Riv. Mat. Univ. Parma (5) 2 (1993), 187-194

LUCIA GRUGNETTI (*)

Il problema inverso delle forze centrali: l'apporto del calcolo differenziale (**)

A Bianca Manfredi con amicizia e stima

1 - Premessa

«I concetti e i principi della dinamica sono il frutto di una laboriosa evoluzione storica. [...] In particolare, a proposito della gravità, tentativi per spiegarla come rientrante in una legge più generale si possono far risalire alle speculazioni dei Greci. I sistemi cosmici dei filosofi Jonici, in ispecie di Anassagora e di Democrito, cercavano appunto di spiegare il meccanismo dell'universo con il giuoco di due forze opposte: l'una centrifuga, nascente dalla rotazione (della Terra o del mondo), e l'altra centripeta» ([11], p. 175, p. 201).

Ma, come è ben noto, solamente con Isaac Newton (1642-1727) e il sistema della gravitazione universale (che offre anche la sintesi degli sviluppi precedenti nel campo dell'astronomia e in quello della dinamica) la problematica della gravità raggiunge uno stadio di maturità.

Certamente già con Galileo la descrizione quantitativa della natura si sostituisce definitivamente alla percezione qualitativa aristotelica e la meccanica è la prima scienza alla quale il *nuovo metodo* venga applicato e servirà da modello per lo studio di altri fenomeni.

Peraltro, ciò che consente a Newton la formulazione di un sistema del mondo basato sulla dinamica celeste, ciò che gli permette di sviluppare il concetto di gravità universale e di esplorarne le conseguenze con la legge gravitazionale è, in particolare, un nuovo approccio al problema delle forze.

(*) Dip. di Matem., Univ. Parma, Via D'Azeglio 85, 43100 Parma, Italia.
(**) Ricevuto il 17.9.1993. Classificazione AMS 01 A 50.

Inoltre, con l'applicazione massiccia della matematica alle altre discipline, la natura dell'attività scientifica viene completamente rivoluzionata.

2 - Il problema diretto delle forze centrali

René Descartes (1596-1650) pensava che vi dovesse essere una forza interna di attrazione verso il sole tale da impedire ai pianeti di uscire dalle loro orbite. In tal senso, Descartes aveva provato ad escogitare una pressione nel vortice solare che provvedesse a questo scopo.

Nel 1674, Christian Huygens (1629-1695) pubblicava nella quinta e ultima parte della sua opera *Horologium Oscillatorium* i suoi studi sulla forza centrifuga (senza peraltro fornire alcuna dimostrazione). Come sottolinea Bos [2], i teoremi di Huygens sulla forza centrifuga datano 1659. In quell'anno, infatti, Huygens aveva scritto un trattato, il *De Vi Centrifuga*, che non aveva però pubblicato; i teoremi che figurano nella quinta parte dell'*Horologium Oscillatorium* sono contenuti in tale trattato pubblicato postumo nel 1703.

Ma a quel tempo la meccanica di Newton aveva superato l'approccio di Huygens alla problematica della forza centrifuga, tanto che i risultati delle leggi di Huygens esercitarono un'influenza molto ridotta sul futuro sviluppo della meccanica.

Nei *Principia* [10] di Newton è la forza gravitazionale che spiega la *forza interna* di attrazione verso il sole. Tale concezione deve, peraltro, molto alle idee di Nicolò Copernico (1473-1543) e di Johann Kepler (1571-1630). Nella sua *Astronomia Nova* [8] del 1609, Keplero annunciava le sue due prime leggi planetarie e, sessant'anni dopo, Newton affermava che *due corpi qualunque si attirano in ragione diretta delle loro masse e in ragione inversa dei quadrati delle loro distanze.* In particolare, nel Primo Libro dei *Principia,* Newton aveva dimostrato il problema diretto delle forze centrali e cioè che le forze centrali relative ad un corpo che si muove su una conica sono inversamente proporzionali al quadrato delle distanze del corpo dal fuoco della curva.

