Riv. Mat. Univ. Parma (5) 2 (1993), 149-158

C. SILLI e P. CARGIOLLI (*)

Alcune osservazioni sul teorema delle forze vive nei continui bidimensionali (**)

A Bianca Manfredi con amicizia e stima

1 - Introduzione

C. Silli nel lavoro [6] esamina il teorema delle forze vive in un continuo unidimensionale in cui, nella configurazione attuale, ci sia un *fronte di discontinuità* per alcune grandezze caratteristiche del fenomeno in esame, teorema che in generale non è valido nella sua espressione classica quando siamo in presenza di discontinuità [2].

Scopo di questa nota è quello di esaminare questo stesso teorema nel caso di un continuo *a due dimensioni* in modo analogo a come è stato fatto nel continuo a una dimensione [6].

Si esamina il caso di una membrana perfettamente flessibile e il caso di una superfice materiale imperfettamente flessibile in presenza anche di momenti esterni distribuiti e dotata di una particolare struttura. Si mostra, in entrambi i casi, quali sono le condizioni da imporre alle grandezze fisiche in esame affinché il teorema delle forze vive abbia ancora l'espressione classica quando siamo in presenza di discontinuità, trovando dei risultati in gran parte simili a quelli ottenuti per i continui unidimensionali. Anche in questa nota si fà infine un'osservazione sulla continuità del momento delle forze interne, collegando quest'ultima alla particolare struttura assunta per il continuo bidimensionale.

(*) Dip. di Matem., Univ. Pisa, Via F. Buonarroti 2, 56127 Pisa, Italia.
(**) Ricevuto il 24.6.1993. Classificazione AMS 73 D 20. Lavoro eseguito nell'ambito del Progetto MURST 60% *Oscillazioni termoelettriche. Onde e stabilità. Lubrificazione idrodinamica.*

2 - Il caso della membrana

Caso **a.** Sia S una superfice materiale soggetta a sole forze esterne distribuite e in cui lo sforzo interno sia tutto situato nel piano tangente alla superfice stessa e cioè sia S una membrana e siano ora, durante il moto, continue tutte le grandezze caratteristiche del fenomeno in esame.

La *prima equazione cardinale* per una porzione σ di S, nella configurazione attuale σ_t, di contorno γ è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\sigma \rho \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\sigma = \int_\sigma \rho \boldsymbol{f} \mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{t}_n \mathrm{d}\gamma \tag{2.1}$$

con $\boldsymbol{f}$ forza specifica di massa e $\boldsymbol{t}_n$ sforzo che si esercita lungo il bordo γ.

Per il lemma di Cauchy per le superfici materiali [3] che è $\boldsymbol{t}_n = \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{n}$, e per il teorema della divergenza, sempre per superfici non necessariamente piane [1], si ha

$$\int_\gamma \boldsymbol{t}_n \mathrm{d}\gamma = \int_\sigma \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\, \mathrm{d}\sigma$$

con $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$ tensore degli sforzi interni della membrana stessa.

È quindi per l'*equazione di moto* di S

$$\rho \boldsymbol{a} = \rho \boldsymbol{f} + \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{T}} \tag{2.2}$$

dove per la simmetria di $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$ la divergenza è unica e data da [1]

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{T}} = \Big(\frac{\partial T^{\alpha\gamma}}{\partial x^\alpha} + T^{\beta\gamma}\left\{ {\alpha \atop \beta\ \alpha} \right\} + T^{\alpha\beta}\left\{ {\gamma \atop \beta\ \alpha} \right\}\Big) \frac{\partial P}{\partial x^\gamma} \tag{2.3}$$

con $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$, (x^1, x^2) sistema di coordinate curvilinee nella configurazione attuale σ_t di S, $T^{\lambda\mu}$ componenti controvarianti rispetto a (x^1, x^2) del tensore degli sforzi $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$ situato nel piano tangente a σ_t e $\left\{ {\lambda \atop \mu\ \nu} \right\}$ simboli di Christoffel di seconda specie.

