Riv. Mat. Univ. Parma (5) 2 (1993), 29-44

LUCILLA BASSOTTI RIZZA (*)

Uno schema alle differenze finite per problemi ellittici che conserva le proprietà di simmetria (**)

A Bianca Manfredi con amicizia e stima

Introduzione

Si consideri un aperto limitato e connesso Ω dello spazio $\boldsymbol{R}^n$, simmetrico rispetto agli iperpiani $x_i = 0$, e un *operatore differenziale ellittico L del secondo ordine*, invariante rispetto al gruppo G di congruenze generato dalle simmetrie che mutano in sé Ω. È noto che, se f è una funzione pari o dispari nelle variabili $x_1, \dots, x_n$, la soluzione del problema di Dirichlet $Lu = f$ in Ω, $u = 0$ su $\partial\Omega$, è anche essa funzione pari o dispari delle stesse variabili. Se si considerano gli schemi alle differenze finite più usati nella letteratura, la soluzione fornita da questi schemi non gode, in generale, di proprietà di simmetria.

In questo lavoro si considera uno *schema alle differenze* per il problema di Dirichlet, che fornisce una soluzione u (definita su un insieme finito) con alcune *proprietà di simmetria*. Si costruisce inoltre una funzione u', interpolante u, che possiede le proprietà di simmetria della soluzione esatta u^*. Inoltre, quando il diametro della griglia tende a zero, u' tende ad u^*.

Se l'aperto Ω è simmetrico rispetto ad un iperpiano $x_i = x_j$ e la griglia è scelta convenientemente, la soluzione approssimata u' è una funzione simmetrica o antisimmetrica delle variabili x_i, x_j, se tale è f.

(*) Dip. di Matem., Univ. Parma, Via M. D'Azeglio 85, 43100 Parma, Italia.
(**) Ricevuto il 6.4.1993. Classificazione AMS 65 N 06. Lavoro eseguito nell'ambito del progetto nazionale MURST 40% Analisi numerica e matematica computazionale.

1 - Insiemi invarianti rispetto ad un gruppo G

Sia Ω un aperto limitato e connesso di $\boldsymbol{R}^n$, $\partial\Omega$ la frontiera di Ω e $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Fissata un n-pla $h \equiv (h_1, \ldots, h_n)$ di numeri strettamente positivi, si suddivida lo spazio $\boldsymbol{R}^n$ per mezzo degli iperpiani di equazione $x_i = k_i h_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, ove k_i sono arbitrari interi relativi $(k_i \in Z)$, in celle ω_{kh} definite dalle diseguaglianze

$$k_i h_i < x_i < (k_i + 1) h_i \qquad i = 1, \ldots, n . \tag{1.1}$$

Nel seguito kh indicherà la n-pla $(k_1 h_1, \ldots, k_n h_n)$. L'insieme

$$\Lambda_h \equiv \{x \in \boldsymbol{R}^n \,|\, x = kh, \;\; k \in Z^n\}$$

di tutti i vertici delle celle ω_{kh} sarà detto *griglia* e i suoi punti saranno chiamati *punti griglia*. Sia $\bar{P}_h$ l'unione di tutti gli insiemi $\bar{\omega}_{kh}$ contenuti in $\bar{\Omega}$, P_h l'interno di $\bar{P}_h$. Si ponga

$$\Omega_h \equiv \Lambda_h \cap P_h \qquad \bar{\Omega}_h \equiv \Lambda_h \cap \bar{P}_h . \tag{1.2}$$

Gli insiemi Ω_h, $\bar{\Omega}_h$ sono finiti, essendo Ω limitato. I punti di Ω_h sono detti *punti griglia interni* ad Ω. Se $x \in \Omega_h$, ogni cella che ha x come uno dei vertici è contenuta in $\bar{\Omega}$. Ne segue che, se e_i denota l'i-esimo punto unitario (di coordinate tutte nulle eccettuata l'i-esima uguale a 1), i punti $x \pm h_i e_i$, $x \pm h_i e_i \pm h_j e_j$ $(i \neq j)$ appartengono a $\bar{\Omega}_h$.

Ciò premesso, si consideri il *gruppo delle congruenze di $\boldsymbol{R}^n$ che lasciano fissa l'origine*. Esso si può identificare con il gruppo $O(n)$ delle matrici ortogonali di ordine n; le simmetrie corrispondono a matrici a quadrato identico.

Un insieme E di $\boldsymbol{R}^n$ si dice *invariante rispetto ad un gruppo G* di congruenze di $\boldsymbol{R}^n$, se ogni elemento γ di G muta in sé l'insieme E.

