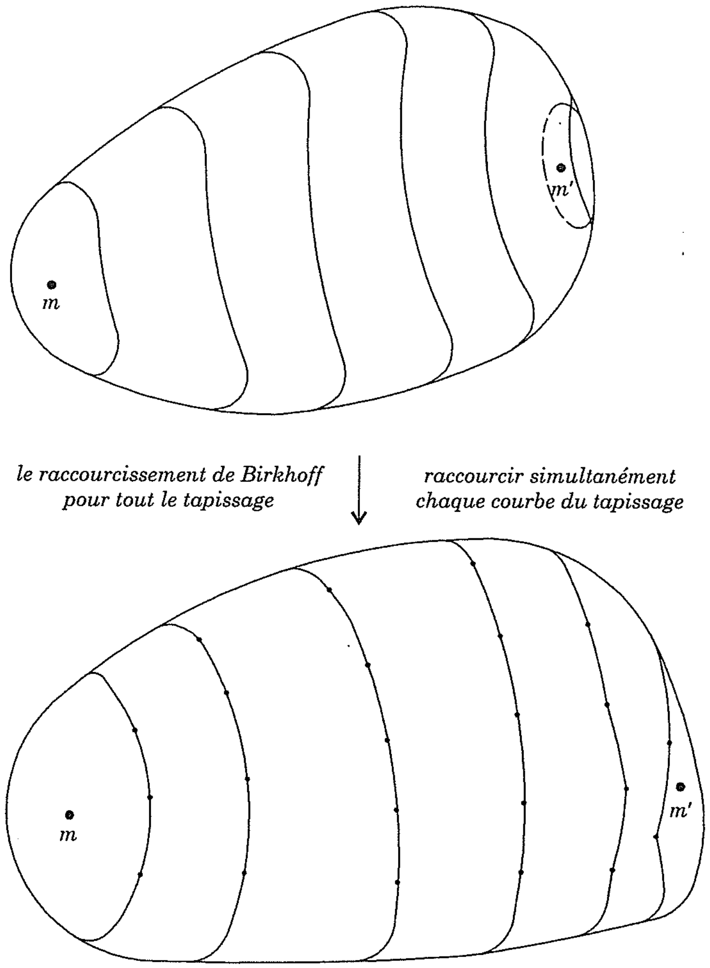


dans un plan ordinaire

Peut-on faire cela sur une surface? Nous rencontrons ici le problème du plus court chemin entre deux points: il faut qu'il soit bien défini. Sur une surface ayant, par exemple une *taille* très petite il faut prendre des points très voisins. Mais, la surface étant donnée une fois pour toutes et compacte, il existe une plus petite longueur strictement positive I, telle que toute paire de points dont la distance est inférieure à I soient joints par un unique morceau de géodésique de longueur égale à leur distance. Prenons maintenant une courbe quelconque de la surface, découpons-la en N morceaux de longueurs toutes inférieures à I. Remplaçons ces morceaux par les plus courts chemins les joignant (qui sont bien définis); c'est le premier pas suivi dans le plan. Remarquons que si la courbe considérée est un polygone géodésique et si les points de division en sont justement les sommets, cette opération conserve ce polygone et donc ne diminue pas strictement sa longueur. Maintenant la deuxième opération consiste à prendre les milieux du polygone obtenu après le premier pas et à joindre ces milieux par les plus courts chemins les joignant. Cette fois-ci (il faut utiliser le fait, simple, que dans la géométrie d'une surface, un triangle vrai a toujours ses côtés strictement inférieurs à la somme des deux autres) le nouveau polygone aura une longueur strictement plus petite que la courbe initiale *à moins que tous les angles aux sommets de ce polygone géodésique ne soient égaux à* π. Or ceci arrive exactement pour une géodésique périodique et seulement pour une telle géodésique!

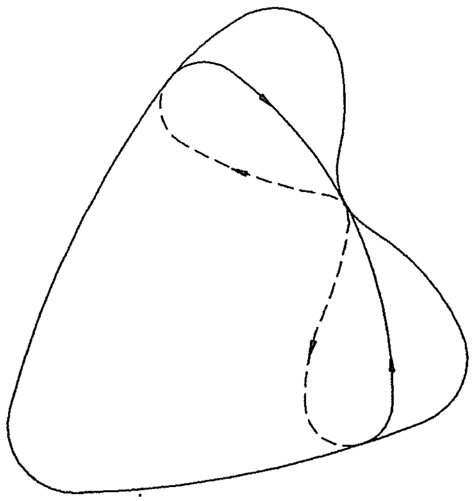


La conclusion est, en itérant ce procédé de racourcissement simultané de tout le tapissage, comme ce dernier ne peut pas se déchirer, il y a finalement convergence d'une courbe située *quelque part au milieu du tapissage* vers une géodésique périodique. Si l'on n'avait pas remplacé toutes les courbes par des polygones géodésiques, il y aurait un délicat problème de convergence, parce que l'ensemble des courbes est de dimension infinie. C'est précisément ce qui avait arrêté Poincaré. Mais les polygones géodésiques forment un espace de dimension finie (égale au produit par 2 du nombre de points). On peut donc maintenant utiliser la compacité de cet ensemble.



Le lecteur familier de certaines parties de l'Analyse reconnaîtra ici le principe du minimax. Nous allons en fait y revenir bientôt.

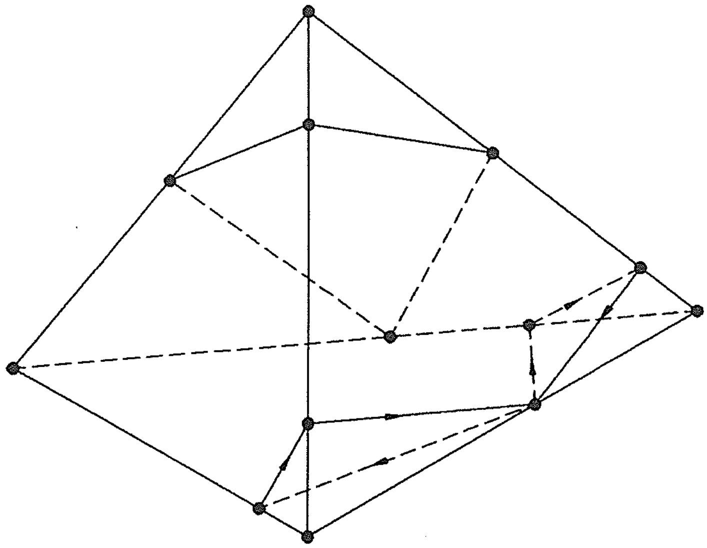
Note. La géodésique obtenue par la méthode de Birkhoff n'est pas toujours *simple*, c'est à dire ne se recoupant pas. A ce sujet on pourra consulter E. Calabi and J. Cao, [13] 1992, ou M. Berger, [6] 1993.



une géodésique périodique qui n'est pas simple

Il en existe toujours des simples, mais elles sont beaucoup plus difficiles à obtenir, voyez la Section **4.*C*** ci-dessous. Il a fallu attendre 1978 pour une démonstration vraiment solide. La plus belle démonstration aujourd'hui est peut-être celle de M. Grayson ([**21**] 1989). Poincaré aurait beaucoup aimé cette méthode. Elle consiste à déformer continuement une courbe quelconque, qui, poursuivie avec le temps, fournit une courbe simple et qui est une géodésique. Cette déformation est fournie par une équation différentielle dans l'espace de toutes les courbes. C'est une équation aux dérivées partielles de type parabolique (comme l'équation de la chaleur). La dérivée par rapport au temps est facile à deviner: en chaque point de la courbe, on la déforme inversement proportionnellement au *défaut* de cette courbe d'être une géodésique. Toute la difficulté est de montrer que le procédé converge lorsque le temps tend vers l'infini. Il faut aussi vérifier que la courbe ne développe pas de points doubles.

Il n'est pas trop étonnant que des géodésiques périodiques simples soient difficiles à trouver. Un travail récent de G. Galperin ([**19**] 1995) montre que le fait que les surfaces considérées soient différentiables est essentiel. Galperin a en effet montré ceci. Considérons un tétraèdre de l'espace, muni de la géométrie euclidienne sur les faces. C'est une géométrie qui n'a de singularités qu'en les quatre sommets, car deux faces se recollent bien le long d'un arête. Pour cette géométrie, Galperin a montré que, en général, il n'existe aucune géodésique périodique simple. Une géodésique, ici, est composée de segments de droites, en succession sur les faces, en passant bien les arêtes. Mais on voudra que ces segments, au nombre de quatre s'il y a simplicité, ne passent jamais en un sommet (où, d'ailleurs, on ne saurait pas bien comment continuer la trajectoire). Si en effet on avait un telle géodésique périodique (et d'ailleurs toute une bande à un paramètre automatiquement), on voit que ceci impose une relation algébrique entre les angles solides aux sommets du tétraèdre. C'est ainsi que le tétraèdre régulier admet plein de telles bandes, mais ses angles solides sont tous égaux (mais c'est typiquement un cas non générique).



un tétraèdré n'a pas en général de trajectoire périodique et simple

4 - Existence de plus d'une, de beaucoup de trajectoires périodiques; et sait-on alors les compter?

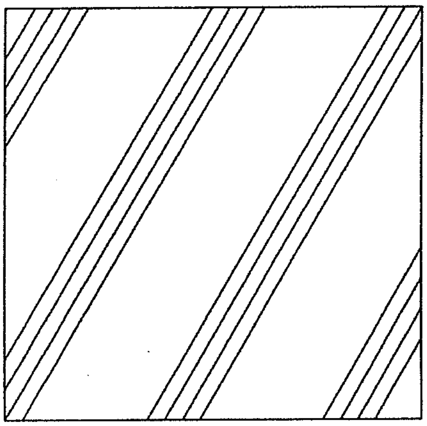
Nous recherchons des géodésiques de *supports différents*. En effet, une remarque fondamentale: pour le mécanicien, dès qu'il a trouvé une géodésique périodique, il considère qu'il en possède une infinité. En effet le mouvement qui consiste à tourner deux fois, trois fois, etc. le long d'une géodésique périodique ne sont pas les mêmes au sens strict que celui obtenu quand on y tourne une fois. Mais, tant pour le géomètre que pour le dynamicien, qui recherchent toutes les géodésiques périodiques et si elles remplissent plus ou moins la surface et comment, ces différents mouvements sont considérés comme identiques. On peut seulement remarquer que ce sont des géodésiques périodiques, certes, mais de longueurs L, $2L$, $3L$, etc. Nous recherchons donc des *géodésiques géométriquement distinctes*.

Bien sûr on élimine aussi la géodésique parcourue en sens inverse de la géodésique considérée.

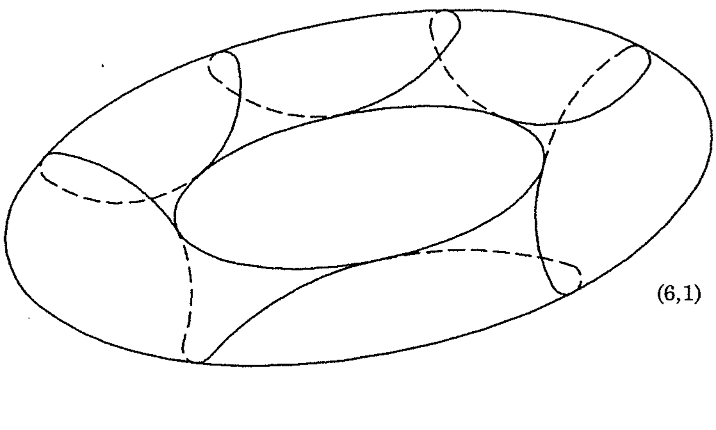
Il y a bien d'autres questions à se poser concernant l'ensemble des trajectoires périodiques, nous les étudierons au fur et à mesure de notre étude: répartition, fonction de comptage des longueurs.