Si ha dall'equazione di moto il *teorema delle forze vive* che, per la porzione σ di contorno γ della membrana S nella configurazione attuale σ_t, è

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\sigma \rho v^2 \mathrm{d}\sigma = \int_\sigma \rho \boldsymbol{f}\cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\gamma - \int_\sigma \operatorname{tr}(\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\ \operatorname{grad} \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\sigma . \tag{2.4}$$

Caso **b.** Sia ancora S una membrana e, nella sua configurazione attuale σ_t al tempo t, vi sia una linea di discontinuità γ_t per alcune grandezze caratteristiche del fenomeno in esame, linea questa che divide in due la superfice σ_t stessa. La velocità di propagazione della discontinuità è data, in ogni punto P della linea Γ_t, corrispondente di γ_t nella configurazione di riferimento Σ, da $U_N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{PP'}{\Delta t}$ essendo P' l'intersezione di $\Gamma_{t+\Delta t}$ col piano ortogonale a Γ_t in P e $\boldsymbol{N}$ il versore normale a Γ_t nel piano tangente a Σ.

α - Per l'*equazione di moto* per la membrana S nella configurazione attuale σ_t sussiste ancora la (2.2), relazione questa che vale in ogni punto P della configurazione σ_t che non si trovi sulla linea di discontinuità γ_t.

Infatti, con procedimento simile a quello seguito per un continuo unidimensionale [**6**], si consideri una superfice σ' di contorno γ', appartenente a una delle due porzioni σ^+ e σ^- della superfice σ_t, separate da γ_t, che non abbia nessun punto in comune con la γ_t stessa.

Si ha in σ_t per σ'

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\sigma'} \rho \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\sigma' = \int_{\sigma'} \rho \boldsymbol{f} \mathrm{d}\sigma' + \int_{\gamma'} \underset{\sim}{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\gamma'$$

e per il modo come è stata scelta σ' in σ_t si ha ancora

$$\int_{\sigma'} \rho \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}\sigma' = \int_{\sigma'} \rho \boldsymbol{f} \mathrm{d}\sigma' + \int_{\sigma'} \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\, \mathrm{d}\sigma' .$$

Anche qui, come in [**6**], per la regolarità di tutte le grandezze in σ' (contorno incluso) della membrana S in σ_t dalla precedente segue la (2.2) in tutti i punti P di σ_t distinti dai punti della linea γ_t.

β - Considerate ora due linee $\gamma_1 \subset \sigma^-$ e $\gamma_2 \subset \sigma^+$ di σ_t, situate da bande opposte rispetto alla linea di discontinuità γ_t e tali che abbiano i loro estremi in comune in due punti di γ_t, indicate poi con $\sigma_1 \subset \sigma^-$ e $\sigma_2 \subset \sigma^+$ le porzioni della superfice $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \subset \sigma_t$ delimitate rispettivamente da γ_1 e γ_t e da γ_2 e γ_t, si ha

$$\int_{\sigma_k} \rho \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\sigma_k} \rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\sigma + \int_{\sigma_k} \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\, \mathrm{d}\sigma \qquad k = 1, 2 \tag{2.5}$$

essendo le discontinuità in γ_t di prima specie.

Facendo i limiti di $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}$ per $P \in \sigma$ che tende a γ_t rispettivamente da σ^- e da σ^+ si ha:

$$\boldsymbol{a}^- \cdot \boldsymbol{v}^- = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}\right)^- \qquad \boldsymbol{a}^+ \cdot \boldsymbol{v}^+ = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}\right)^+ .$$

È ora da queste ultime e dalla (2.5):

$$\frac{1}{2}\int_\sigma \rho \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\sigma = \int_\sigma \rho \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\sigma \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{div}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\,\mathrm{d}\sigma \tag{2.6}$$

con $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ di contorno completo γ.

Si ha ora dal primo membro della precedente, passando attraverso la configurazione di riferimento Σ e tenendo conto della discontinuità in γ_t [4]

$$\frac{1}{2}\int_\sigma \rho \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\sigma \rho \boldsymbol{v}^2\,\mathrm{d}\sigma + \int_{\gamma_t} \frac{\rho_0}{2J'}[\boldsymbol{v}^2]\,U_N\,\mathrm{d}\gamma \tag{2.7}$$

con ρ_0 densità di S in Σ, che supponiamo continua, con $[\boldsymbol{v}^2]$ discontinuità di $\boldsymbol{v}^2$ attraverso γ_t, T energia cinetica di σ e $J' = \dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\Gamma}$ (con $\mathrm{d}\gamma \in \sigma_t$ e $\mathrm{d}\Gamma \in \Sigma$ fra loro corrispondenti) continuo attraverso γ_t [5].

Anche nel seguito la discontinuità di una grandezza g attraverso γ_t viene indicata con $[g]$.