Il gruppo G_0 generato da tutte le simmetrie rispetto agli iperpiani di equazione $x_i = 0$ consta di 2^n elementi e si identifica col gruppo delle matrici diagonali di ordine n di elementi $\varepsilon_r \delta_{rs}$ con $\varepsilon_r = \pm 1$ (δ_{rs} è il simbolo di Kronecker, δ la matrice identica); la simmetria γ_i rispetto all'iperpiano $x_i = 0$ si ottiene ponendo $\varepsilon_i = -1$ e $\varepsilon_r = 1$ se $r \neq i$.

Un insieme E è invariante rispetto a G_0 se e solo se è simmetrico rispetto a tutti gli iperpiani di equazione $x_i = 0$. La griglia Λ_h è ovviamente invariante rispetto a G_0.

Se i numeri $h_1, \ldots, h_n$ non sono tutti distinti, la griglia è anche invariante rispetto a gruppi più ampi di G_0. In particolare, se $h_1 = h_2 = \ldots = h_n$, Λ_h è invariante rispetto al gruppo G^* di tutte le congruenze che mutano in sé l'n-cubo $K = \{x \mid |x_i| < 1\}$ e, ovviamente, ai sottogruppi di G^*.

Si osservi che, fissato arbitrariamente h, esiste un gruppo G', con $G_0 \subseteq G' \subseteq G^*$, tale che la griglia Λ_h è invariante rispetto a G' e non è invariante rispetto a gruppi contenenti propriamente G'.

Ricordo che il gruppo G^* consta di $2^n n!$ elementi e si identifica con il gruppo delle matrici ottenute permutando le righe o le colonne delle matrici di G_0: esso contiene le simmetrie γ_{ij} rispetto agli iperpiani di equazione $x_i = x_j$; precisamente, le simmetrie γ_i e γ_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n;\ i < j)$ sono generatori di G^*.

In questo lavoro supporrò Ω *dotato di qualche proprietà di simmetria* e precisamente invariante rispetto ad un gruppo G contenente almeno una simmetria di G_0 oltre l'identità; di conseguenza Ω_h e $\bar{\Omega}_h$ risulteranno invarianti rispetto al gruppo $G \cap G'$ contenente almeno una simmetria.

2 - Operatori differenziali invarianti rispetto a G

Sia L un operatore differenziale lineare ellittico del secondo ordine, definito sulle funzioni di $C^2(\Omega)$ nel modo seguente

$$Lu = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + \sum_j b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)\, u \qquad a_{ji} = a_{ij}\,. \tag{2.1}$$

Suppongo i coefficienti b_j, c funzioni reali continue in $\bar{\Omega}$, a_{ij} funzioni reali di classe uno di $\bar{\Omega}$.

Se i coefficienti b_j sono identicamente nulli in $\bar{\Omega}$, l'operatore L è autoaggiunto.

All'operatore L si associa la forma bilineare definita in $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ nel modo seguente

$$\mathscr{L}(u, w) = \int_\Omega \Big[\sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} - \sum_j b_j(x)\, w(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} - c(x)\, w(x)\, u(x)\Big]\, \mathrm{d}x\,. \tag{2.2}$$

Sia Ω invariante rispetto ad un gruppo G di congruenze. Dirò che L è *invariante rispetto a* G se, per ogni $\gamma \in G$ e per ogni $u \in C^2(\Omega)$ riesce

$$L(u(\gamma x)) = (Lu)(\gamma x) \qquad \text{in } \Omega\,. \tag{2.3}$$

Le condizioni (2.3) si traducono in condizioni sui coefficienti di L (cfr. [1] n. 8). Se $\gamma \in G_0$ e $\gamma = (\varepsilon_r \delta_{rs})$, con $\varepsilon_r = \pm 1$, la corrispondente relazione (2.3) è verificata se e solo se in ogni punto di Ω valgono le uguaglianze

$$(2.4)\qquad a_{ij}(\varepsilon_1 x_1, \dots, \varepsilon_n x_n) = \varepsilon_i \varepsilon_j a_{ij}(x_1, \dots x_n) \qquad i, j = 1, \dots, n$$

$$(2.5)\qquad b_j(\varepsilon_1 x_1, \dots, \varepsilon_n x_n) = \varepsilon_j b_j(x) \qquad c(\varepsilon_1 x_1, \dots, \varepsilon_n x_n) = c(x) \qquad j = 1, \dots, n\,.$$

L è *invariante rispetto a* G_0, se e solo se le condizioni (2.4), (2.5) valgono per ogni n-pla $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ con $\varepsilon_i = \pm 1$. In tal caso i coefficienti a_{ii}, c sono funzioni *pari* di $x_1, \dots, x_n$, le funzioni b_j sono *dispari* rispetto a x_j e *pari* rispetto alle altre variabili, le funzioni a_{ij} $(i \neq j)$ sono *dispari* rispetto a x_i e x_j e *pari* rispetto alle variabili rimanenti.