A. Le cas du tore

Nous avons vu en **2.*D*** ce qu'il en était pour les structures plates sur un tore. Mais pour toute autre structure géométrique, qu'elle soit celle d'un tore plongé dans l'espace ou d'une structure riemannienne abstraite, les choses sont vraiment faciles. En effet on voit d'abord comment trouver deux géodésiques périodiques géométriquement différentes: on considère la plus petite courbe d'un type *parallèle* et la plus petite courbe du type *méridien*. On ne peut pas déformer l'une en l'autre ni même en l'autre couverte plusieurs fois. Il nous faut maintenant être plus techniques. Dans l'espace des courbes fermées sur le tores la relation d'équivalence de déformation l'une en l'autre (homotopie *libre*, sans point base fixé comme au contraire dans la définition ordinaire du groupe fondamental π_1) fournit un ensemble qui est celui des classes de conjugaison du groupe fondamental. Dans le cas du tore où le groupe fondamental est $\boldsymbol{Z}^2$ et donc abélien, cet



une bande de géodésiques périodiques

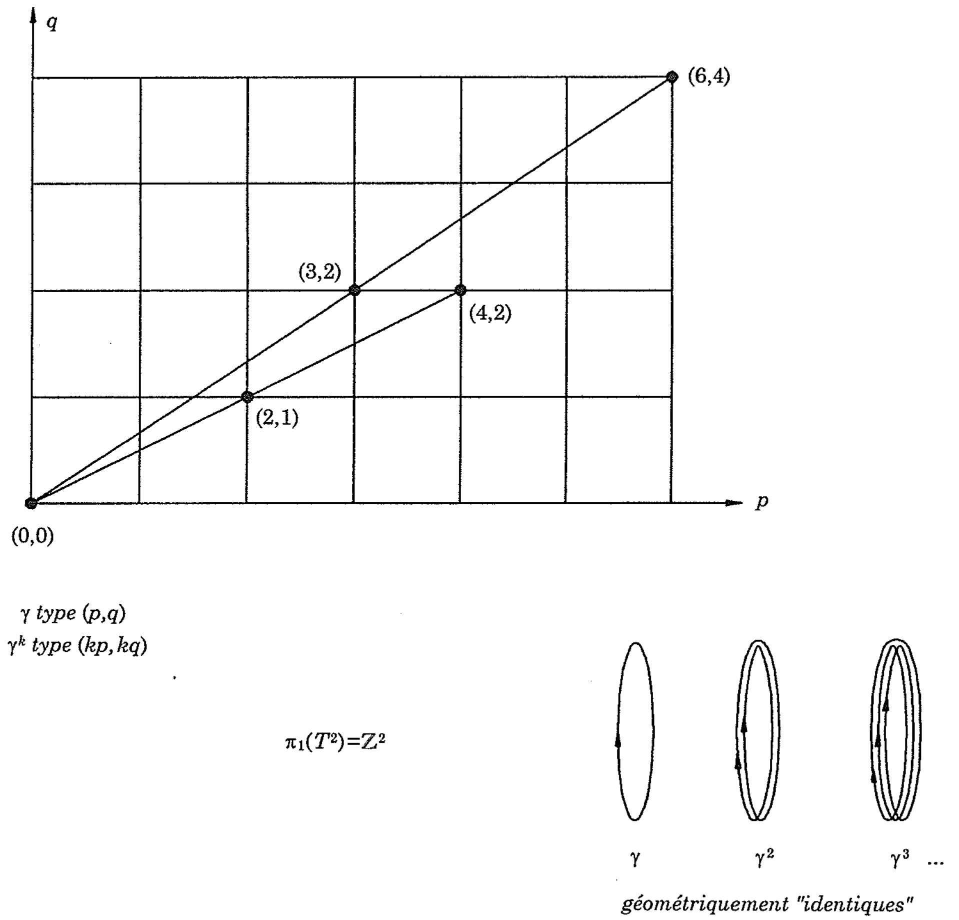


(6,1)

ensemble est $\boldsymbol{Z}^2$ lui-même et l'on peut donc espérer beaucoup de géodésiques périodiques distinctes (i.e. de supports différents). Il suffit de remarquer que les supports ne peuvent coincider pour les classes provenant des couples d'entiers positifs (p, q) et (p', q') que si ces deux couples sont chacun multiples d'un commun (p'', q''). D'où l'existence certainement d'au moins autant de géodésiques périodiques distinctes que de couples d'entiers positifs premiers entre eux.

Ce qui lance la question de *compter* les géodésiques périodiques (distinctes). Comme en physique pour les niveaux d'énergie, on est naturellement amené à définir la *fonction de comptage* des géodésiques périodiques d'une surface comme:

$FC(L) = \{$nombre de géodésiques périodiques
géométriquement distinctes dont la longueur est inférieure à $L\}$.



Comme en physique, on s'intéressera surtout à une estimation asymptotique de $FC(L)$ quand L est très grand. Une valeur exacte de $FC(L)$ ne peut d'ailleurs avoir de sens que pour des surfaces très particulières.

Note. Dans les cas très spéciaux des tores plats (carrés ou non), des surfaces de révolution, des ellipsoïdes les géodésiques périodiques arrivent par *bandes* continues, elles sont donc en nombre infini et la fonction de comptage n'a plus de sens pour nous. Dans d'autres études, le billard par exemple, on effectue le comptage en comptant pour une seule une bande continue (voir S. Tabachnikov, [45] 1994; M. Berger, [5] 1991). C'est justement ce que nous ne ferons pas ici.

Une estimation géométrique facile de ce qu'il en coûte de longueur *quand on tourne autour du tore avec les méridiens ou avec les parallèles* montre que la fonction de comptage d'une tore quelconque croît de façon au moins quadratique:

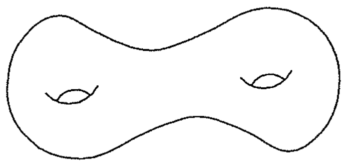
$$FC(L) \geqslant aL^2 \quad \text{pour tout } L, \text{ où } a \text{ est une constante}.$$

Ceci provient du fait que le nombre de couples d'entiers positifs (p, q) tels que $p^2+q^2<k$ est de l'ordre de $\frac{k^2}{4}\pi$, et le fait d'exiger de plus qu'ils soient premiers entre eux ne conduit qu'à diviser par la somme des inverses des carrés des entiers, qui vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

A notre connaissance, on n'en sait guère plus sur la question pour le tore. Quel est l'ordre exact de croissance de $FC(L)$ pour les tores? Serait-il exponentiel pour tous les tores, à la rigueur pour *la plupart* des tores? Et le cas seulement quadratique serait-il caractéristique de certains tores? Ceci amène naturellement à la triste constation suivante: à l'heure actuelle, à l'exception ci-dessous des surfaces de genre supérieur au tore, on ne connait l'ordre de grandeur de la fonction de comptage pour *aucune* surface du type du tore ou de la sphère. Voir cependant M. Byalyi and L. Polterovich [12] 1986 and V. Bangert [4] 1988.

B. Les surfaces de genre supérieur

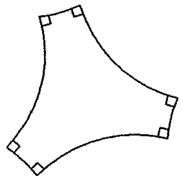
On considère une surface comme ci-dessous ayant γ trous, ce nombre γ est appelé aussi son *genre*. Pour $\gamma = 1$ on a affaire à un tore. Pour les γ supérieurs à 2 et comme dans le cas des tores, les *belles* métriques, les *belles* structures, ne peuvent jamais être obtenues par plongement dans l'espace, il faut considérer des surfaces abstraites et y définir des géométries convenables. Rappelons brièvement ces résultats maintenant très classiques.



$\subset$ E^3 *jamais à* K *constante*

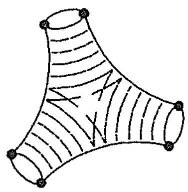
$\Downarrow$

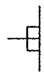
abstraite



hexagone rectangle du plan hyperbolique

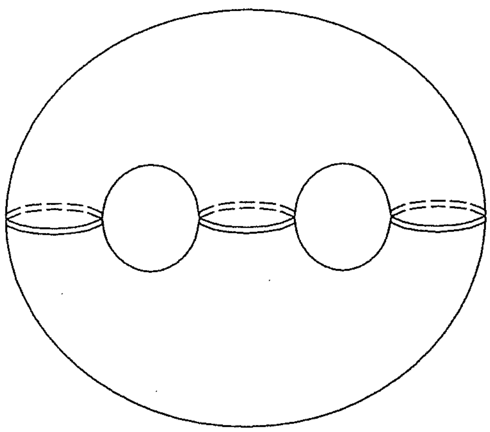
2 copies





O.K.

4 copies



$\approx$

Dans les deux modes habituels de construction, on part toujours du plan hyperbolique, à courbure constante et égale à -1. Dans l'espace on ne peut en réaliser que des morceaux: la surface de Beltrami, etc. Ce que l'on fait alors, c'est que soit on quotiente ce plan par un sous-groupe convenable du groupe de toutes ses isométries, en sorte que le quotient soit une bonne surface compacte et sans singularité, soit on recolle ensemble des polygones du plan hyperbolique, avec des conditions aux sommets sur les angles pour avoir un bon recollement. Le plus simple est d'utiliser des hexagones dont tous les angles au sommet sont égaux à $\frac{\pi}{2}$.

En en recollant deux comme indiqué sur la figure, on obtient un *pantalon.* Notez que les trois *cercles* qui forment la frontière d'un pantalon sont en fait des géodésiques périodiques. Maintenant, avec deux pantalons vous fabriquerez une surface de genre 2, et ainsi de suite.

Ces hexagones dépendent d'assez de paramètres pour que l'on puisse montrer que, par cette technique et pour tous les genres $\gamma \leqslant 2$, on obtient ainsi toutes les structures sur une surface de genre γ qui sont localement hyperboliques, ce qui est la même chose (c'est classique) que les structures riemanniennes à courbure de Gauss constant et égale à -1. Une excellente référence pour tout ceci est P. Buser, [11] 1992. La famille de ces structures est maintenant classiquement à $6(\gamma - 1)$ paramètres (espace de Teichmüller). Rappelons seulement que, d'après la formule de Blaschke (Gauss-Bonnet), l'aire totale de la surface vaut toujours $4\pi(\gamma - 1)$, puisque cette formule dit que l'on a toujours

$$\int_M K(m)\,\mathrm{d}m = 2\pi\chi(M)$$

lorsque l'on a désigné par K la courbure de Gauss de la surface et par $\chi(M)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré.

Qu'en est-il maintenant des géodésiques périodiques: dans le cas de courbure constante, dans le cas général (plongé ou abstrait)? Ici on a la réponse parfaite et fine. Un début grossier consisterait à procéder comme pour le tore, mais en remarquant que le groupe fondamental (ainsi que ses classes de conjugaison) est *énorme* dès que le genre est plus grand que 1. Il est à croissance exponentielle; en un sens simpliste cela veut dire qu'il y a énormément de façons de tourner autour des trous, en alternant de toutes les façons possibles le choix des trous. Tandis que pour le tore ce choix était réduit à celui de deux entiers parce que ces différentes façons de tourner autour des trous *commutaient.* Par cette seule considération de classes de courbes homotopes on peut montrer facilement, élémentairement, et, procédant comme pour le tore, que la fonction de comptage est à croissance exponentielle pour toute métrique sur une surface de genre plus grand que 1.

La théorie fine des surfaces à courbure constante -1 (voir P. Buser, [**11**] 1992) dit que la fonction de comptage des géodésiques périodiques a exactement la valeur asymptotique

$$\liminf_{L \to \infty} \frac{\log FC(L)}{L} = 1 .$$

Et pour les autres géométries sur une telle surface? On appelle alors à notre secours le théorème fondamental de la représentation conforme, qui affirme ici que toute métrique riemannienne g sur une surface de genre $\gamma \leqslant 2$ est proportionnelle à une métrique g_0 à courbure -1. C'est à dire qu'il existe une fonction numérique f sur la surface et une telle g_0 telles que $g = f \cdot g_0$. Dans ce changement les distances sont en général changées, mais pas les angles, d'où le nom de conforme. Partant de là, dans une étude très fine, A. Katok ([**31**] 1988) a obtenu le magnifique résultat que voici. Quelle que soit la métrique g de même volume que celles à courbure -1 la fonction de comptage vérifie

$$\liminf_{L \to \infty} \frac{\log FC(L)}{L} \geqslant 1$$

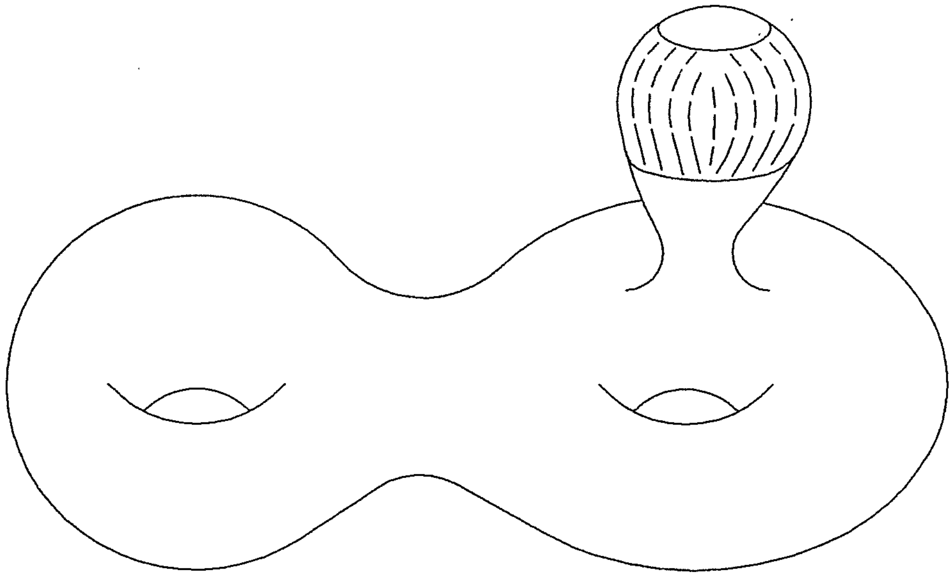
mais on a beaucoup mieux: il n'y a égalité que si la métrique g est à courbure constante. En langage de tous les jours: la moindre petite modification (à volume constant pour normaliser, bien sûr) d'une métrique à courbure -1 fait qu'il y a *plus de géodésiques périodiques* que dans le cas de courbure constante!

On peut aussi interpréter le résultat de Katok en disant que, sur les surfaces de genre plus grand que 1, on a un critère géométrique simple, global, pour dire que les métriques à courbure constante sont *les plus belles*.

Remarque importante. On pourrait demander si cette fonction de comptage tient compte ou non de ce que les géodésiques sont géométriquement différente ou non. En fait, ceci n'a aucune importance, car comme il y a croissance exponentielle, l'itération en L, $2L$, $3L$, etc. étant *arithmétique* ne se remarque pas.