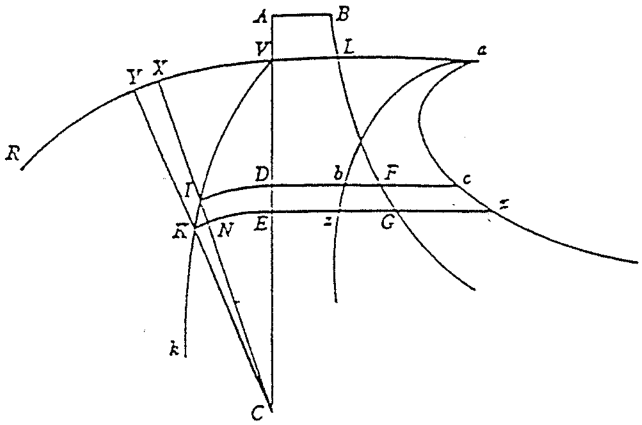
Nel 1689, nel suo *Tentamen de motuum coelestium causis* [9], Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) era pervenuto a risultati analoghi e, successivamente, anche Pierre Varignon (1654-1722) riprendeva il problema di Newton in termini di calcolo differenziale leibniziano. Ma, a differenza degli altri, che si erano occupati solo del problema diretto, Newton aveva analizzato anche il problema inverso: *è possibile determinare l'orbita a partire dalla legge della variazione della forza*?

Una delle sue caratteristiche dei *Principia* è proprio lo sforzo costante di generalizzare i problemi prendendo in considerazione tutte le possibili variazioni di forza e distanza. Newton analizza così orbite e traiettorie come risultato di ogni relazione funzionale di forza e distanza scelte arbitrariamente.

La meccanica razionale, che Newton definisce nella prefazione dei *Principia*, è la scienza dei moti risultanti da una forza qualunque, e delle forze richieste per produrre un qualunque movimento, accuratamente proposte e dimostrate [12].

3 - Il problema inverso delle forze centrali e l'apporto del calcolo differenziale

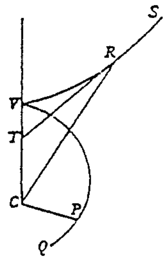
Il problema viene enunciato da Newton come proposizione XLI del Primo Libro dei *Principia* nella forma «Posta una forza centripeta di un qualunque genere e date le quadrature delle figure curvilinee, sono richiesti sia le traiettorie lungo le quali i corpi muoveranno, sia i tempi dei moti lungo le traiettorie trovate».



Il corpo in movimento — secondo il procedimento di Newton — parte dal punto V, in una certa direzione, e si vuole trovare il punto I nel quale si porterà il corpo dopo un certo tempo finito. Tale punto lo si troverà considerando una distanza dal centro C ed una rotazione intorno a C. Queste due grandezze verranno determinate mediante due aree (quadrature), limitate da due curve abz e acx che si tratta di costruire. Mediante tre quadrature, si arriverà a stabilire la posizione del punto I nel quale si troverà il corpo dopo un certo intervallo di tempo. Resta il problema di trovare la forma globale della traiettoria e la sua espressione analitica.

Newton, che nei *Principia* non utilizza il nuovo calcolo, determina in maniera *qualitativa* (F. De Grandt [5]) l'andamento che dovrebbe avere la traiettoria nel caso di una forza proporzionale $1/R$, grazie ad una conica associata ed avendo scelto dal punto V la direzione perpendicolare a CV e, dunque, una direzione molto particolare.

Dice infatti Newton «[...] e se inoltre una forza centripeta, inversamente proporzionale al cubo della distanza dei luoghi dal centro C, e il corpo parte dal luogo V con una velocità adatta e secondo una linea perpendicolare alla retta CV, allora quel corpo avanzerà lungo la traiettoria VPQ su cui giace sempre il punto P; perciò, se la sezione conica VRS è una iperbole, il medesimo discenderà verso il centro [...]».



In effetti Newton, come osserverà nel 1710 Johann Bernoulli (1667-1748) [**1**], ipotizza che l'orbita sia una conica, senza peraltro fare alcuna dimostrazione.

Negli anni 1710 e 1711 lo stesso Johann Bernoulli e Jacob Hermann (1678-1733), allievo del celebre Jacob Bernoulli (fratello di Johann) si occupano del problema inverso delle forze centrali in termini di calcolo differenziale e integrale [**1**], [**6**], [**7**].