L è *invariante rispetto a* G^*, se e solo se sono verificate le relazioni (2.4), (2.5) per ogni n-pla $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ ed inoltre le relazioni

$$(2.6)\qquad a_{ij}(x_{s_1}, \dots, x_{s_n}) = a_{s_i s_j}(x_1, \dots, x_n) \qquad c(x_{s_1}, \dots, x_{s_n}) = c(x_1, \dots, x_n)$$

$$(2.7)\qquad b_j(x_{s_1}, \dots, x_{s_n}) = b_{s_j}(x_1, \dots, x_n)$$

per ogni $i, j = 1, \dots, n$ e per ogni permutazione $s_1, \dots, s_n$ degli indici $1, \dots, n$.

Dalle (2.3) segue facilmente che

Se L è invariante rispetto a G e la simmetria γ_i rispetto a $x_i = 0$ appartiene a G, L trasforma funzioni pari (dispari) rispetto a x_i in funzioni pari (dispari) rispetto alla stessa variabile.

Se L è invariante rispetto a G e la simmetria γ_{ij} rispetto a $x_i = x_j$ appartiene a G, L trasforma funzioni simmetriche (antisimmetriche) nella variabili x_i e x_j in funzioni simmetriche (antisimmetriche) nelle stesse variabili.

In questo lavoro supporrò fissato un operatore L, definito in $C^2(\Omega)$ dalle (2.1), con coefficienti verificanti le ipotesi precisate all'inizio di questo numero e *invariante rispetto a* G.

Si consideri per L il problema di Dirichlet

$$(2.8)\qquad Lu = f \quad \text{in } \Omega \qquad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega$$

con f funzione assegnata, continua in $\bar{\Omega}$.

Si dice che una funzione u^* di $H_0^1(\Omega)$ è *soluzione debole* del problema (2.8), se per ogni funzione w di $C_0^\infty(\Omega)$ risulta

$$\mathscr{L}(u^*, w) = -(f, w), \tag{2.9}$$

ove il prodotto (f, w) si intende in $\mathscr{L}^2(\Omega)$.

Sussiste il seguente teorema, che indica le proprietà di simmetria della soluzione del problema (2.8).

Teorema 1. *Se il problema* (2.8) *ammette una e una sola soluzione debole* u^*, *continua in* Ω, *se il termine noto* f *del problema* (2.8) *verifica in* Ω *l'identità*

$$f(\gamma x) = (-1)^\alpha f(x) \qquad \textit{con } \alpha = 0 \textit{ oppure } \alpha = 1 \tag{2.10}$$

ove γ *è una simmetria di* G, *allora* u^* *verifica in* Ω *l'analoga identità*:

$$u^*(\gamma x) = (-1)^\alpha u^*(x) \qquad \textit{con } \alpha = 0 \textit{ oppure } \alpha = 1. \tag{2.11}$$

Dimostrazione. Sia fissato un elemento γ di G, con $\gamma^2 = \delta$, per il quale valga (2.10). Per ogni $v \in C(\Omega)$, sia $\hat{v}$ la funzione così definita in Ω: $\hat{v}(x) = v(\gamma x)$. Risulta ovviamente $\hat{v}(\gamma x) = v(x)$ in Ω. È facile verificare che si ha $(\hat{v}, \hat{w}) = (v, w)$ per ogni coppia di funzioni di $\mathscr{L}^2(\Omega) \cap C(\Omega)$.

D'altra parte, essendo L invariante rispetto a G, tenendo conto delle relazioni alle quali soddisfano i coefficienti di L (cfr. [1] n. 8), per ogni coppia u, w di funzioni, con $u \in C^1(\bar{\Omega})$ e $w \in C_0^\infty(\Omega)$, riesce

$$\mathscr{L}(\hat{u}, \hat{w}) = \mathscr{L}(u, w). \tag{2.12}$$

Le (2.12) si estendono per continuità alle funzioni u di $H^1(\Omega) \cap C(\Omega)$ e valgono quindi per le coppie u^*, w con u^* soluzione debole di (2.8) e w arbitraria funzione di $C_0^\infty(\Omega)$. Ciò premesso, dalle (2.9) e (2.12) segue

$$\mathscr{L}(\hat{u}^*, \hat{w}) = \mathscr{L}(u^*, w) = -(f, w) = -(\hat{f}, \hat{w}).$$

Per l'ipotesi (2.10) si ha, per ogni $\hat{w} \in C_0^\infty(\Omega)$

$$(-1)^\alpha \mathscr{L}(\hat{u}^*, \hat{w}) = -(f, \hat{w}).$$

Quindi $(-1)^\alpha \hat{u}^*$ è soluzione debole di (2.8). Per la supposta unicità della soluzione debole, segue la (2.11).