Notes. Le lecteur pourrait être très étonné: le genre n'intervient pas dans les formules ci-dessus, alors que l'on pourrait penser que le nombre de géodésiques périodiques grandit avec le nombre de trous. Il existe en effet une formule fine, mais seulement faisant intervenir le genre dans les termes suivants du développement asymtptotique de $FC(L)$, voir P. Buser, [**11**] 1992, Section 9.6. Le genre en outre intervient, ce qui peut paraître suprenant au premier abord (mais pas à la lecture du texte de Buser), par l'intermédiaire des premières valeurs propres du laplacien sur la surface considérée.

Rappelons-nous maintenant la Section **2.B** et le contre-exemple de Weinstein. Il y s'agissait d'étudier la distribution des géodésiques périodiques, dans l'espace ou/et dans l'espace des phases. Ici, pas plus que dans l'exemple de Weinstein, on ne peut pas espérer une partout densité en phase. Il suffit d'ajouter un *morceau de Weinstein* à n'importe quelle surface, comme dans la figure.



La topologie, les deux trous ou plus, ne suffisent pas. On peut objecter à ce dessin de ne pas être *générique*. Par là nous entendons un résultat qui serait valide pour presque toute surface, ou si l'on veut, avec une probabilité égale à l'unité. En fait cette définition pour être précise nécessiterait une mesure sur l'espace des surfaces. Il n'en existe pas de raisonnable, le mot générique ici utilise une topologie sur cet espace, qu'il est facile de définir. Générique veut alors dire à l'exception d'un sous-ensemble qui est au plus une réunion dénombrable de sous-ensembles d'intérieur vide.

Cependant, même génériquement les géodésiques périodiques ne sont pas denses en phase. La démonstration est immédiate, mais modulo le théorème KAM (téorème des tores invariants de Kolmogoroff-Arnold-Moser, voir par exemple le Chapitre 6 de Y. Sinai ([43] 1987). On déduit de ce théorème que toute petite pertubation de la figure ci-dessus, *à la Weinstein*, dans l'espace des phases conserve des tores invariants, qui piègent les géodésiques comprises entre eux.

Maintenant il faut remarquer que, sur les surfaces de genre plus grand que 1, il y a en fait *trois* sortes de métriques. Celles à courbure constante, les générales mais aussi la classe intermédiaire de celles à courbure strictement négative. Or, pour cette dernière classe, on sait depuis E. Hopf en 1939, que le comportement des géodésiques est excellent, on a pleine ergodicité comme nous le verrons plus bas. Gardons-en seulement pour l'instant le fait que les géodésiques périodiques sont partout denses en phase.

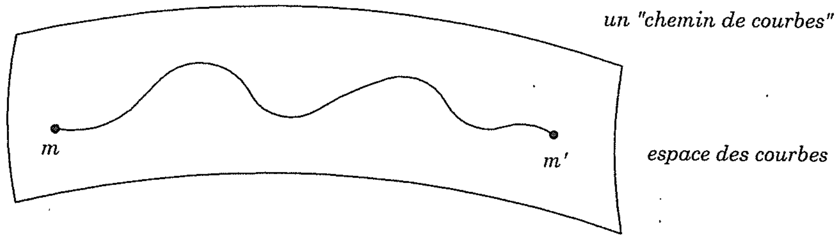
Par contre cette répartition n'est pas uniforme en général pour la mesure naturelle (dite de Liouville, voir la Section **5.*A***) sur l'espace des phases,plus précisément elle est uniforme si et seulement si la courbure est constante: c'est aussi un résultat délicat de Katok (voir [31] 1988). On peut donc dire que l'on a pour le métriques à courbure strictement négative sur les surfaces une description parfaite des géodésiques périodiques. Pour ce qui précède, des références sont W. Ballmann, M. Gromov et al., [3] 1985; R. Mañé, [34] 1987, le Chapitre 7 de Y. Sinai, [43] 1987. Disons que la conjugaison de plusieurs trous (topologie). jointe à la divergence des géodésiques qu'assure la courbure négative, assure un comportement bien compris. Voir aussi la très récente référence M. Pollicott, [40] 1994.

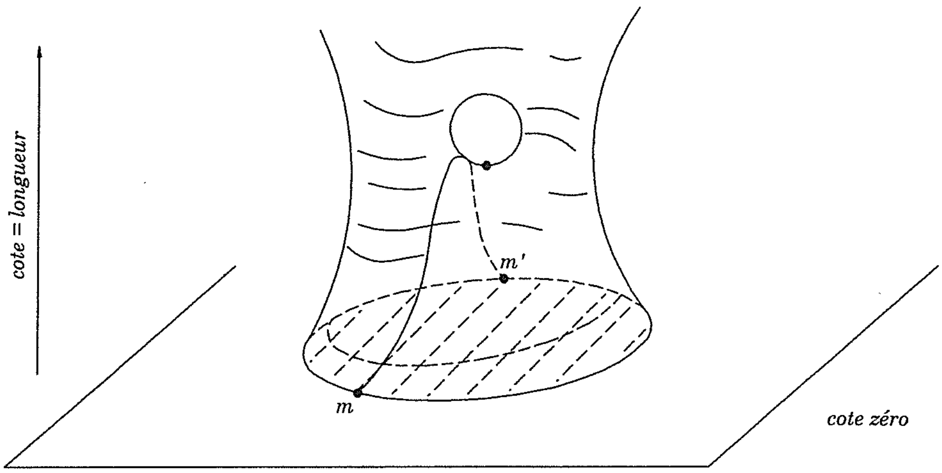
Il reste une question *bien simple*, et qui se pose pour tout type topologique de surface: les géodésiques périodiques sont-elles toujours dense en espace? C'est à dire: est-ce que la réunion de leur support est un sous-ensemble partout dense de la surface? A notre connaissance, et pour tout type de surface, aucun expert n'a la moindre idée si la réponse est oui ou non.

C. La sphère: les trois géodésiques de Lusternik-Schnirelmann.

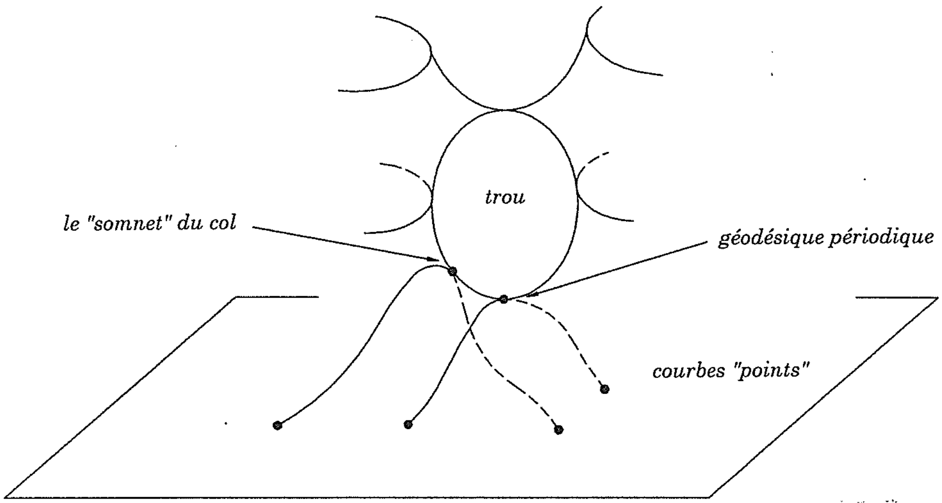
Dans toute cette section, on ne considère que des surfaces du type topologique de la sphère, abstraites ou plongées.

Il est très difficile de trouver sur une telle surface plus d'une géodésique périodique, au moins une *seconde*. Birkhoff avait eu une idée, mais qui ne fonctionne que dans certains cas, nous en reparlerons plus bas. En attendant, il est utile, et nous l'espérons agréable pour le lecteur, de reformuler notre construction ci-dessus de tapissages et le principe du minimax. On considère l'espace de toutes les courbes de la surfaces et, bien qu'il soit de dimension infinie, on le dessine (pour aider notre intuition) dans l'espace ordinaire comme une surface. La direction verticale et la cote correspondante mesurent la longueur des courbes représentées comme des points de cette *surface*. La cote zéro correspond aux courbes de longueur nulle, c'est à dire aux points de la surface étudiée. C'est la région ombrée dans la figure. Il est facile de montrer que les géodésiques périodiques sont les points de cette surface de courbes où le plan tangent est horizontal, ceci parce que les géodésiques périodiques sont les seules courbes dont la longueur de toutes les courbes infiniment voisines ne varie pas.





Représentons maintenant l'ensemble des courbes d'un tapissage de la surface. Dans notre *surface de courbes* c'est une *chemin* joignant deux points de cote nulle. Le fait qu'un tapissage ne peut pas indéfiniment avoir toutes ses courbes racourcies, sans *se déchirer*, se traduit pour la forme de notre espace de courbes par le fait que cet espace a au moins un trou et que un chemin de tapissage s'y représente par une courbe partant d'un point de cote nulle, qui doit passer par le trou puis redescendre à la cote nulle. Le bas du trou est un *col de montagne* et le plan tangent y est horizontal, il correspond donc à une géodésique périodique. Le principe du minimax est équivalent à dire qu'il existe un chemin de ce type (un tapissage) passant par le col exactement. La technique de raccourcissement de Birkhoff a pour effet de déformer tout tel chemin en un chemin dont le point le plus haut perd vraiment de la hauteur. Au bout du compte, si l'on itère ce procédé indéfiniment on obtiendra un chemin passant par le col. Et l'on doit y rester *accroché* parce qu'il y a vraiment un trou.

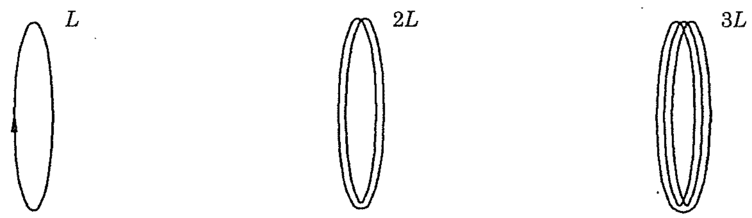


Autrement dit, nous utilisons ceci: pour passer d'une vallée à une autre, il faut franchir un col. Les masochistes ont le droit de dépenser de l'énergie inutile en ne passant pas exactement par le col, mais tant pis doublement pour eux, car, outre la fatigue inutile, jamais il ne passeront par le col, là où le plan tangent est horizontal et où l'on peut pique-niquer agréablement (s'il n'y a pas trop de vent).

Notre lecteur a peut-être déja commencé à entrevoir ce qu'il faut faire pour trouver d'autres géodésiques périodiques: il faut montrer que l'espace des courbes possède plusieurs trous, voire une infinité. Et il a bien trouvé l'idée de base. Il faut considérer des tapissages qui donnent dans l'espace des courbes des chemins passant par ces différents trous.

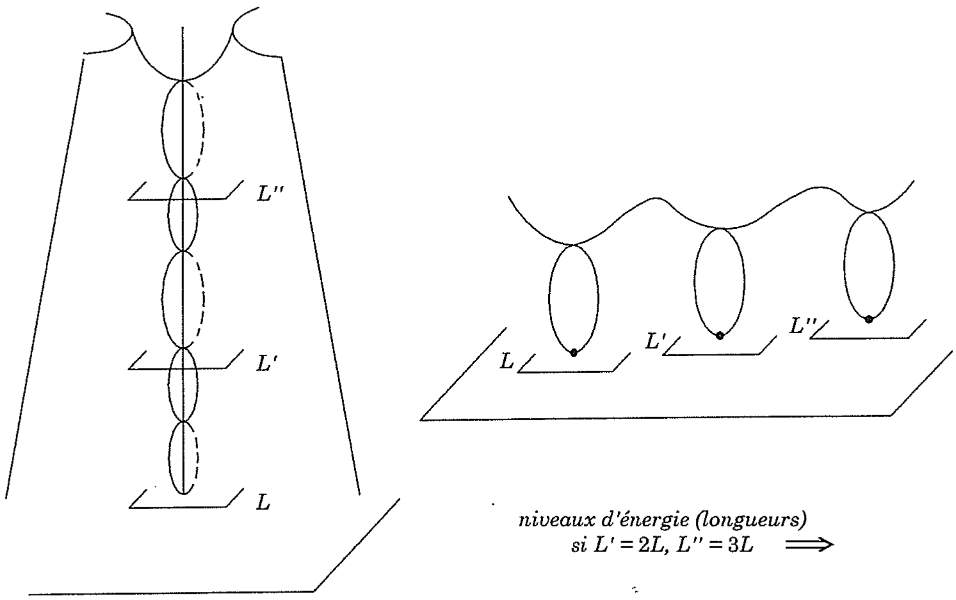
Seulement il y a une difficulté de base, prévisible d'après le début de cette section, c'est que si les *cols* des trous ont des cotes multiples l'une de l'autre, le risque est que ces cols fournissent seulement la même géodésique périodique mais parcourue seulement plusieurs fois. Une des façons d'être sûr que ce n'est pas le cas c'est de montrer qu'il existe des trous dont les cols ont des cotes non proportionnelles. Mais il y a des façons plus subtiles qui sont utilisées dans les résultats qui vont venir, dont nous n'avons pas le temps de parler.