Ora il secondo membro della (2.6), restando nella configurazione attuale σ_t e tenendo conto della discontinuità attraverso γ_t, diviene

$$\int_\sigma \rho \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma - \int_\sigma \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\ \mathrm{grad}\,\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\sigma - \int_{\gamma_t}[\boldsymbol{v}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{n}]\,\mathrm{d}\gamma\,.$$

Quindi dalle (2.6), (2.7) segue

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\sigma \rho \boldsymbol{v}^2\,\mathrm{d}\sigma + \int_{\gamma_t} \frac{\rho_0}{2J'}[\boldsymbol{v}^2]\,U_N\,\mathrm{d}\gamma \\ &= \int_\sigma \rho \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma - \int_\sigma \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\ \mathrm{grad}\,\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\sigma - \int_{\gamma_t}[\boldsymbol{v}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{n}]\,\mathrm{d}\gamma\,.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Si ha quindi che nel caso in cui nella membrana S vi sia, nella configurazione attuale σ_t, un fronte d'onda lungo γ_t per alcune grandezze caratteristiche del fenomeno in esame, *il teorema delle forze vive non vale più nella sua espressione classica.*

Poiché le considerazioni ora fatte valgono per una qualsiasi sottosuperfice σ di σ_t, che sia tagliata dal fronte d'onda γ_t, si ha che la *condizione* affinché anche in questo caso della dicontinuità il teorema delle forze vive abbia l'espressione classica è

$$\frac{\rho_0}{2J'}[\boldsymbol{v}^2]\,U_N + [\boldsymbol{v}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{n}] = 0 \tag{2.9}$$

espressione del tutto analoga a quella ottenuta per un filo perfettamente flessibile [6].

γ - Si ha ora per il primo principio della termodinamica applicato a una sottosuperfice σ, contenente la linea di discontinuità γ_t, della membrana S nella configurazione attuale σ_t

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\sigma \rho\Big(\frac{v^2}{2}+e\Big)\mathrm{d}\sigma=\int_\sigma \rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma+\int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma+\int_\sigma h\,\mathrm{d}\sigma+\int_\gamma \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma$$

col noto significato dei simboli.

Dalla precedente discende la *relazione di discontinuità*

$$\rho_0[e]\,U_N+\frac{1}{2}\rho_0\,[v^2]\,U_N+[\boldsymbol{v}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{n}]J'+[\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}]J'=0\,.$$

Confrontando adesso quest'ultima con la (2.9) si ha che, in questo caso della membrana, la *condizione* da imporre alle grandezze fisiche in esame affinché il teorema delle forze vive valga nella sua espressione classica, in presenza di un fronte di discontinuità, è

$$\rho_0[e]\,U_N+[\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}]J'=0 \tag{2.10}$$

espressione, anche questa come la (2.9), analoga a quella ottenuta per un filo perfettamente flessibile [6].

3 - Il caso della superfice materiale con struttura

a - Sia ora S un continuo bidimensionale in cui lo sforzo interno (una volta assegnato su di esso un sistema di coordinate curvilinee) è individuato in ogni suo punto dai due sforzi $\boldsymbol{t}_1$ e $\boldsymbol{t}_2$ e dai due momenti $\boldsymbol{M}_1$ e $\boldsymbol{M}_2$, vettori tutti questi non necessariamente situati nel piano tangente, soggetto oltre che a forze anche a momenti esterni distribuiti e tale che ogni suo elemento σ'' oltre che di una velocità di traslazione $\boldsymbol{v}$ sia dotato di una velocità di rotazione $\boldsymbol{\omega}$. Siano ora, durante il moto, continue tutte le grandezze del fenomeno in esame.

La *prima equazione cardinale* per una generica sottosuperfice σ della configurazione attuale σ_t, del continuo bidimensionale S in esame, di contorno γ è ancora la (2.1).

Si ha poi per la *seconda equazione cardinale* sempre per $\sigma\in\sigma_t$, riferita a un centro di riduzione O fisso

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\sigma \rho((P\text{-}O)\wedge \boldsymbol{v} + \delta^2\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_\sigma \rho(P\text{-}O)\wedge \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma (Q\text{-}O)\wedge \boldsymbol{t}\,\mathrm{d}\gamma + \int_\sigma \rho\boldsymbol{m}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}\gamma \end{aligned}$$

dove P è il generico punto di σ, Q il generico punto di γ, δ il giratore d'inerzia dell'elemento di superfice σ'' di S in σ_t rispetto alla parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ per σ'' stesso, $\rho\boldsymbol{m}$ per il momento specifico esterno distribuito, $\boldsymbol{M}$ il momento interno e dove nel momento della quantità di moto è stato aggiunto il termine polare.