Osservazione. Si noti che il sussistere della (2.11) con $\gamma = \gamma_i$ implica u^*

funzione pari (dispari) rispetto a x_i se $\alpha = 0$ ($\alpha = 1$). Se vale la (2.11) con $\gamma = \gamma_{ij}$, u^* è funzione simmetrica (antisimmetrica) delle variabili x_i e x_j se $\alpha = 0$ ($\alpha = 1$).

Può essere allora interessante costruire soluzioni approssimate del problema (2.8) che verifichino le proprietà espresse dal Teorema 1, almeno per alcune delle matrici di G. Ciò è quanto verrà fatto in questo lavoro (n. 4 e 5).

3 - Operatori alle differenze. Funzioni interpolanti

Le funzioni reali definite su una griglia Λ_h o su un suo sottoinsieme verranno dette *funzioni griglia.*

Ad una funzione griglia u si associano le funzioni griglia u_{x_i}, $u_{\bar{x}_i}$, $u_{x_i\bar{x}_j}$, $u_{\bar{x}_i x_j}$ così definite:

$$(3.1) \qquad u_{x_i}(x) = h_i^{-1}(u(x + h_i e_i) - u(x)) \qquad u_{\bar{x}_i}(x) = h_i^{-1}(u(x) - u(x - h_i e_i))$$

$$(3.2) \qquad u_{x_i\bar{x}_j}(x) = (u_{x_i})_{\bar{x}_j}(x) \qquad u_{\bar{x}_i x_j}(x) = (u_{\bar{x}_i})_{x_j}(x) \qquad i, j = 1, \dots, n$$

ove e_i denota l'i-esimo punto unitario di $\boldsymbol{R}^n$. Risulta ovviamente $u_{x_i\bar{x}_j} \equiv u_{\bar{x}_j x_i}$. Si pone inoltre

$$(3.3) \qquad \Delta_i u \equiv \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{\bar{x}_i}) \qquad \Delta_{ij} u \equiv \Delta_i(\Delta_j u) \equiv \Delta_j(\Delta_i u) \qquad i \neq j .$$

L'insieme delle funzioni griglia definite in $\bar{\Omega}_h$ verrà indicato con U_h.

Se $u \in U_h$, le funzioni u_{x_i}, $u_{\bar{x}_i}$, $\Delta_i u$, $u_{x_i\bar{x}_j}$, $\Delta_{ij} u$ $(i \neq j)$ risultano definite in Ω_h. Se u è nulla in $\bar{\Omega}_h \backslash \Omega_h$, penserò u definita su Λ_h, ponendola uguale a zero fuori di Ω_h; allora le funzioni u_{x_i}, $u_{\bar{x}_i}$, $\Delta_i u, \dots$, risultano definite su Λ_h e nulle fuori di $\bar{\Omega}_h$.

Per due funzioni u, v di U_h tali che il prodotto uv è nullo fuori di Ω_h sussiste la seguente uguaglianza, detta *sommazione per parti*

$$(3.4) \qquad \sum_{x \in \bar{\Omega}_h} u_{x_i}(x)\, v(x) = - \sum_{x \in \bar{\Omega}_h} u(x)\, v_{\bar{x}_i}(x) .$$

Per le funzioni di U_h conviene introdurre delle *norme*, nel modo seguente

$$(3.5) \qquad \|u\|^2_{h, \bar{\Omega}_h} = \mu_h \sum_{x \in \bar{\Omega}_h} u^2(x) \qquad \|u\|^2_{h, \Omega_h} = \mu_h \sum_{x \in \Omega_h} u^2(x)$$

ove $\mu_h = \text{mis}\, \omega_{kh} = \prod_{i=1}^{n} h_i$. Indicherò con u_x, $u_{\bar{x}}$ le funzioni vettoriali di componenti rispettivamente $(u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$, $(u_{\bar{x}_1}, \ldots, u_{\bar{x}_n})$ e porrò

$$\|u_x\|^2_{h,\bar{\Omega}_h} = \sum_i \|u_{x_i}\|^2_{h,\bar{\Omega}_h} \qquad \|u_{\bar{x}}\|^2_{h,\bar{\Omega}_h} = \sum_i \|u_{\bar{x}_i}\|^2_{h,\bar{\Omega}_h}. \tag{3.6}$$

Nel seguito le funzioni di U_h verranno indicate con u_h o, semplicemente, con u.