Il s'agit ici d'un problème très difficile. Le premier résultat énoncé l'a été par Lusternik et Schnirelmann en 1927: il y a sur toute surface au moins trois géodésique périodiques, et simples de surcroît. L'idée de Lusternik et Schnirelmann est de considérer, non seulement des trous où passent des courbes d'ex-



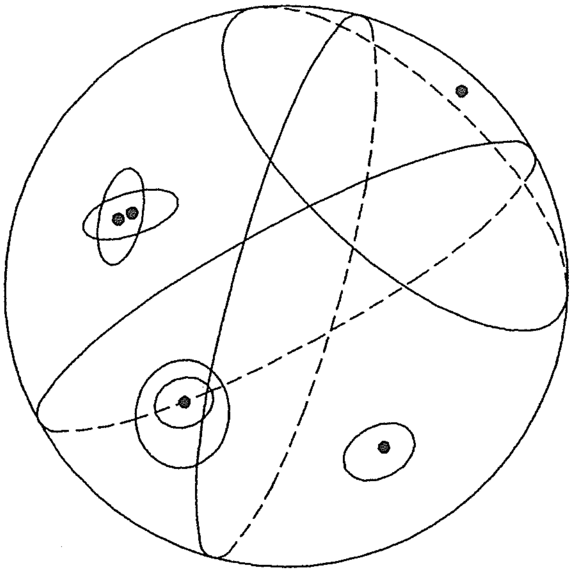
une fois — *même géodésique, parcourue: deux fois "pas différentes" pour le géomètre* — *trois fois*

Idée: l'espace des courbes a beaucoup plus que un trou



niveaux d'énergie (longueurs)
si $L' = 2L$, $L'' = 3L$ $\Longrightarrow$

trémités de cote nulle mais, plus généralement (n'oublions pas que l'espace des courbes est de dimension infinie et que le représenter par une surface de l'espace ordinaire était une approximation très grossière) des *surfaces de courbes* et la notion de trou pour ces objets. Les *surfaces* et les *trous* correspondant ne sont pas difficiles à trouver. On tapisse la sphère par l'ensemble à trois paramètres formé par tous les cercles de la sphère canonique, cercles comprenant les points de rayon nul et au bout les équateurs.



l'espace de tous les cercles de S^2 est de dimension 3

Ω ($S^1 \hookrightarrow$ courbes simples) se retracte sur {cercles de S^2}

$\Downarrow$ *Lusternik-Schnirelmann*

3 géodésiques périodiques differentes et simples

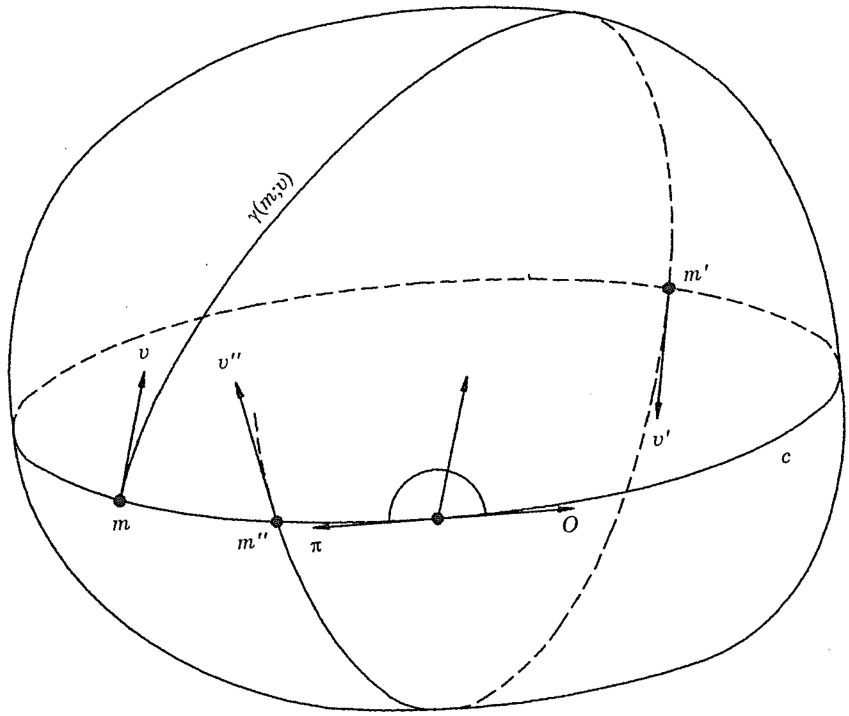
Mais l'existence de minimax correspondant est une autre histoire. A consulter la littérature il semble qu'il y ait eu plusieurs preuves intermédiaires incomplètes avant celle de Ballmann en 1978, voir la Section 3.7 de W. Klingenberg, [**32**] 1982. La plus belle preuve, et au fond la plus naturelle, est celle de M. Grayson [**21**] 1989.

Il faut dire au lecteur que cette méthode de cols, de trous, porte le nom de *théorie de Morse*. Cette méthode fonctionne très bien pour étudier les géodésiques joignant deux points, elle montre de suite qu'il y en a une infinité pour de nombreux couples de points. Elle ne seront toutes confondues pour tous les points que si on a une surface à géodésiques toutes périodiques, c'est que l'on est sur une surface à géodésiques toutes périodiques. Nous retrouverons plus bas en **5.*D*** la fonction de comptage associée à ces géodésiques joignant deux points.

Mais pour les géodésiques, le fait d'avoir une infinité de trous ne conduit à rien pour avoir des supports différents, à moins de ne pouvoir contrôler les hauteurs. La difficulté est aussi que, dans le dénombrement des trous pour les courbes entre deux points, cet espace est une bonne variété (de dimension infinie ou avec des bonnes approximations de dimension finie). Dans le cas de l'espace des courbes fermées, cet espace possède des singularités, dues au changement d'orientation possible, mais surtout parce que les itérations produisent une action des groupes $\mathbf{Z}_p$ donnant des singularités dans l'espace quotient.

D. *La sphère: une infinité de géodésiques périodiques*

Disons de suite que c'est seulement depuis 1992 que l'on sait effectivement que *toute* surface (de l'espace ou abstraite) admet un nombre infini de géodésiques périodiques. Nous allons exposer une partie des idées forces de ce résultat tout récent. Nous serons loin d'être complètement rigoureux et précis. Il y a en fait plusieurs cas qui s'excluent mutuellement et pour chaque cas, une démonstration de nature complètement différente. C'est en fait une diabolique dichotomie, et même plutôt une trichotomie. Si la première méthode, due à Franks, ne marche pas, on va voir que c'est parce que la surface possède une taille; mais alors, pour les surfaces à taille, on utilise une méthode toute différente, due à Bangert.

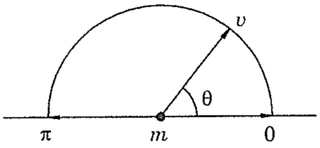


L'idée initiale est de Birkhoff, elle consiste à s'appuyer de façon essentielle sur une géodésique périodique *simple* c (on sait qu'il y en a au moins une maintenant, mais Birkhoff, lui, ne le savait pas). A chaque point m de c et à tout vecteur unité v tangent à la surface en m on associe la géodésique γ qui part de m avec la vitesse v. Puisque l'on est sur une sphère topologique, c partage notre surface en deux *hémisphères*. On suppose que le vecteur v pointe dans la première. Normalement notre géodésique $\gamma(m; v)$ se promène dans cette première hémisphère puis revient croiser c en le couple (m', v'). Ce dernier fournit une géodésique qui se promène maintenant dans la seconde hémisphère et revient croiser c en le couple (m'', v''). Et on continue ainsi de suite, obtenant (m'''', v''''), etc. Mais si (m, v) coïncide avec (m'', v''), ou plus généralement avec un (m'''', v'''') ultérieur, alors la géodésique $\gamma(m; v)$ sera nécessairement périodique. Dans la pratique il faut mieux regarder l'opération qui associe (m'', v'') à (m, v) dans le plan, où (m, v) est décrit par deux coordonnée, que l'on prend être la longueur de l'arc le long de c et l'angle entre 0 et π qui définit v. Le tout forme un anneau, dont les deux cercles frontière correspondent aux valeurs 0 et π. Ce que l'on cherche c'est à savoir si cette opération a des points périodiques. Birkhoff en était resté là dans le cas général et n'avait pas pu conclure.

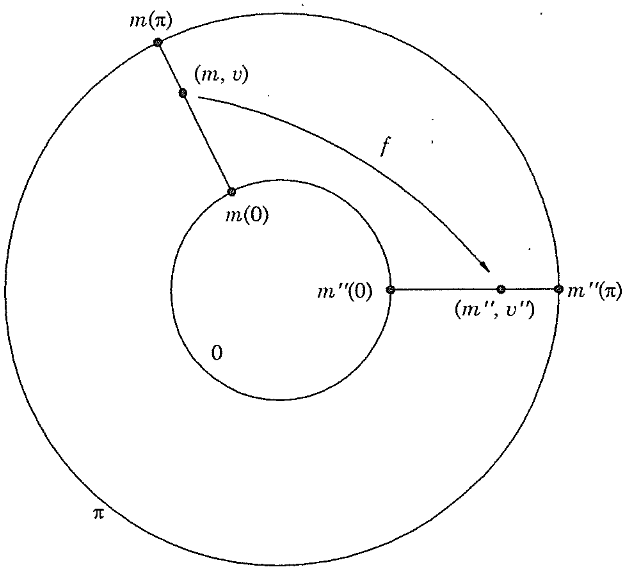
Même en admettant l'existence d'une géodésique simple, Birkhoff ne pouvait conclure que dans le cas dit *rotating*. Précisons cela. Une des difficultés est ce qui peut se passer sur les deux cercles frontières de l'anneau. Il y a deux cas à distinguer, le cas facile étant celui où ces frontières tournent vraiment sous l'application de Birkhoff. Etre à la frontière, c'est précisément considérer des géodésiques infiniment voisines de la géodésique c. On voit donc naturellement intervenir la notion de géométrie riemannienne de points conjugués sur c. Si le deuxième point conjugué ne coincide pas avec le point de départ, alors on tournera vraiment; ceci pour tout point de départ d'après la théorie classique de Sturm. Et, en outre, dans un sens sur une frontière, et dans l'autre sens sur l'autre. Birkhoff concluait alors à l'existence d'au moins deux autres géodésiques, grâce à sa démonstration du fameux théorème posthume de Poincaré. Il faut utiliser quelque chose pour notre application, c'est qu'elle conserve les aires dans l'anneau.

Que dans ce cas, il y ait en outre une infinité de géodésiques périodiques, c'est à dire une infinité de points fixes par l'application de Birkhoff, est classique depuis W. Neumann.

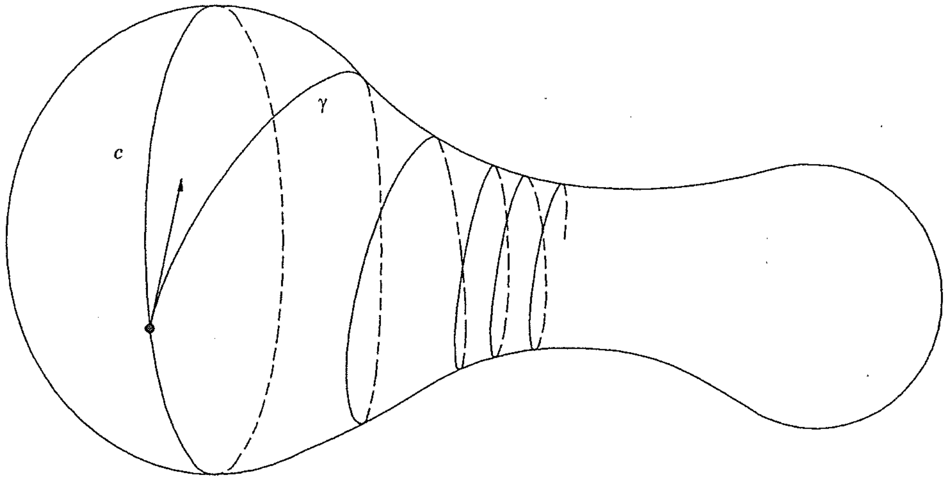
Or Franks a pu traiter le cas *non rotating*. Il a montré ceci: l'application de Birkhoff dans ce cas ne posséde aucun point fixe ou en possède une infinité. Mais ici il y en a au moins deux, grâce au théorème de Lusternik-Schnirelmann-Ballmann. C'est donc qu'il y en a bien une infinité. La démonstration de Franks est inexplicable en peu de mots, elle utilise en outre de très nombreux travaux antérieurs de cette dynamique de l'anneau.