L'*equazione di moto* è ancora la (2.2) e la divergenza, anche in questo caso unica, è ancora espressa dalla (2.3) dove però $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$, (x^1, x^2) è ancora sistema di coordinate curvilinee tracciate sulla configurazione attuale σ_t di S, x^3 è una terza coordinata curvilinea ortogonale a σ_t, $T^{\lambda\mu}$ sono le componenti controvarianti rispetto a (x^1, x^2, x^3) del tensore spaziale $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$ degli sforzi $\boldsymbol{t}_1$ e $\boldsymbol{t}_2$ e $\left\{{\lambda \atop \mu\ \nu}\right\}$ sono anche qui simboli di Christoffel di seconda specie.

Analogamente dalla (3.1) e per l'equazione di moto (2.2), nell'ipotesi che *il giratore δ di σ'' non dipenda dal tempo t* (ipotesi ad esempio verificata nel caso in cui S è inestendibile), si ha la *relazione puntuale*

$$(3.2)\qquad \rho\delta^2\dot{\boldsymbol{\omega}} = \rho\boldsymbol{m} + \operatorname{div}\underset{\sim}{\boldsymbol{M}} - \boldsymbol{T}^i\wedge\frac{\partial P}{\partial x^i}$$

dove è analogamente anche per questa divergenza unica

$$\operatorname{div}\underset{\sim}{\boldsymbol{M}} = \left(\frac{\partial M^{\alpha\gamma}}{\partial x^\alpha} + M^{\beta\gamma}\left\{{\alpha \atop \beta\ \alpha}\right\} + M^{\alpha\beta}\left\{{\gamma \atop \beta\ \alpha}\right\}\right)\frac{\partial P}{\partial x^\gamma}$$

con $M^{\lambda\mu}$ componenti controvarianti rispetto a (x^1, x^2, x^3) del tensore spaziale $\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}$ dei momenti $\boldsymbol{M}_1$ e $\boldsymbol{M}_2$.

Dall'equazione di moto si ha, per la porzione σ di contorno γ del continuo bidimensionale S nella configurazione attuale σ_t, la relazione

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\sigma \rho v^2\,\mathrm{d}\sigma = \int_\sigma \rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma - \int_\sigma \operatorname{tr}(\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\operatorname{grad}\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\sigma$$

dove $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T$ è il trasposto di $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$.

Dalla (3.2), con ragionamento del tutto simile a quello seguito per ottenere dall'equazione di moto (2.2) la precedente, si ha ora per la porzione σ di contorno

γ di S in σ_t l'ulteriore relazione

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\sigma \rho\delta^2\omega^2\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_\sigma \rho\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\sigma+\int_\gamma \boldsymbol{\omega}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma-\int_\sigma \mathrm{tr}\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\ \mathrm{grad}\,\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}\sigma-\int_\sigma \boldsymbol{T}^i\wedge\frac{\partial P}{\partial x^i}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

Sommando membro a membro quest'ultima con la precedente si ha

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\sigma \rho(\boldsymbol{v}^2+\delta^2\omega^2)\,\mathrm{d}\sigma=\int_\sigma \rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma+\int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma-\int_\sigma \mathrm{tr}\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\ \mathrm{grad}\,\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\sigma$$

$$-\int_\sigma \boldsymbol{T}^i\wedge\frac{\partial P}{\partial x^i}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\sigma+\int_\sigma \rho\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\sigma+\int_\gamma \boldsymbol{\omega}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma-\int_\sigma \mathrm{tr}\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\ \mathrm{grad}\,\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}\sigma$$

che è il *teorema delle forze vive* nel caso del continuo S bidimensionale in esame nell'ipotesi della continuità di tutte le grandezze caratteristiche e dove l'energia cinetica T e il momento della quantità di moto $\boldsymbol{K}$, per la porzione σ di S in σ_t, sono date da:

$$T=\frac{1}{2}\int_\sigma \rho(\boldsymbol{v}^2+\delta^2\omega^2)\,\mathrm{d}\sigma\qquad \boldsymbol{K}=\int_\sigma \rho((P\text{-}O)\wedge\boldsymbol{v}+\delta^2\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}\sigma\,. \tag{3.3}$$

b - Nelle stesse ipotesi, di cui al precedente punto **a** di questo numero per la superfice materiale S, supponiamo (come nel numero precedente per la membrana) che nella configurazione attuale σ_t al tempo t vi sia una linea di discontinuità γ_t per alcune grandezze caratteristiche del fenomeno in esame, linea questa che divide in due la superfice σ_t stessa, essendo ancora U_N la velocità di propagazione della discontinuità attraverso γ_t.