Per ogni funzione $u \in U_h$, nulla fuori di Ω_h, sussistono le diseguaglianze

$$\|u\|_{h,\bar{\Omega}_h} \leq c\|u_x\|_{h,\bar{\Omega}_h} \qquad \|u\|_{h,\bar{\Omega}_h} \leq c\|u_{\bar{x}}\|_{h,\bar{\Omega}_h} \tag{3.7}$$

con c costante positiva dipendente solo da Ω (si confronti [3], ch. VI). Le (3.7) sono analoghe (nel discreto) alle diseguaglianze integrali di Poincaré-Friedrichs per le funzioni di $H_0^1(\Omega)$. Esse hanno una notevole importanza nello studio delle proprietà dello schema alle differenze che viene presentato in questo lavoro.

Nel seguito, per semplicità, perrò $\|u\|_h$ in luogo di $\|u\|_{h,\bar{\Omega}_h}$.

Vogliamo ora indicare due particolari funzioni che normalmente vengono usate come *interpolanti* una funzione griglia u. A tale scopo conviene pensare u definita su Λ_h.

Si consideri in $\boldsymbol{R}^n$ la funzione *multilineare a pezzi* u' così definita

$$\begin{aligned} u'(x) &= u(kh) + \sum_r u_{x_r}(kh)(x_r - k_r h_r) + \ldots + \\ &+ \sum_r u_{x_1 \ldots x_{r-1} x_{r+1} \ldots x_n}(kh) \prod_{i \neq r} (x_i - k_i h_i) + u_{x_1 \ldots x_n}(kh) \prod_i (x_i - k_i h_i) \end{aligned} \tag{3.8}$$

se $x \in \bar{\omega}_{kh}$.

Tale funzione, per definizione, su ogni cella $\bar{\omega}_{kh}$ è lineare in ciascuna variabile x_i. Dalle (3.8) segue che, se y è un vertice di una cella (cioè un punto di Λ_h), riesce $u'(y) = u(y)$. Pertanto u' è continua in $\boldsymbol{R}^n$ e la sua restrizione a Ω appartiene a $H^1(\Omega)$. Se u è nulla fuori di Ω_h, allora u' è nulla fuori di P_h e quindi su $\partial\Omega$.In questo caso u' appartiene a $H_0^1(\Omega)$.

Un'altra funzione interpolante u è la funzione $\tilde{u}$ così definita

$$\tilde{u}(x) = u(kh) \qquad \text{se } k_i h_i \leq x_i < (k_i + 1) h_i. \tag{3.9}$$

La funzione $\tilde{u}$ verrà detta *costante a pezzi*; essa è ovviamente limitata in Ω e appartiene a $\mathscr{L}^2(\Omega)$.

Ricordo alcuni risultati sulle funzioni interpolanti u' e $\tilde{u}$.

Sia $h^{(m)} \equiv (h_1^{(m)}, \ldots, h_n^{(m)})$ una successione di vettori, a componenti strettamente positive, *convergente a zero*. Per ogni m si consideri la griglia $\Lambda_{h^{(m)}}$ relativa a $h^{(m)}$ e gli insiemi $\Omega_{h^{(m)}}$ e $\bar{\Omega}_{h^{(m)}}$ corrispondenti. Assumiamo che su ciascun $\bar{\Omega}_{h^{(m)}}$ sia definita una funzione $u_{h^{(m)}}$ nulla su $\bar{\Omega}_{h^{(m)}}\setminus\Omega_{h^{(m)}}$.

Sussistono i Teoremi 2 e 3, per le dimostrazioni dei quali si rimanda a [3], ch. VI, § 3.

Teorema 2. *Se esiste una costante $k > 0$ tale che*

$$\|u_{h^{(m)}}\|_{h^{(m)}} + \|(u_{h^{(m)}})_x\|_{h^{(m)}} \leqslant k \qquad \forall m \tag{3.10}$$

allora la successione delle funzioni multilineari a pezzi $u'_{h^{(m)}}$ interpolanti $u_{h^{(m)}}$ è limitata in $H_0^1(\Omega)$. Esiste una sottosuccessione estratta da $\{u'_{h^{(m)}}\}$ che converge in norma $\mathscr{L}^2(\Omega)$ ad una funzione $u^* \in H_0^1(\Omega)$ e le cui derivate convergono debolmente in $\mathscr{L}^2(\Omega)$ alle derivate corrispondenti di u^*.