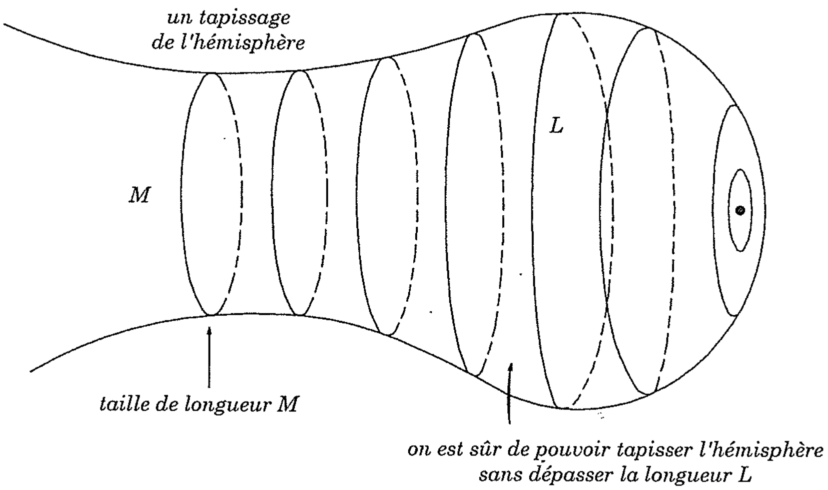
l'anneau de Birkhoff-Poincaré



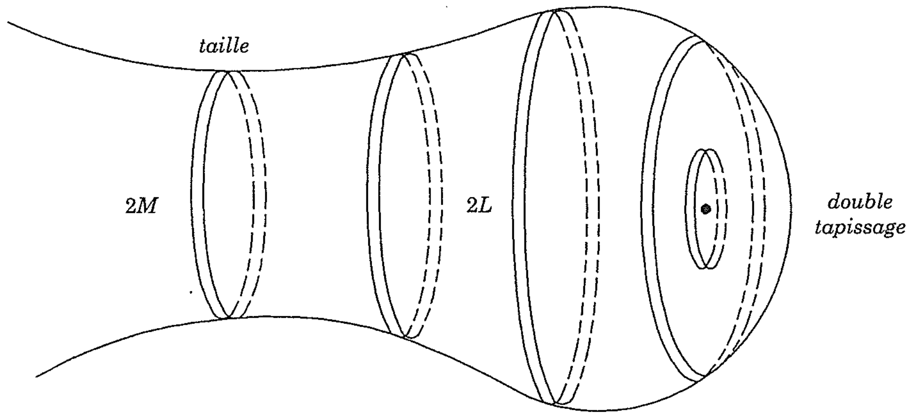
Elle a depuis été considérablement simplifiée par N. Hingston (voir **[26]** 1993). Pourquoi tout n'est-il pas terminé maintenant? Parce que nous avons supposé que le géodésique $\gamma(m; v)$ devait revenir toujours croiser c. Or des dessins montrent que ce n'est pas vrai en tout généralité, typiquement si la surface n'est pas convexe. Ce qui arrive c'est que cette géodésique s'accumule autour d'une géodésique périodique, par exemple celle d'une taille. Pour simplifier supposons que la surface a une taille (la démonstration complète de Bangert est un peu plus fine). Voici comment Bangert trouve une infinité de géodésiques. L'idée est celle des chemins de courbes passant par des trous dont on va pouvoir contrôler les longueurs.



γ ne reviendra jamais croiser c



Le premier chemin est pratiquement le même que pour trouver comme plus haut une première géodésique périodique: on part de la géodésique de taille et la réduit à un punt par un tapissage d'une seule hémisphère. Tout va d'ailleurs se passer dans cette seule hémisphère. Une des idées de Bangert, est de voir ce qui se passe d'un seul côté de la taille, en y retractant les itérées n fois de la taille. Si on le fait soigneusement, à la méthode de l'écheveau (voir page 47), les longueurs seront suffisament contrôlées pour permettre de conclure, après un délicat travail en théorie de Morse.

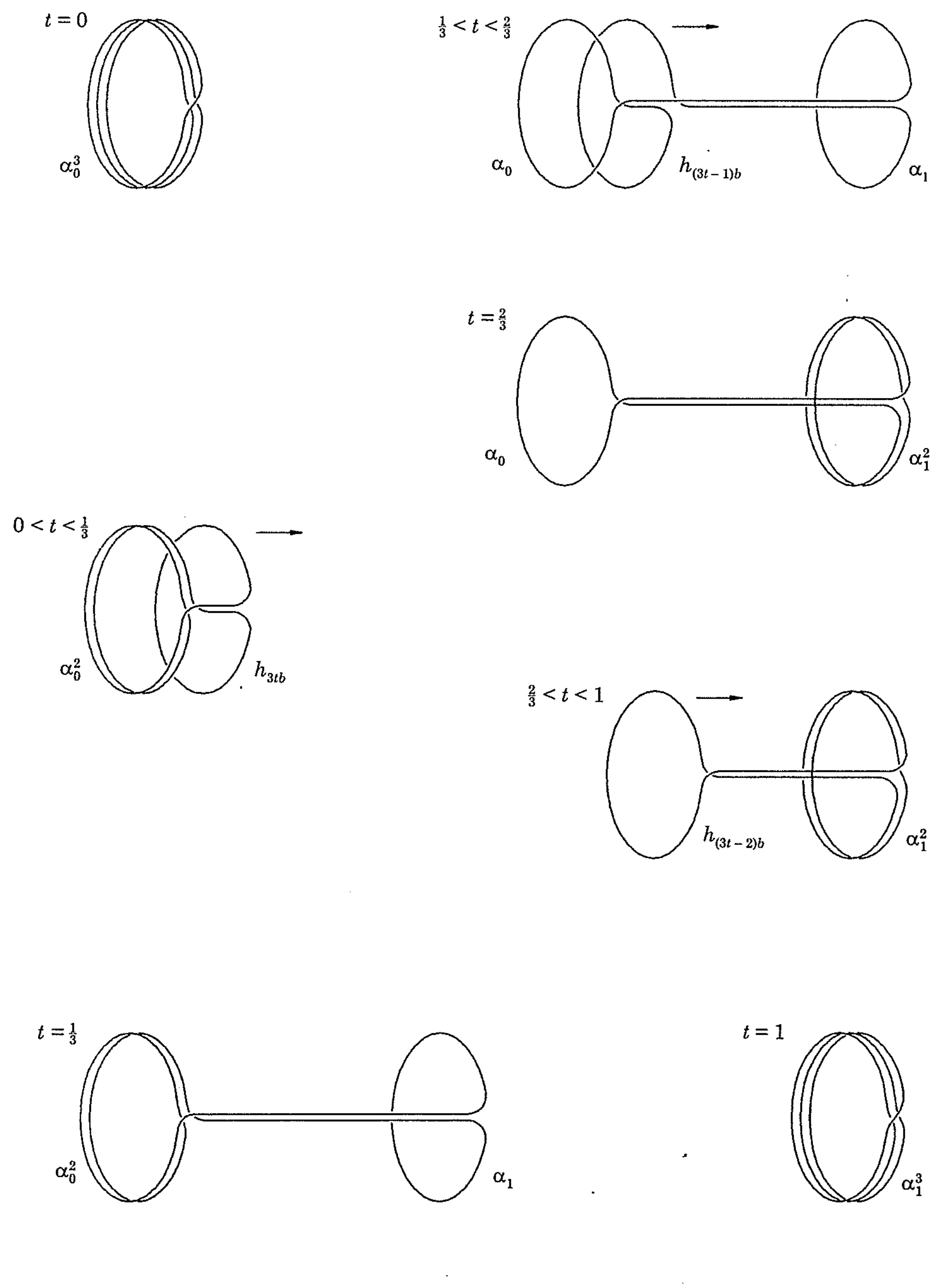


La fonction de comptage pour la sphère. Puisque l'on a maintenant une infinité de géodésiques périodiques, on désire connaître le comportement asymptotique de $FC(L)$. En raffinant les méthodes de Bangert et de Franks, en utilisant en particulier des raffinements de la théorie de Morse pour l'espace des courbes fermées, N. Hingston ([**26**] 1993) a réussi, en étudiant chaque cas de la tricothomie, à montrer que l'on a toujours

$$FC(L) > a\frac{L}{\log L} \qquad (a \text{ constante convenable positive}).$$

Ici l'apparition du $\dfrac{L}{\log L}$ n'est pas surprenant. En effet l'existence s'obtient dans tous les cas en cherchant des entiers premiers k (associés à des itérées de géodésiques périodiques) qui vérifient des propriétés supplémentaires (pour ne pas en recouvrir des précédentes) qui sont toujours de la forme $k = na + b$ où a, b sont fixes et n un entier quelconque. Le théorème de Dirichlet affirme alors qu'il existe une infinité de tels nombres premiers, et que leur densité est en $a\dfrac{L}{\log L}$. Le lien direct entre k et les longueurs permet de conclure.

Méthode de l'"écheveau":



Mais en outre N. Hingston a montré que, dans l'espace des métriques à courbure positive sur la sphère, il existe un ouvert dense pour la topologie C^2 pour lequel la fonction de comptage est au moins quadratique. La raison du quadratique est, avec des raffinements bien sûr, la même pour laquelle les paires (p, q) d'entiers premiers entre eux et tels que $p^2 + q^2 \leqslant L^2$ sont en nombre quadratique en L^2.

Répétons encore une fois que, cependant, on ne connait l'ordre de grandeur de $FC(L)$ pour aucune surface du type du tore ou de la sphère. Il n'est même pas possible aujourd'hui, semble-t-il, de conjecturer si par exemple la croissance est toujours au moins quadratique, voire plus. Ou encore de relier cette croissance à la géométrie de la surface.

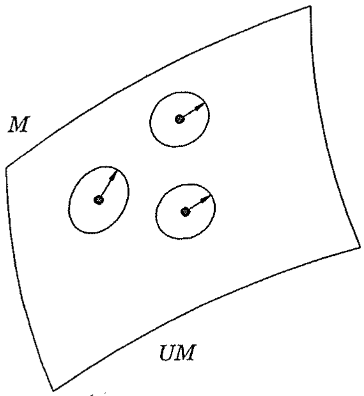
Autre question déja mentionnée: est-ce que, pour toute surface, les géodésiques périodiques sont denses en espace?

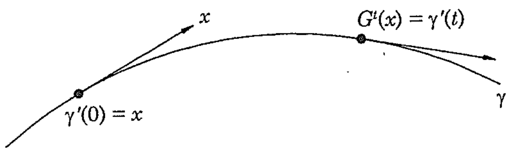
5 - Quel comportement espérer des autres trajectoires?

A. Les surfaces de genre supérieur

Comme pour les géodésiques périodiques, les choses sont bien comprises dans le cas de métriques à courbure négative. Ceci grâce à G. Hedlund en 1935 ([25]) pour la courbure constante et à E. Hopf en 1939 ([27]) pour une courbure strictement négative, mais non nécessairement constante. Le résultat de E. Hopf est difficile, mais il implique que, pour les surfaces à courbure négative, il y a ergodicité dans le sens le plus fort possible. En particulier presque toutes les géodésiques sont partout denses et ce, en phase.

Pour préciser tout cela, il faut introduire plusieurs objets. L'espace des phases d'une surface riemannienne (M, g) sera le *fibré tangent unitaire, noté UM*. C'est la variété à trois dimensions formée par la réunion des vecteurs tangents de longueur 1 en les





différents points de la surface. La projection canonique est p: $UM \to M$. Le *flot géodésique* est la groupe G^t à un paramètre t de UM formé des applications G^t: $UM \to UM$ définies par:

> $G^t(x)$ est le vecteur vitesse au temps t de la géodésique dont la vitesse initiale au temps zéro est le vecteur x.

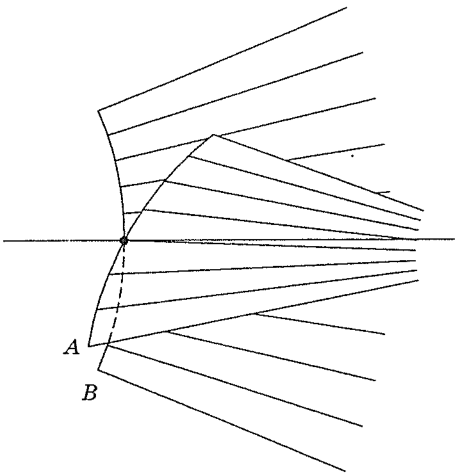
Enfin UM possède une mesure canonique, essentiellement définie comme le *produit* de la mesure de la base (M, g) par la longueur (canonique, égale à 2π) des cercles unité formés par les fibres $U_m M$ que sont les vecteurs unité tangents à M au point m. Un point essentiel est que cette mesure, dite *de Liouville*, est invariante par le flot géodésique. La théorie ergodique a en effet principalement pour cadre les ensembles compacts munis d'une mesure et d'une bijection f préservant cette mesure. Cette théorie étudie alors le comportement des itérés f^k de f quand k devient très grand. C'est le cadre discret. Ici, dans le cadre continu, on prendra $f = G^1$, il n'y a pratiquement pas de différence entre le cadre discret et le cadre continu.

Le résultat de E. Hopf dit donc que, dans UM, les vecteurs vitesse, pour lesquels la géodésique qu'ils engendrent possède un ensemble de vecteurs vitesse partout dense dans UM, forment dans UM un ensemble de pleine mesure. Les exceptions sont évidemment les vecteurs tangents aux géodésiques périodiques. Mais ce ne sont pas les seuls; il y a des géodésiques qui sont asymptotiques à une géodésique périodique. En fait on sait même beaucoup plus, pratiquement l'idéal: chaque géodésique qui est partout dense, l'est *régulièrement*. C'est à dire que le temps moyen qu'elle passe, quand le temps tend vers l'infini, dans n'importe quel ouvert U fixé, si petit soit-il, est égal à $\mathrm{aire}(U)/\mathrm{aire}(M)$. Le *noircissement* de la surface par cette géodésique est donc un gris bien uniform, de plus en plus foncé avec le temps.