α - Dalla prima equazione cardinale (2.1) si deduce, in modo analogo a quanto fatto nel paragrafo precedente per la membrana, l'*equazione di moto* del continuo S che è ancora la (2.2) in ogni punto P della configurazione σ_t che non si trovi sulla linea di discontinuità γ_t. Dalla seconda equazione cardinale (3.1) discende ancora la (3.2) in tutti i punti P di S in σ_t distinti da γ_t.

β - In modo analogo a come è stato fatto nel numero 2 (caso **b**, punto β), per una membrana con linea di discontinuità γ_t nella configurazione attuale σ_t, si ha ora dalla (2.2) per la sottosuperfice $\sigma\in\sigma_t$ delimitata dal contorno γ e tagliata dalla linea di discontinuità γ_t la *relazione*

$$
\begin{aligned}
(3.4)\qquad &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\sigma \rho \boldsymbol{v}^2 \mathrm{d}\sigma + \int_{\gamma_t} \frac{\rho_0}{2J'}[\boldsymbol{v}^2]\, U_N \mathrm{d}\gamma \\
&= \int_\sigma \rho \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma - \int_\sigma \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T \,\mathrm{grad}\,\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\sigma - \int_{\gamma_t}[\boldsymbol{v}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\boldsymbol{n}]\,\mathrm{d}\gamma\,.
\end{aligned}
$$

Dalla (3.2), moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{\omega}$, integrando sulla sottosuperfice σ di σ_t e tenendo conto anche qui della discontinuità attraverso γ_t, si ha, con procedimento analogo a quello seguito nel numero 2, l'uguaglianza

$$
\begin{aligned}
(3.5)\qquad &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\sigma \rho\delta^2\omega^2 \mathrm{d}\sigma + \int_{\gamma_t} \frac{\rho_0}{2J'}[\delta^2\omega^2]\, U_N \mathrm{d}\gamma = \int_\sigma \rho\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\sigma \\
&+ \int_\gamma \boldsymbol{\omega}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma - \int_\sigma \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\,\mathrm{grad}\,\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}\sigma - \int_\sigma \boldsymbol{T}^i \wedge \frac{\partial P}{\partial x^i}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\sigma - \int_{\gamma_t}[\boldsymbol{\omega}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\boldsymbol{n}]\,\mathrm{d}\gamma\,.
\end{aligned}
$$

Sommando membro a membro le (3.4), (3.5) si ha

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\sigma \rho(\boldsymbol{v}^2 + \delta^2\omega^2)\,\mathrm{d}\sigma + \int_{\gamma_t}\frac{\rho_0}{2J'}[\boldsymbol{v}^2 + \delta^2\omega^2]\,U_N\mathrm{d}\gamma \\
&= \int_\sigma \rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma - \int_\sigma \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\,\mathrm{grad}\,\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\sigma - \int_\sigma \boldsymbol{T}^i\wedge\frac{\partial P}{\partial x^i}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\sigma \\
&+ \int_\sigma \rho\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{\omega}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma - \int_\sigma \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\,\mathrm{grad}\,\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}\sigma - \int_{\gamma_t}[\boldsymbol{v}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\omega}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\boldsymbol{n}]\,\mathrm{d}\gamma\,.
\end{aligned}
$$

Questa relazione ci dà il *teorema delle forze vive* per la porzione σ della configurazione attuale σ_t del continuo bidimensionale S con struttura in esame, quando questa porzione è tagliata da una linea di discontinuità essendo ancora l'energia cinetica T e il momento della quantità di moto $\boldsymbol{K}$ dati dalle (3.3).

Risulta anche qui, come nel paragrafo precedente per la membrana, che in presenza di una linea di discontinuità *il teorema delle forze vive non vale più nella sua forma classica.*

Poiché anche qui le considerazioni ora fatte valgono per una qualsiasi sottosuperfice σ di σ_t, che sia tagliata dal fronte d'onda γ_t, si ha che la *condizione* affinché, anche in questo caso della dicontinuità, il teorema delle forze vive abbia l'espressione classica è che risulti

$$
(3.6)\qquad \frac{\rho_0}{2J'}[\boldsymbol{v}^2 + \delta^2\omega^2]\,U_N + [\boldsymbol{v}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\omega}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^T\boldsymbol{n}] = 0\,.
$$

γ - Si ha ora per il primo principio della termodinamica per la porzione σ del continuo S nella configurazione attuale σ_t

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\sigma \rho(v^2 + \delta^2\omega^2 + 2e)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_\sigma h\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma + \int_\sigma \rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma + \int_\sigma \rho\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{\omega}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma$$

col noto significato dei simboli.