Teorema 3. *Esista una costante $k > 0$ tale che sussista* (3.10). *Se $\{u'_{h^{(m)}}\}$ converge in norma $\mathscr{L}^2(\Omega)$ ad una funzione $u^* \in H_0^1(\Omega)$ e le sue derivate convergono debolmente in $\mathscr{L}^2(\Omega)$ alle derivate di u^*, allora le funzioni costanti a pezzi $\tilde{u}_{h^{(m)}}$ interpolanti $u_{h^{(m)}}$, formano una successione convergente in $\mathscr{L}^2(\Omega)$ ad u^*. Inoltre le funzioni costanti a pezzi $\tilde{v}_{m,i}$, $\tilde{w}_{m,i}$ interpolanti rispettivamente le funzioni $v_{m,i} \equiv (u_{h^{(m)}})_{x_i}$ e $w_{m,i} \equiv (u_{h^{(m)}})_{\bar{x}_i}$, convergono debolmente a $\dfrac{\partial u^*}{\partial x_i}$ in $\mathscr{L}^2(\Omega)$.*

4 - Schema alle differenze. Teorema di esistenza e unicità

Si introduce ora uno schema alle differenze finite per il problema (2.8) che si presta ad approssimarne la soluzione debole, quando questa esiste ed è unica.

Si consideri l'operatore alle differenze L_h, così definito sulle funzioni griglia di U_h

$$\begin{aligned}(L_h u)(x) &= \frac{1}{2}\sum_i [(a_{ii}u_{x_i})_{\bar{x}_i}(x) + (a_{ii}u_{\bar{x}_i})_{x_i}(x)] \\ &+ \sum_{i\neq j}(\Delta_i(a_{ij}\Delta_j u))(x) + \sum_j b_j(x)(\Delta_j u)(x) + c(x)u(x)\end{aligned} \tag{4.1}$$

con $x \in \Omega_h$ e, per il problema (2.8), il seguente *schema alle differenze finite:*

$$(L_h u)(x) = f(x) \quad \text{se } x \in \Omega_h \qquad u = 0 \quad \text{se } x \in \bar{\Omega}_h\setminus\Omega_h . \tag{4.2}$$

Tenendo presenti le definizioni (3.1), (3.3), il sistema (4.2) si scrive

$$
\begin{aligned}
&2\sum_i h_i^{-2}[(a_{ii}(x)+a_{ii}(x+h_ie_i)+h_ib_i(x))\,u(x+h_ie_i)\\
&\qquad +(a_{ii}(x)+a_{ii}(x-h_ie_i)-h_ib_i(x))\,u(x-h_ie_i)]\\
&-2\sum_i h_i^{-2}[(a_{ii}(x+h_ie_i)+a_{ii}(x-h_ie_i)+2a_{ii}(x)-2h_i^2c(x))\,u(x)]\\
&+\sum_{i\neq j} h_i^{-1}h_j^{-1}[a_{ij}(x+h_ie_i)(u(x+h_ie_i+h_je_j)-u(x+h_ie_i-h_je_j))]\\
&+\sum_{i\neq j} h_i^{-1}h_j^{-1}[a_{ij}(x-h_ie_i)(u(x-h_ie_i+h_je_j)-u(x-h_ie_i-h_je_j))]=4f(x)\quad \text{se } x\in\Omega_h
\end{aligned}
$$

$$u(x)=0 \qquad \text{se } x\in\bar\Omega_h\setminus\Omega_h\,.$$

Se q e Q sono il numero di punti di Ω_h e $\bar\Omega_h$, il sistema (4.2) è un sistema di Q equazioni lineari in Q incognite (i valori di u nei punti di $\bar\Omega_h$). Eliminando i valori di u nei punti di $\bar\Omega_h\setminus\Omega_h$, il sistema si riduce ad un sistema di q equazioni in q incognite.

Si vuole ora esaminare il sistema (4.2), vedere quando detto sistema ammette una e una sola soluzione e studiarne le proprietà. A tal fine farò un'ulteriore ipotesi su L.

Si suppone che esista una costante $\nu>0$ tale che, per ogni $(n+1)$-pla $\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n$ di numeri reali e per ogni $x\in\bar\Omega$ riesca

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j-\sum_j b_j(x)\xi_j\xi_0-c(x)\xi_0^2\geqslant \nu\sum_{i=1}^n\xi_i^2\,. \tag{4.3}$$

Dalle (4.3) segue $c(x)\leqslant 0$ in $\bar\Omega$ e $a_{ii}(x)\geqslant\nu$ in $\bar\Omega$, per $i=1,\dots,n$.