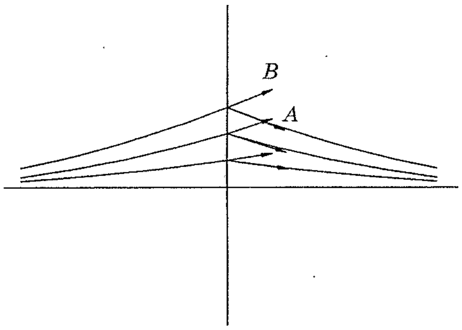
Maintenant, on ne sait rien à l'heure actuelle sur une métrique à courbure quelconque. En tout cas, le flot géodésique n'est pas certainement ergodique en général, même pour une métrique générique. Ceci se voit par le même argument utilisant le théorème KAM comme vu plus haut dans la Section 4.***B***. Il suffira, à une surface quelconque, d'adjoindre un morceau de surface de révolution. Alors ce morceau piègera une mesure positive de géodésiques qui restent dans ce morceau et leurs vecteurs tangents ne pourront jamais *aller ailleurs*.

Voici, très très brièvement, l'idée de la démonstration d'E. Hopf. Etant donné un vecteur unitaire v dans UM, le fait que la courbure soit négative permet de montrer que, par v, passe en une courbe bien définie (localement au moins) A de UM, qui a la propriété que toutes les géodésiques engendrées par les vecteurs de

A, convergent ensemble, exponentiellement de plus, lorsque $t \to \infty$. De même, il existe une deuxième courbe B (avec toujours $B(0) = v$), mais cette fois-ci la convergence est pour $t \to -\infty$. Ce qui veut aussi dire que les géodésiques issues de B divergent exponentiellement lorsque $t \to \infty$ mais convergent exponentiellement pour $t \to -\infty$. Si la propriété désirée était fausse, on aurait dans UM un sous-ensemble de mesure positive et invariant par le flot géodésique. Mais les effets des A et des B, appliqués à ce sous-ensemble mènent facilement à une contradiction: à mesure nulle près, cet ensemble doit remplir tout l'espace.



in UM



in M

Plus précisément, il faut montrer que presque toute fonction continue et invariante par le flot est constante. Techniquement on applique le théorème ergodique de Birkhoff, qui assure presque toujours une limite pour les moyennes de cette fonction sur une géodésique, que l'on aille à l'infini positivement ou négativement. En outre ces deux moyennes sont égales presque partout. Or les valeurs près de l'infini vont certainement coïncider à cause de la décroissance exponentielle. Donc ces moyennes sont donc constantes le long des courbes A et aussi des courbes B, ainsi que le long des géodésiques. Noter que ces courbes sont, dans le langage classique des systèmes dynamiques, appelées les courbes *stables* et *instables* de l'espace des phases. Nous les retrouverons en $\boldsymbol{C}$ ci-dessous. Dans l'espace des phases, qui est à trois dimensions, on a un feuilletage par trois familles de courbes, engendrant en chaque point des directions engendrant tout l'espace tangent, sur lesquelles la fonction est constante. On sent donc bien que la fonction sera constante partout localement. Ensuite, on recollera les morceaux.

Il y a cependant une difficulté technique considérable. Parce que les moyennes n'existent que presque partout, et ce, pour $t \to \infty$ comme pour $t \to -\infty$. En outre, si les courbes A et B sont dérivables en elles-mêmes, elles ne dépendent que continûment, en général, de leur point d'origine. Il faut utiliser une absolue continuité, qu'il faut démontrer, qui assure finalement la constance locale.

Peut-on avoir ergodicité sur la sphère? Les dynamiciens se sont longtemps posé la question. L'opinion commune était que c'est impossible. Pourquoi? Parce que les surfaces à courbure négative ont à la fois, contrairement à la sphère, une topologie non triviale (ce qui fournit à bon marché, nous l'avons vu, plein de géodésiques périodiques), mais surtout une courbure négative. Tout récemment les deux travaux de Donnay 1988 (voir aussi K. Burns and M. Gerber, [**10**] 1989; et G. Knieper and H. Weiss, [33] 1994) ont montré que cette intuition était fausse, au moins en partie. Comme il est difficile d'énoncer ces résultats sans un certain jargon des systèmes dynamiques, ni d'ailleurs non plus le résultat sur la fonction de comptage des longueurs des géodésiques joignant deux points (Section **5.*D***), nous allons brièvement rappeler ce que sont les entropies.

B. Les entropies

La notion d'entropie est une notion difficile et récente, deux choses qui sont en général liées. Elle est due en 1958 à Kolmogorov, avec une amélioration de Sinai en 1959. Cette entropie est l'entropie, malheureusement dit *métrique*, alors qu'elle est définie sur tout espace topologique muni d'un automophisme f préservant une mesure. Pour nous, l'ensemble sera UM et l'automorphisme sera le flot géodésique durant l'unité de temps, soit G^1, et la mesure celle de Liouville. La *notation* sera $h(f) = h_\mu(G)$ pur le flot géodésique, et nous parlerons d'entropie *de Liouville.*

Une deuxième notion d'entropie, l'entropie *topologique*, n'est apparue que beaucoup plus tard, en 1965. Nous la noterons $h_{\text{top}}(G)$. Elle s'est avérée de suite aussi indispensable que la métrique, elle ne suppose pas de mesure invariante par l'automorphisme f mais en échange est calculée à l'aide d'une métrique sur l'espace considéré.

L'entropie est non seulement difficile à définir, mais elle est en général impossible à calculer sur tel ou tel exemple. Un exemple notoire pour nous est celui des surfaces à coubure constante négative.

Le lien entre les deux est simple, et s'appelle le *principe variationnel.* Il dit simplement que $h_{\text{top}}(f)$ est le supremum des $h_\mu(f)$ lorsque μ parcourt l'ensemble des mesures invariantes par f. Ainsi en tout cas: $h_{\text{top}} \geqslant h_\mu$.

Les définitions originelles de l'entropie étaient assez compliquées. Cependant on a maintenant des définitions plus simples que nous allons donner plus bas.

En langage de tous les jours, on peut expliquer de plusieurs façons ce que ces entropies mesurent. Première vision: l'entropie mesure le nombre de points pour lesquels les trajectoires de f, pour nous des géodésiques, divergent exponentiellement lorsque le temps (pour nous la longueur) devient très grand. Plus précisément, l'entropie sera positive s'il y a assez de divergence exponentielle avec le temps, et la valeur de l'entropie sera le facteur k figurant dans e^{kL}. On peut dire aussi que, un $\varepsilon > 0$ étant fixé, on cherche les points situés à la distance L et qui ont un pouvoir de résolution optique aussi fin que ε. Et l'on zoome ensuite de plus en plus et prend la limite quand ε tend vers zéro.

Une autre interprétation est que l'entropie mesure, toujours au sens du facteur de l'exponentielle, la rapidité de perte de l'information à partir des données initiales. C'est plutôt ce point de vue qui était celui de Kolmogorov. La définition complète est un peu compliquée, mais l'idée est de mesurer le taux de *mélange* opéré par f sur des partitions de l'espace.

Il est important de noter que la positivité de l'entropie n'assure pas une divergence exponentielle, mettons pour nous des géodésique, à partir de tous les endroits de la surface, mais assure seulement cette divergence exponentielle à partir d'un certain nombre de points de la surface. En langage *à la mode*, la positivité de l'entropie topologique assure une situation *chaotique*, mais seulement à partir d'un ensemble de Cantor (donc non dénombrable). L'entropie métrique dit plus: elle assure ce chos à partir d'un ensemble de mesure positive. Mais ceci est infiniment moins dire que l'ergodicité, par exemple.

Plus précisément, si l'entropie métrique est strictement positive, alors il y aura au moins un sous-ensemble de mesure positive sur lequel la restriction de f est ergodique. Ce qui assure donc un ensemble de mesure positive de trajectoires partout denses dans un ouvert de l'espace. Mais ceci ne fournit même pas, en général, une seule trajectoire partout dense. Quant à l'entropologie topologique, le fait qu'elle soit positive ne dit strictement rien sur la densité des trajectoires.

Par contre, pour les géodésiques périodiques, ce qui nous intéresse beaucoup, c'est le résultat de A. Katok ([28] 1980) qui assure la croissance exponentielle de la fonction de comptage des géodésiques périodiques:

$$\liminf_{L \to \infty} \frac{\log FC(L)}{L} \geqslant h_{\mathrm{top}}(G).$$

Nous pouvons aussi, avec la notion d'entropie topologique, préciser maintenant le résultat de Katok sur les surfaces de genre supérieur ou égal à deux cité en Section 4.*B*. Ce que démontre le texte (A. Katok, [29] 1982), c'est la double inégalité

$$\liminf_{L\to\infty} \frac{\log FC(L)}{L} \geqslant h_{\text{top}}(G) \geqslant 1$$

avec, en outre, le fait que l'inégalité de droite n'est une égalité que si et seulement si la courbure est constante (et égale à -1). Ne pas oublier que l'on a normalisé le volume.

Voici maintenant les définitions modernes, des entropies. Ces définition, très parlantes pour une géomètre, sont dues à Bowen pour l'entropie topologique et à Brin-Katok pour celle de Liouville. Elles sont extraites de R. Mañé, [34] 1987.

On note d la distance sur le fibré unitaire UM de la surface M. Pour tout $\varepsilon > 0$ et toute longueur L on introduit les *boules*

$$B(x; L; \varepsilon) = \{ y \in M\colon\, d(G^T(x), G^T(y)) \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } T \leqslant L \}.$$

Une partie S de UM est dite être un $(L; \varepsilon)$-générateur si l'ensemble des boules $B(x; L; \varepsilon)$, lorsque x parcourent S, recouvrent M complétement. Pour tous L et ε on note $r(L; \varepsilon)$ le nombre minimum d'éléments d'un $(L; \varepsilon)$ générateur (ce nombre est toujours fini). Alors l'entropie topologique du flot géodésique G est donnée par la formule:

$$h_{\text{top}}(G) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{L\to\infty} \frac{1}{L} \log(r(L; \varepsilon)).$$

Pour l'entropie de Liouville, on montre d'abord que la limite

$$h(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{L\to\infty} -\frac{1}{L} \log \mu(B(x; L; \varepsilon))$$

existe pour presque tous les x. Et alors

$$h_\mu(G) = \int_M h(x)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

Sur ces deux définitions, on voit pourquoi la positivité de l'entropie de Liouville est plus forte que celle de l'entropie topologique. Si l'intégrale est positive, il faudra qu'il existe un ensemble de mesure positive de points x donnant une divergence exponentielle à G lorsque L tend vers l'infini.

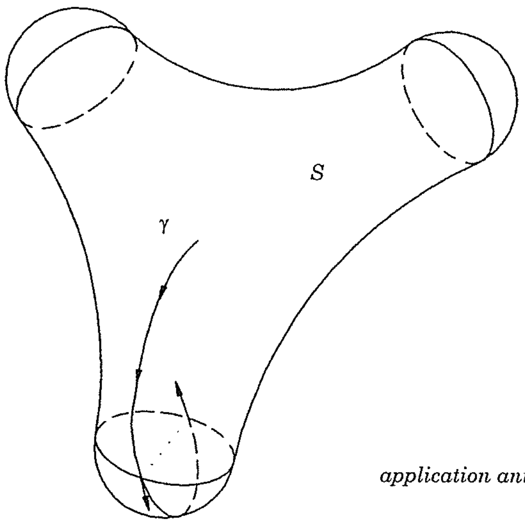
Note. Il existe (au moins) une troisième entropie, l'entropie volumique. Elle n'a d'intérêt que lorsque le groupe fondamental de la surface est infini, ici donc pour les surfaces autre que la sphère. Il y a de nombreuses relations entre ces trois entropies. Nous renvoyons le lecteur à G. Besson, G. Courtois et al., [8] 1994.

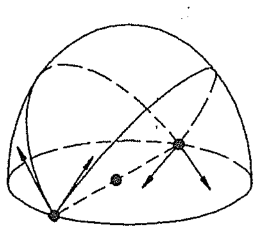
C. Le cas de la sphère

L'exemple de Osserman-Donnay.

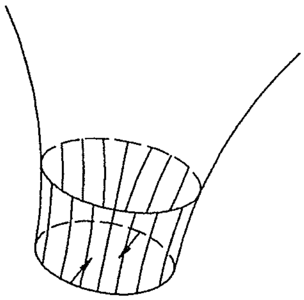
Dans [18] (1988) V. Donnay a réussit à construire sur la sphère une métrique riemannienne ergodique, en améliorant une idée d'Osserman. Osserman partait d'un pantalon, voir la figure de la Section **4.B**. Maintenant on ferme ce pantalon en une sphère topologique en lui recollant, le long des trois géodésiques périodiques qui forment sa frontière, trois hémisphères, c'est à dire des moitiés de sphère. On peut supposer que les longueurs des trois géodésiques sont toutes égales à 2π. Les hémisphères sont donc à courbure $+1$. La surface résultante est notée S.