Sempre nell'ipotesi che la porzione σ della configurazione attuale σ_t sia tagliata dalla linea di discontinuità γ_t si ha col procedimento usato più volte dalla precedente la *relazione di discontinuità*

$$\frac{1}{2}\rho_0[\boldsymbol{v}^2 + \delta^2\omega^2 + 2e]\,U_N + [\boldsymbol{v}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\omega}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{n}]\,J' + \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\,J' = 0\,.$$

Non essendo ora i due tensori $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$ e $\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}$ in generale simmetrici non si può in generale affermare, dal confronto di quest'ultima con la (3.6), che la condizione da imporre alle grandezze fisiche affinché il teorema delle forze vive valga nella forma classica sia ancora la (2.10) che valeva nel caso delle membrane.

4 - Un'osservazione sul momento delle forze interne

Anche nel caso del continuo bidimensionale sembra utile fare una osservazione sul momento delle forze interne.

Nelle ipotesi assunte al numero 3 per il continuo bidimensionale S, la seconda equazione cardinale per la sottosuperfice σ, tagliata dalla linea di discontinuità γ_t, della configurazione attuale σ_t è la (3.1).

Lavorando sul primo membro col procedimento usato più volte in [4] per ottenere le relazioni di discontinuità si ha

$$\int_\sigma \rho((P\text{-}O)\wedge\boldsymbol{a} + \delta^2\dot{\boldsymbol{\omega}})\,\mathrm{d}\sigma - \int_{\gamma_t}\frac{\rho_0}{J'}((F\text{-}O)\wedge[\boldsymbol{v}] + [\delta^2\boldsymbol{\omega}])\,U_N\,\mathrm{d}\gamma$$

$$= \int_\sigma \rho(P\text{-}O)\wedge\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma (Q\text{-}O)\wedge\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}\gamma + \int_\sigma \rho\boldsymbol{m}\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}\gamma$$

dove F è il punto generico su γ_t.

Da questa, col solito procedimento di passaggio al limite, tenendo conto del fatto che la superfice $\sigma \in \sigma_t$ tagliata da γ_t è arbitraria e usufruendo della relazione di discontinuità dedotta dalla prima equazione cardinale segue infine la *relazione*

$$\frac{\rho_0}{J'}\,[\delta^2\,\omega]\,U_N + [M] = 0\,.$$

Anche nel caso del continuo bidimensionale con struttura, come nel caso unidimensionale [6], si ha che *il momento delle forze interne non è in generale continuo attraverso il fronte d'onda*, essendo proprio la sua discontinuità legata alla presenza del vettore di rotazione ω dei suoi singoli elementi.

Bibliografia

[1] A. E. GREEN and W. ZERNA, *Theoretical elasticity*, Clarendon Press, Oxford 1968.

[2] T. MANACORDA, *Qualche osservazione sulle equazioni di bilancio dei continui in presenza di un'onda d'urto*, Nota Interna Ist. Mat. App., Fac. Ing. Univ. Pisa (1983).

[3] P. M. NAGHDI, *The theory of shell and plates*, S. Flugge, Encyclopedia of physics 6a/2, C. Truesdell, Mechanics of solids 2, Springer, Berlin 1972.

[4] C. SILLI, *Sulle onde straordinarie di discontinuità in una membrana termoelastica*, Boll. Un. Mat. Ital. 8 (1973), 518-536.

[5] C. SILLI, *Alcune osservazioni sulle onde straordinarie di discontinuità in una membrana*, Riv. Mat. Univ. Parma 5** (1979), 557-565.

[6] C. SILLI, *Alcune osservazioni sul teorema delle forze vive nei continui unidimensionali*, Ann. Univ. Ferrara 38 (1992), 27-39.

Summary

We consider either a perfectly flexible membrane or a material surface not perfectly flexible, the latter endowed with a structure and subjected also to distributed external moments.

When some discontinuity is present in the material, the classical version of the work-kinetic energy theorem is no more valid in either case. However the theorem is still valid under suitable conditions on the physical objects. Here we obtain the conditions to be imposed in the above mentioned cases.

* * *