Il ricorso al nuovo calcolo consente di risolvere definitivamente e compiutamente il problema inverso delle forze centrali e — come sottolinea Costabel [3] — fissa con precisione il momento in cui la meccanica entra in una nuova fase del suo sviluppo. È la possibilità di scrivere le equazioni del movimento, quindi l'aspetto analitico (espresso in termini di calcolo differenziale) che consente a Bernoulli e a Hermann di porre chiaramente il problema. Solo le equazioni del moto, infatti, consentono di capire cosa sia necessario fare allorché, data la forza, si calcolo la traiettoria, eliminando il tempo.

4 - La soluzione di Hermann

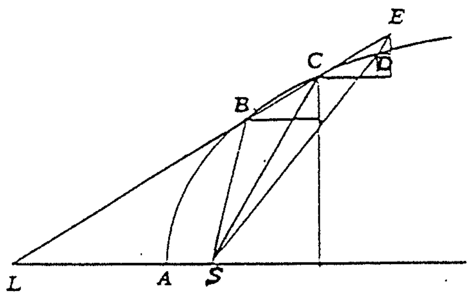
Nell'ambito di diverse pubblicazioni, nonché di un ricco carteggio, Bernoulli e Hermann (in quell'epoca professore di matematica all'Università di Padova dove rimarrà fino al 1713) sviluppano la problematica dando luogo anche ad un dibattito dai toni talvolta molto accesi [7]. I due matematici risolvono il problema dimostrando che le sole orbite possibili sono le sezioni coniche, nel caso della forza in proporzione inversa al quadrato della distanza; Hermann lo risolve anche nel caso di una forza proporzionale a $1/R^n$.

La disputa verte in particolare sulla generalità della dimostrazione di Hermann e, più specificatamente, sulla unicità della soluzione. Bernoulli contesta infatti a Hermann di non aver dimostrato che le sole sezioni coniche risolvono il problema inverso delle forze centrali e questo a causa dell'omissione, nel corso del suo procedimento dimostrativo, di una costante di integrazione. In linea di principio Bernoulli ha ragione, ma, come risponde peraltro Hermann, nel caso specifico in esame, anche senza la costante di integrazione, le sole curve che si ottengono sono le sezioni coniche. Bernoulli insiste e, per andare oltre il caso specifico, nel proporre la propria soluzione, dà anche tre canoni che assicurino la generalità e l'unicità della soluzione.

Le dimostrazioni di Bernoulli e di Hermann sono condotte in termini di calcolo infinitesimale che, come in Leibniz, veniva visto soprattutto come calcolo di tipo geometrico. Il calcolo con i differenziali si attuava infatti utilizzando proprietà geometriche, che valgono al finito, quali, ad esempio, la similitudine dei triangoli. Questo aspetto è ben evidente nella soluzione di Hermann che viene qui di seguito proposta.

Hermann si propone di «Ritrovare curve tali, che descrivendosi dal Pianeta, questo venga spinto con forze centrali in proporzione reciproca de' quadrati delle distanze del Pianeta al Sole, situato in qualche punto fisso dentro l'orbita».

Data la figura



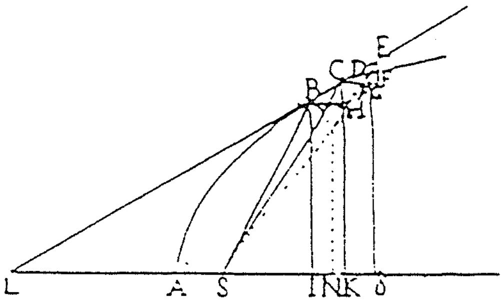
«Si cerca la curva *ABCD* che descriverà il Pianeta, la cui gravità sia in ragione reciproca duplicata dalle distanze del medesimo dal Sole».

Hermann approssima la curva con un poligono in cui i lati sono infinitesimi del primo ordine e considera S come il centro delle forze (il sole). Pone

$BC = CE = \mathrm{d}s$, dove CE è il prolungamento di BC. Considerando il segmento ED, parallelo a CS, Hermann spiega che, in assenza di forza centrale, il corpo avrebbe percorso CE nello stesso tempo impiegato a percorrere BC. A causa dell'azione della forza centrale il corpo, in tale intervallo di tempo, arriva solamento nel punto D.

Hermann prende la forza centrale proporzionale a ED, che rappresenta, quindi, la deviazione causata dall'azione della forza centrale nell'elemento di tempo.