È noto che, se L verifica l'ipotesi (4.3), allora il problema (2.8) *ammette una e una sola soluzione debole.* Sussiste il seguente

Teorema 4 (esistenza e unicità). *Se L verifica l'ipotesi* (4.3), *allora il sistema* (4.2) *ammette una e una sola soluzione, comunque si fissi f in $C(\bar\Omega)$. La soluzione u del sistema* (4.2) *è una funzione griglia definita in $\bar\Omega_h$, nulla in $\bar\Omega_h\setminus\Omega_h$ e verifica le seguenti diseguaglianze:*

$$\nu\|u\|_h\leqslant c^2\|f_h\|_{h,\Omega_h}\qquad \nu^2(\|u_x\|_h^2+\|u_{\bar x}\|_h^2)\leqslant 2c^2\|f_h\|_{h,\Omega_h}^2 \tag{4.4}$$

ove f_h è la restrizione di f a Ω_h, ν è la costante di (4.3) *e c dipende solo da Ω.*

Dimostrazione. Siano u, w due funzioni definite su Λ_h e nulle fuori di Ω_h. Si ponga

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_h(u, w) &= \frac{1}{2} \sum_{x \in \bar{\Omega}_h} \sum_i a_{ii}(x)(u_{x_i}(x)\, w_{x_i}(x) + u_{\bar{x}_i}(x)\, w_{\bar{x}_i}(x)) \\ &+ \sum_{x \in \bar{\Omega}_h} [\sum_{i \neq j} a_{ij}(x)\, \Delta_i u\, \Delta_j w - \sum_j b_j(x)\, w(x)\, \Delta_j u - c(x)\, u(x)\, w(x)].\end{aligned} \tag{4.5}$$

Posto $\varphi = L_h u$, si sommi $-u(x)\,\varphi(x)$ al variare di x in Ω_h. Applicando la formula di sommazione per parti (3.4), si ottiene

$$- \sum_{x \in \Omega_h} u(x)\,\varphi(x) = - \sum_{x \in \bar{\Omega}_h} u(x)\,\varphi(x) = \mathscr{L}_h(u, u). \tag{4.6}$$

Conviene osservare che, posto

$$\mathscr{L}_h'(u, w) = \sum_{x \in \bar{\Omega}_h} [\sum_{i,j} a_{ij}(x)\, \Delta_i u\, \Delta_j w - \sum_j b_j(x)\, w(x)\, \Delta_j u - c(x)\, w(x)\, u(x)] \tag{4.7}$$

$$\mathscr{E}_h(u, w) = \frac{1}{4} \sum_{x \in \bar{\Omega}_h} \sum_i a_{ii}(x)(u_{x_i} - u_{\bar{x}_i})(w_{x_i} - w_{\bar{x}_i}) \tag{4.8}$$

riesce
$$\mathscr{L}_h(u, w) = \mathscr{L}_h'(u, w) + \mathscr{E}_h(u, w).$$

Da (4.3) segue

$$\mathscr{E}_h(u, u) \geq \frac{1}{4}\, \nu \sum_{x \in \bar{\Omega}_h} \sum_i (u_{x_i} - u_{\bar{x}_i})^2 \qquad \mathscr{L}_h'(u, u) \geq \nu \sum_{x \in \bar{\Omega}_h} \sum_i (\Delta_i u)^2 \tag{4.9}$$

quindi

$$\mathscr{L}_h(u, u) \geq \frac{\nu}{2} \sum_{x \in \bar{\Omega}_h} \sum_i (u_{x_i}^2 + u_{\bar{x}_i}^2). \tag{4.10}$$

Per la diseguaglianza di Cauchy per i vettori si ha

$$|\mu_h \sum_{x \in \Omega_h} u(x)\,\varphi(x)| \leq (\sum_{x \in \Omega_h} \mu_h \varphi^2(x))^{\frac{1}{2}} (\sum_{x \in \Omega_h} \mu_h u^2(x))^{\frac{1}{2}} = \|\varphi\|_{h, \Omega_h} \|u\|_{h, \bar{\Omega}_h}.$$

Da (4.6), (4.10), ricordando (3.6) e ponendo $\|\cdot\|_h = \|\cdot\|_{h, \bar{\Omega}_h}$, segue allora

$$\|\varphi\|_{h, \Omega_h} \|u\|_h \geq \mu_h \mathscr{L}_h(u, u) \geq \frac{\nu}{2} (\|u_x\|_h^2 + \|u_{\bar{x}}\|_h^2). \tag{4.11}$$

Applicando infine la diseguaglianza (3.7) si ottiene

$$\|\varphi\|_{h,\Omega_h}\|u\|_h \geq \nu c^{-2}\|u\|_h^2 . \tag{4.12}$$

Da (4.12) segue allora che, se il termine noto del sistema (4.2) è nullo, la corrispondente soluzione è nulla. Pertanto il sistema lineare (4.2) ha una e una sola soluzione comunque si fissi il termine noto.