Quel est le comportement des géodésiques sur cette surface? On part d'un point quelconque du pantalon et l'on suit la géodésique. Quand elle arrive à une frontière, elle rentre dans l'hémisphère et en ressort au point antipode et avec la vitesse montrée sur la figure ci-dessous. Elle rentre donc dans le pantalon – c'est ici l'idée clef – de la même façon que si, au lieu de compléter la surface à cette frontière par une hémisphère, on avait identifié sur cette frontière deux à deux les antipodes. Pour mieux voir cette identification, on peut remarquer que l'effet sur un petit collier autour de la frontière fournit un ruban de Möbius. En faisant ceci trois fois, on obtient finalement une surface S' compacte, lisse, *non orientable*, à courbure constante -1. Topologiquement, S' est la somme connexe de trois espaces projectifs réels. Une telle surface est tout autant ergodiques que les orientables (de genre supérieur à 1), voir par exemple W. Ballmann, M. Gromov et al., [3] 1985. Si l'on revient à la surface initiale (topologiquement une sphère), le comportement ergodique du flot géodésique sur la surface S' induit sur S un comportement ergodique.

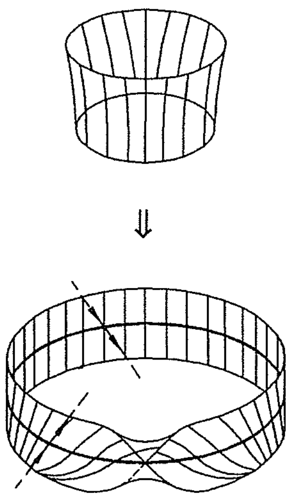




application antipodique



construction de S′



$\Rightarrow$

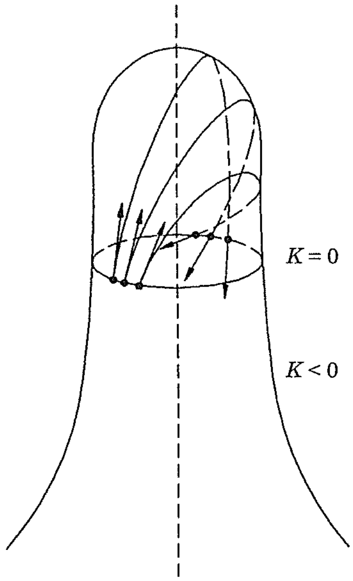
$\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \qquad K=-1$

$\uparrow$ *double revêtement*

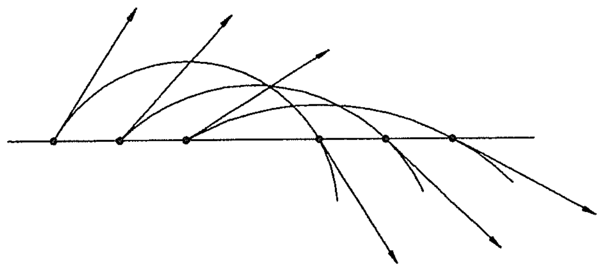
$S_2 \quad K=-1$

"on continue tout droit sur Möbins"

Maintenant cet exemple d'Osserman est lisse, mais pas assez pour quelqu'un d'exigeant, puisque la courbure saute de -1 sur le pantalon à $+1$ sur les hémisphères. C'est qu'ici qu'intervient le travail de Donnay. On peut rendre cette construction indéfiniment différentiable sans difficulté en lissant les raccords, et ce des deux côtés des frontières. Les hémisphères seront remplacées par des surfaces de révolution Σ, Σ', Σ''. Mais il faudra conserver la condition que les géodésiques qui quittent le pantalon pour entrer dans une telle surface vérifient



hémisphère divergente



divergent à l'entrée $\Rightarrow$ *divergent encore à la sortie*

condition sur la méridienne: $\dfrac{\mathrm{d}\,K(l)}{\mathrm{d}l} \leq 0$

la propriété qui est nécessaire pour l'ergodicité, à savoir, en termes simples, que si elles divergent en entrant, elles divergeront encore en sortant.

Donnay montre, en étudiant les variations infinitésimales des géodésiques, qui s'appellent champs de Jacobi dans le jargon de la géométrie riemannienne, que les choses marcheront bien si la méridienne de chacune des Σ a une courbure qui satisfait une condition de convexité.

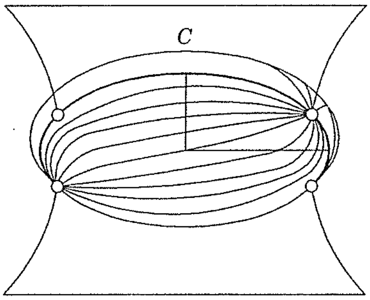
Ainsi il existe des métriques sur la sphère S^2 qui sont ergodiques. Mais notez qu'elles ont beaucoup, par construction, de courbure négative. La question qui se pose donc maintenant est de trouver sur S^2 une métrique à courbure partout positive qui soit ergodique. Elle est ouverte actuellement. Mais G. Knieper et H. Weiss dans **[33]** (1994) on réussi à construire un exemple de métrique sur S^2 à entropie topologique positive.

L'exemple de Knieper-Weiss.

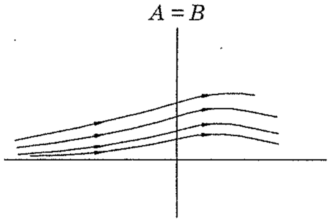
On part d'un ellipsoïde à trois axes inégaux et l'on regarde soigneusement le comportement des géodésiques qui passent par deux ombilics opposés, comportement introduit brièvement dans la Section **2.*C***. On pourra aussi regarder, dans le billard elliptique, ce qui se passe pour les trajectoires qui passent constamment par les deux foyers. Ce qui arrive, c'est ceci. Quand on poursuit la trajectoire, celle-ci, tout en passant constamment par les deux foyers, *s'écrase* de plus en plus le long du grand axe de l'ellipse. Mais ce qui est plutôt paradoxal, c'est qui si l'on change le sens du temps et poursuit cette trajectoire en sens inverse, alors, après avoir fait une espèce de demi-tour au centre de l'ellipse, elle va aller encore s'écraser le long du grand axe, mais ce, dans le *même sens* que précedemment.

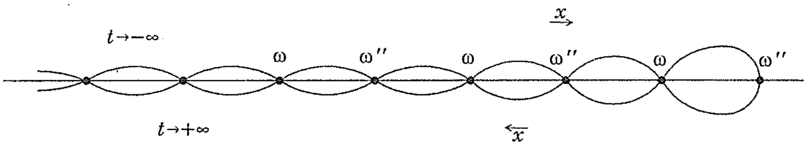
Il se passe la même chose sur l'ellipsoïde. Appelons c la géodésique (périodique) qui passe par les quatre ombilics. Et étudions une géodésique γ, différente de c, mais passant alternativement par les deux ombilics antipodaux ω et ω''. Lorsque le temps tend vers l'infini, γ va devenir asymptotique à c et les angles que fait γ avec c en ω et en ω'' tendent vers zéro. Disons que $\gamma(t)$ tend vers $c(t)$ lorsque $t \to \infty$ (il a fallu orienter c). Maintenant, quand t tend vers l'infini, mais par valeurs négatives, après avoir fait une expèce de renversement au milieu de l'ellipsoïde entre les ombilics, $\gamma(t)$ tend *encore* vers $c(t)$ (et non pas vers $c(-t)$) comme on aurait pu s'y attendre.

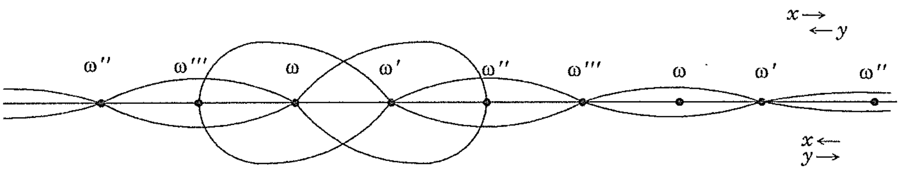
Si l'on cherche, dans cette situation, en un point de γ, ce que sont les courbes $A(t)$ et $B(t)$ introduites en **5.*A***, on voit donc que, en tout point de γ, elles coïncident. A la différence de la courbure négative, pour aucune des deux, la diver-



géodésiques s'enroulant
en spirâles dans C



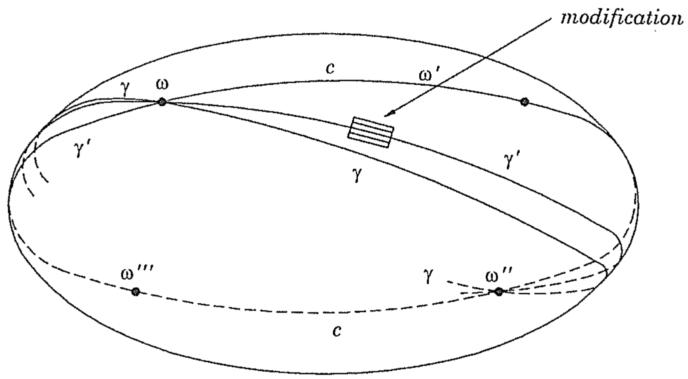




gence n'est exponentielle mais au contraire il y a convergence exponentielle des deux côtés. Cette situation est très surprenante.

L'idée de Knieper et Weiss est, partant de deux géodésiques différentes γ et γ', qui voyagent par les ombilics ω et ω'' et sont différentes de c, de modifier la métrique de l'ellipsoïde en un point de γ' (différent des ombilics) et sans toucher ni à γ ni à c. Cela aura pour effet de séparer, au moins localement, les variétés stables et instables correspondantes. Depuis Poincaré on sait que ceci engendre du chaos et, plus récemment, de l'entropie topologique positive. Techniquement, il y a un travail délicat à faire. La philosophie est que cette structure très spéciale des géodésiques doublement asymptotiques à c est génératrice de chaos dès qu'on la modifie.

On a donc maintenant sur S^2 des métriques à entropie topologique positive. D'après le résultat de Katok vu dans la section précédente, la fonction de comp-



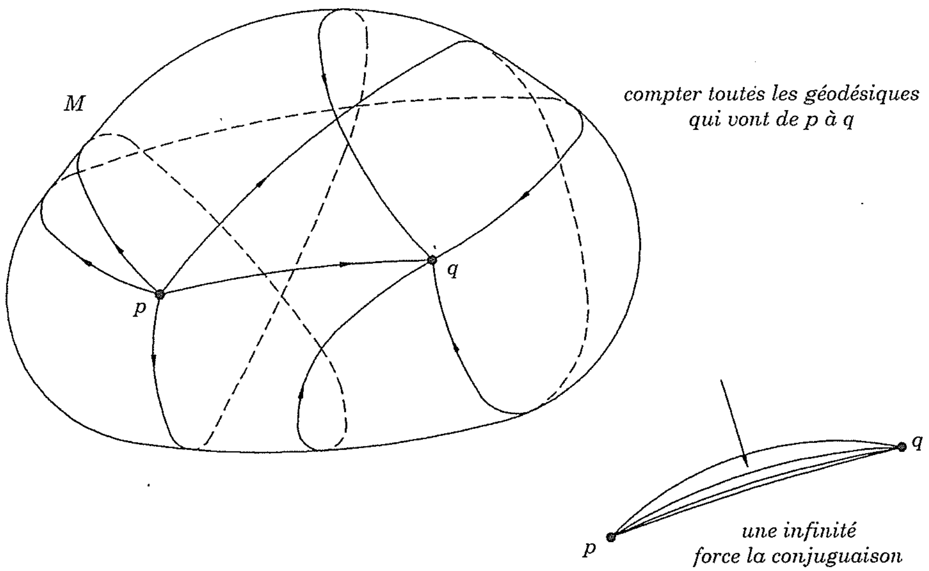
tage des géodésiques périodiques est exponentielle. Mais on ne saura rien pour l'existence de trajectories partout dense, même pas dans seulement un ouvert non vide.

A l'aide de théorème généraux sur la continuité de l'entropie, et le fait que les modifications faites ont un grand choix de possibilités, on peut même trouver des métriques qui soient *analytiques réelles.*

D. Entropie et longueurs des géodésiques joignant deux points donnés

Etant donné deux points quelconques p et q de la surface, nous avons rencontré dans la Section 4.*D* la question de trouver toutes les géodésiques joignant ces deux points (bien sur elles ne sont jamais des plus courts chemins, à part celles dont la longueur est precisement egale à la distance entre ces deux points). La topologie de l'espace des lacets de la sphère étant infinie, la théorie de Morse classique (voir par exemple J.-P. Serre, [42] 1951) s'applique, à cette restriction près que q ne doit jamais être conjugué de p sur une géodésique allant de p à q(cette relation est en fait symétrique). Il est facile de voir que, quelque soit p, les mauvais q forment un ensemble de mesure zéro. Donc on peut dire que, pour presque toute couple (p, q) de points de M il y a une infinité de géodésiques les joignant. Les cas où il y aurait une infinité de géodésiques de même longueur n'est pas à considérer, puisqu'il implique la conjugaison des points sur une géodésique limite. Ainsi est donc bien définie la fonction de comptage $FC(p, q; L)$, pour presque tous p et q.

Actuellement, on ne sait rien dire en général sur une fonction de comptage individuelle. Par contre récemment R. Mañé et G. and M. Paternain, en partie indépendamment, viennent de montrer ([35] et [39] 1994) que la double moyenne, quand p et q parcourent la surface, fournit l'entropie topologique de cette



surface par la formule (valable d'ailleurs en fait pour toute dimension et toute variété riemannienne):

$$h_{\text{top}}(G) = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \log \int_{M \times M} FC(p, q; L) \, dp \, dq .$$

La démonstration conjugue une partie géométrique utilisant l'application exponentielle du produit $M \times M$, avec le théorème fin de Yomdin qui permet de calculer une entropie par une formule valable seulement dans le cas differentiable (voir M. Gromov, [23] 1987).