Considerata la figura



Hermann pone $SK = x$, $CK = y$, da cui $SC = \sqrt{xx + yy}$; pone inoltre:

$$BH = CG = \mathrm{d}x \qquad CH = EG = \mathrm{d}y \qquad DF = CG - Cf = -\mathrm{dd}x \qquad EF = EG - Df = -\mathrm{dd}y\,.$$

Per la legge delle aree di Keplero, i triangoli CSD e BSC hanno la stessa area, espressa dalla quantità

$$\frac{1}{2}(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)\,.$$

Infatti si ha:

$$2BCS = 2BSH + 2BCH - 2CSH = HK\cdot BH + BH\cdot CH - SK\cdot CH$$

$$= (y - \mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - x\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y\,.$$

Inoltre, dalla similitudine dei triangoli EDF e CSK si ha $ED : SC = DF : SK$ e cioè $ED : \sqrt{x^2 + y^2} = -\mathrm{dd}x : x$. Quindi $ED = \dfrac{-\mathrm{dd}x\sqrt{x^2+y^2}}{x}$.

Poiché la forza centrale è inversamente proporzionale al quadrato della distanza, sarà proporzionale a

$$\frac{1}{x^2 y^2}$$

o anche, per osservare la legge degli omogenei, come dice Hermann, sarà uguale a

$$\frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{a(x^2 + y^2)}$$

(essendo $y\,dx - x\,dy$ il doppio dell'area del triangolo *costante BSC* ed a una costante). In tal modo Hermann ottiene l'equazione

$$\frac{a\,ddx\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

che, integrata, diventa

$$-\frac{ab\,dx}{x^2} = \frac{bxy\,dy - by^2\,dx}{x^2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

dove b è una costante. Il suo integrale $a + \frac{cx}{b} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (dove anche c, oltre ad a e b, è una costante) rappresenta, come è ben evidente, una *sezione conica*.

Bibliografia

[1] E. J. AITON, *The contribution of Isaac Newton, Johann Bernoulli and Jakob Hermann to the inverse problem of centrales forces*, Studia Leibnitiana, Sondhereft **17** (1989), 48-58.

[2] H. J. M. BOS, *Introduction to Christiaan Huygens' Horologium Oscillatorium*, nella traduzione inglese dell'Horologium Oscillatorium a cura di R. J. Blackwell, Iowa State Univ. Press, 1986.

[3] I. B. COHEN, *The Newtonian revolution*, Cambridge Univ. Press, 1971.

[4] P. COSTABEI und J. PFEIFER, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, **3**, Basel 1992.

[5] F. DE GANDT, *Le problème inverse (prop. 39-41)*, Rev. Hist. Sci. **40** (1987), 281-309.

[6] S. GIUNTINI, *Jacopo Riccati e il problema inverso delle forze centrali*, Atti Convegno Internaz.: I Riccati e la cultura della Marca nel Settecento europeo, Castelfranco Veneto 1990, Olschki, Firenze 1992.

[7] L. GRUGNETTI, *Geometria e fisica del problema inverso delle forze centrali*, in F. Speranza Epistemologia della Matematica, Seminari 1989-1991, Quaderno CNR 10 (1992), 203-214.

[8] J. KEPLER, *Astronomia nova sive physica coelestis tradita commentariis de motibus stellae Martis et.*, Prag 1609.

[9] G. W. LEIBNIZ, *Tentamen de motuum coelestium causis*, Acta Eruditorum, Leipzig (1689), 82-96.

[10] I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londini, Iussu Societatis Regiae Josephi Streater, 1687.

[11] I. NEWTON, *Principii di filosofia naturale. Teoria della Gravitazione*, con note critiche sullo sviluppo dei concetti della meccanica per cura di F. Enriques e U. Forti, Stocks, Roma 1925.

[12] R. S. WESTFALL, *Force in Newton's phisics*, Macdonald, London 1971.

Summary

In a section of the Principia *(1687), Isaac Newton states the inverse problem of central forces and shows how to determine the orbit, given the initial conditions, but no justification is offered.*

Johann Bernoulli and Jacob Hermann independently proved, by the differential calculus, that the conic sections were the only possible orbits in the case of an inverse-square law of force.

* * *