On sait donc que, si l'entropie topologiqe du flot géodésique (voir par exemple la section précédente) est non nulle, alors la fonction de comptage $FC(p, q; L)$ croît exponentiellement pour beaucoup de couples (p, q) de points de M.

Il est permis d'être optimiste et de demander si l'on a toujours:

$$h_{\text{top}}(G) = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \log FC(p, q; L)$$

pour presque tous les (p, q).

Sinon on pourra demander seulement que ceci soit vrai pour les surfaces génériques.

On a seulement des réponses partielles, ce qui justifie l'optimisme ci-dessus. A savoir:

– (Mañé) Si la surface est sans points conjugués, en particulier si elle est à courbure négative ou nulle, alors

$$h_{\text{top}}(G) = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \log FC(p, q; L) \qquad \text{pour tous les } p \text{ et } q\,.$$

– (Paternain) On a toujours pour tout p et presque tous q

$$h_{\text{top}}(G) = \limsup_{L \to \infty} \frac{1}{L} \log FC(p, q; L)\,.$$

6 - La mécanique détermine-t-elle la métrique?

Definition. Supposons que deux surfaces (toujours plongées dans l'espace ou abstraites) aient la même mécanique, c'est à dire le même comportement pour leurs trajectoires, ou, pour être encore plus précis, un isomorphisme d'ensemble entre leurs trajectoires. Sont-elles alors nécessairement les mêmes, c'est à dire isométriques, ou encore, ont la même géométrie?

Il est facile de voir que la réponse est non en général; il suffit de penser aux surfaces de Zoll (autres que la sphére). Elles ont toutes leurs géodésiques périodiques, de même longueur. Impossible de récupérer leur métrique avec seulement leur mécanique.

Il faut cependant être encore plus précis. La bonne notion est celle de *flots géodésiques conjugués*. On dira que les deux surfaces riemanniennes (M, g) et (N, h) ont leurs flots géodésiques conjugués s'il existe une application Φ: $UM \to UN$ qui est un isomorphisme entre leurs fibrés tangent unitaire qui commute avec leurs flots géodésiques, c'est à dire que le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} UM & \xrightarrow{\Phi} & UN \\ {\scriptstyle G^t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G^t} \\ UM & \underset{\Phi}{\to} & UN \end{array}$$

est commutatif pour tout temps t.

Remarques. La première est que nous ne précisons pas le degré de différentiabilité. C'est cependant une chose très importante, des phénomènes très subtils peuvent se produire en basse différentiabilité (voir les différentes références mentionnées). Nous supposerons donc la différentiabilité assez grande, afin de ne pas être trop techniques.

La deuxième est qu'il est important de remarquer que l'on ne demande pas à Φ de commuter avec les projections naturelles $UM \to M$ et $UN \to N$. C'est une condition trop forte. On veut seulement utiliser la nature en elle-même des trajectoires, sans, en quelle sorte, *savoir où elles passent.* Vous voyagez en avion, mais vous n'avez pas le droit de regarder par le hublot!

C'est ainsi que le théorème mentionné dans le Section **1** sur les variétés antipodales implique que si un flot géodésique d'une surface est conjugué à celui de la sphère standard, avec commutation des projections, alors on est sur la sphère standard.

Des exemples. Pour les surfaces de Zoll d'abord, il faut montrer la conjuguaison. Il ne suffit pas de savoir que toutes les géodésiques sont périodiques et de même longueur, encore faut-il expliciter un isomorphisme Φ. Ceci a été fait par Weinstein, voir la Section **2**, § **4*F*** de A. L. Besse, [7] 1978.

En échange, et nous nous permettons ici exceptionnellement une surface non orientable, remarquons que la métrique riemannienne d'une sphère topologique ayant la propriété antipodale passe au quotient et fournit sur le plan projectif réel $\boldsymbol{R}P^2$ une métrique dont toutes les géodésiques sont périodiques, simples et de même longueur. Le théorème de Leon Green mentionné just à l'instant montre donc que si une métrique riemannienne sur $\boldsymbol{R}P^2$ a son flot géodésique conjugué à celui de la métrique canonique sur $\boldsymbol{R}P^2$, alors elle lui est isométrique.

Depuis Anosov en 1967 on sait que la réponse est très bonne dans le cas des variétés à courbure négative (strictement). Dès que les flots géodésiques sont conjugués pour deux telles surfaces, alors elles sont nécessairement les mêmes (isométriques). Ce théorème a été raffiné par J.-P. Otal dans [38] 1990, puis par C. Croke, A. Fathi and J. Feldman dans [16] 1992.

C. Croke a montré dans [15] 1992 que si une surface a son flot géodésique conjugué à celui d'un tore plat, alors elle lui est isométrique. Le flot géodésique est étudié de façon très fine dans le texte remarquable (V. Bangert [4] 1988).

C. Croke et B. Kleiner ont montré dans [17] 1994 que la conjuguaison des flots géodésiques implique l'égalité des aires. Ce résultat, apparemment terriblement simple, n'est pas évident.

Une série de résultats apparentés concerne le spectre des longueurs d'une surface. Ce spectre est simplement le sous-ensemble des nombres réels constitué par les longueurs des géodésiques périodiques. La connaissance de cet ensemble est en général insuffisante; il existe des surfaces non isométriques et ayant même spectre des longueurs. Voir par exemple P. Buser, [11] 1992.

Par contre le spectre *marqué* des longueurs est un invariant beaucoup plus fort. Il s'agit des couples indiquant à la fois la longueur d'un géodésique périodique et sa classe d'homotopie libre. Alors le spectre marqué détermine uniquement la métrique de la surface: (J.-P. Otal, [38] 1990), puis (C. Croke, A. Fathi and J. Feldman, [16] 1992).

Note. Il faut savoir que, dans tous ces résultats, les hypothèses de différentiabilité sont importantes. Plus la différentiabilité est basse, plus le résultat est difficile. Un exemple typique est celui de E. Ghys, [20] 1987.

7 - Récapitulation des questions ouvertes

Les géodésiques périodiques sont-elles denses en espace pour toute surface? Il est très intéressant de noter les exemples donnés dans V. Bangert [4] 1988, pour lesquels les géodésiques périodiques qui sont les plus courtes dans leur classe d'homotopie libre, ne sont pas du tout dense en espace, et ce, de très loin.

Evaluer l'ordre de croissance de la fonction de comptage des géodésiques périodiques d'au moins une surface du type du tore ou de la sphère.

La fonction de comptage est-elle toujours au moins quadratique sur toute surface (voir le résultat de N. Hingston plus haut)? Toujours exponentielle? Si l'on pense à une analogie avec le cas des billiards, le cas exponentiel semble peu probable pour le cas général. En effet, pour les billards polygonaux, on connait deux résultats sur les trajectoires périodiques. Celui de A. Katok ([30] 1987) qui dit que, pour n'importe quel billard polygonal, la fonction de comptage n'est jamais exponentielle. Celui de H. Masur ([37] 1990) qui dit le la fonction de comptage est toujours entourée des deux côtés par un estimation quadratique, ceci lorsqu'il s'agit d'un billard polygonal dont tous les angles aux sommets sont des multiples rationnels de π.

Existe-t-il sur la sphère une métrique ergodique et à courbure partout positive? Sinon, au moins une à entropie de Liouville strictement positive? Et sinon possèdant au moins une géodésique partout dense?

Est-ce qu'une métrique générique sur S^2 est toujours à entropie topologique positive?

Dans la formule de Mañé-Paternain, peut-on remplacer la double intégrale sur $M \times M$ par un résultat, plus ou moins exigeant, par exemple du type presque partout?

Etudier le cas du tore, qui semble intermédiaire entre celui de la sphère et celui des surfaces de genre supérieur.

Bibliographie

[1] I. AHLFORS and L. SARIO, *Riemann surfaces*, Princeton University Press, Princeton 1960.

[2] V. ARNOLD, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, New York 1978.

[3] W. BALLMANN, M. GROMOV and V. SCHROEDER, *Manifolds of nonpositive curvature*, Birkhaüser, Boston 1985.

[4] V. BANGERT, *Mather sets for twist maps and geodesics on tori*, Dynamics reported, Teubner, Leipzig, Wiley, London 1988.

[5] M. BERGER, *Les billiards mathématiques*, Pour la Science (1991).

[6] M. BERGER, *Encounter with a geometer: Eugenio Calabi*, Conference in honour of Eugenio Calabi, Pisa 1993.

[7] A. L. BESSE, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer, Berlin 1978.

[8] G. BESSON, G. COURTOIS et al., *Entropies et rigidités des espaces localement symétrique de courbure strictement négative* (1994), à paraître.

[9] G. A. BLISS, *The geodesic lines on the anchor ring*, Ann. of Math. (1902-1903), 1-20.

[10] K. BURNS and M. GERBER, *Real analytic Bernouilli geodesic flows on S^2*, Ergodic Theory Dynamical Systems 8 (1989), 531-553.

[11] P. BUSER, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Birkhaüser, Boston 1992.

[12] M. BYALYI and L. POLTEROVICH, *Geodesic flows on the two-dimensional torus and phase transition «commensurability-noncommensurability»*, Functional Anal. Appl. **20** (1986), 260-266.

[13] E. CALABI and J. CAO, *Simple closed geodesics on convex surfaces*, J. Differential Geom. **36** (1992), 517-549.

[14] I. CHAVEL, *Riemannian geometry: a modern introduction*, Cambridge University Press, 1993.

[15] C. CROKE, *Volume of balls in manifolds without conjugate points*, Internat. J. Math. Math. Sci. **3** (1992), 455-467.

[16] C. CROKE, A. FATHI and J. FELDMAN, *The marked length-spectrum of a surface of nonpositive curvature*, Topology **31** (1992), 847-855.

[17] C. CROKE and B. KLEINER, *Conjugacy rigidity for manifolds with a parallel vector field*, J. Differential Geom. **39** (1994), 659-680.

[18] V. DONNAY, *Geodesics flow on the two-sphere II: ergodicity*, Lecture Notes in Math. **1342**, Dynamical Systems, Springer, Berlin, 1988.

[19] G. GALPERIN, (1995), to appear.

[20] E. GHYS, *Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **20** (1987), 251-270.

[21] M. GRAYSON, *Shortening imbedded curves*, Ann. of Math. **129** (1989), 71-111.

[22] D. GROMOLL and K. GROVE, *On metrics on S^2 all of whose geodesics are closed*, Invent. Math. **65** (1981), 175-177.

[23] M. GROMOV, *Entropy, homology and semialgebraic geometry*, Astérisque (1987), 225-240.

[24] J. HADAMARD, *Les surfaces à courbure opposées et leurs lignes géodésiques*, J. Math. Pures Appl. 4 (1989), 27-73.

[25] G. A. HEDLUND, *On the metrical transitivity of the geodesics on closed surfaces of constant negative curvature*, Ann. of Math. **35** (1934), 787-808.

[26] N. HINGSTON, *On the growth of the number of closed geodesics on the two-sphere*, Internat. Math. Res. Notice **9** (1993), 253-262.

[27] E. HOPF, *Statistik des geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung*, Ber. Verh. Saechs. Akad. Wiss. Leipzig **91** (1939), 261-304.

[28] A. KATOK, *Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms*, Publ. Math. IHES **51** (1980), 137-173.

[29] A. KATOK, *Entropy and closed geodesics*, Ergodic Theory Dynamical Systems **2** (1982), 339-365.

[30] A. KATOK, *The growth rate of singular and periodic orbits for a polygonal billiard*, Comm. Math. Phys. **111** (1987), 151-160.

[31] A. KATOK, *Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics*, Ergodic Theory Dynamical Systems 8* (1988), 139-152.

[32] W. KLINGENBERG, *Riemannian geometry*, de Gruyter, Berlin 1982.

[33] G. KNIEPER and H. WEISS, *A surface with positive curvature and positive topological entropy*, J. Differential Geom. **39** (1994), 229-249.

[34] R. MAÑÉ, *Ergodic theory and differential dynamics*, Springer, Berlin 1987.

[35] R. MAÑÉ, *On the topological entropy of geodesic flows*, I.M.P.A. (1994).

[36] S. MASSEY, *A basic course in algebraic topology*, Springer, Berlin 1991.

[37] H. MASUR, *The growth rate of trajectories of a quadratic differential*, Ergodic Theory Dynamical Systems **10** (1990), 151-176.

[38] J.-P. OTAL, *Le spectre marqué des surfaces à courbure négative*, Ann. of Math. **131** (1990), 151-162.

[39] G. PATERNAIN and M. PATERNAIN, *Topological entropy versus geodesic entropy*, Internat. J. Math. (1994).

[40] M. POLLICOTT, *Closed geodesic distribution for manifolds of non positive curvature*, Warwick Univ., Warwik 1994.

[41] H. RADEMACHER, *On a generic property of geodesic flows*, Math. Ann. **298** (1994), 101-116.

[42] J.-P. SERRE, *Homologie singulière des espaces fibrés*, Ann. of Math. **54** (1951), 425-505.

[43] Y. SINAI, *Dynamical systems*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer, Berlin 1987.

[44] J. STILLWELL, *Classical topology and combinatorial group theory*, Springer, Berlin 1980.

[45] S. TABACHNIKOV, *Billiards*, Univ. of Arkansas, USA 1994.

* * *