Da (4.11), (4.12) segue che la soluzione del sistema (4.2) verifica le (4.4). Il teorema è quindi dimostrato.

Se f è una funzione continua in $\bar{\Omega}$ e f_h è la restrizione a Ω_h, posto $M = \max|f|$ in $\bar{\Omega}$, si ha $\|f_h\|_{h,\Omega_h}^2 \leq M^2 \operatorname{mis}\Omega$. Dal Teorema 4 segue allora

Corollario 1. *Se l'operatore L verifica l'ipotesi* (4.3), *la soluzione u del sistema* (4.2) *verifica la diseguaglianza*

$$\|u\|_h^2 + \|u_x\|_h^2 + \|u_{\bar{x}}\|_h^2 \leq k^2\nu^{-2} \tag{4.13}$$

ove k^2 è una costante che dipende da Ω e da f.

5 - Proprietà di simmetria delle soluzioni approssimate

In questo numero suppongo che il problema (4.2) ammetta una e una sola soluzione u. Le ipotesi su L sono quelle del n. 2.

Sussiste il seguente

Teorema 5. *Se il termine noto f del problema* (2.8) *verifica in Ω l'identità*

$$f(\gamma x) = (-1)^\alpha f(x) \qquad \text{con } \alpha = 0 \text{ oppure } \alpha = 1 \tag{5.1}$$

con γ simmetria di $G \cap G'$, allora la funzione griglia u soluzione di (4.2) *verifica in $\bar{\Omega}_h$ l'identità*

$$u(\gamma x) = (-1)^\alpha u(x) \qquad \text{con } \alpha = 0 \text{ oppure } \alpha = 1 . \tag{5.2}$$

Dimostrazione. Sia γ una simmetria di $G \cap G'$ e quindi $\gamma^2 = \delta$. Se $v \in U_h$, indico con $\hat{v}$ la funzione così definita in $\bar{\Omega}_h$: $\hat{v}(x) = v(\gamma x)$ e dimostro che, per ogni

v di U_h vale l'identità

$$(5.3) \qquad (L_h v)(\gamma x) = (L_h \widehat{v})(x) \qquad x \in \Omega_h .$$

A tal fine conviene decomporre $L_h v$ nel seguente modo

$$L_h v = \sum_{r,s} A_{rs} v + Bv$$

dove $$A_{rr} v = (a_{rr} v_{x_r})_{\bar{x}_r} + (a_{rr} v_{\bar{x}_r})_{x_r} \qquad A_{rs} v = \Delta_r (a_{rs} \Delta_s v) \quad r \neq s$$

$$Bv = \sum_r b_r \Delta_r v + cv .$$

Sia dapprima $\gamma = (\varepsilon_r \delta_{rs})$, $\varepsilon_r = \pm 1$; dimostro che, per ogni $v \in U_h$, vale (5.3). Osservando che dalle (2.5) segue

$$b_r(\gamma x \pm h_j e_j) = \varepsilon_r b_r (x \pm \varepsilon_j h_j e_j) \qquad r, j = 1, \ldots, n$$

(i segni superiori o inferiori valgono contemporaneamente), un semplice calcolo mostra che, nelle ipotesi ammesse, $B(v)(\gamma x) = (B\widehat{v})(x)$.

Scrivendo poi per esteso le espressioni di $(A_{rs} v)(\gamma x)$ per una fissata coppia r, s e tenendo presenti le relazioni

$$a_{rs}(\gamma x \pm h_j e_j) = \varepsilon_r \varepsilon_s a_{rs} (x \pm \varepsilon_j h_j e_j)$$

(i segni superiori o inferiori valgono contemporaneamente) che seguono da (2.4), si verifica che $(A_{rs} v)(\gamma x) = (A_{rs} \widehat{v})(x)$.

Sia ora γ una matrice di permutazione. Risulta $\gamma x = (x_{s_1}, \ldots, x_{s_n})$, ove $s_1, \ldots, s_n$ è una permutazione di $1, 2, \ldots, n$. Per l'invarianza di L rispetto a G, riescono verificate le (2.6) e (2.7) in corrispondenza alla permutazione fissata. Riesce inoltre $h_i = h_{s_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Tenendo conto di ciò, si verifica facilmente che $(\Delta_{s_r} \widehat{v})(x) = (\Delta_r v)(\gamma x)$ e quindi $(Bv)(\gamma x) = (B\widehat{v})(x)$. Un calcolo un po' più laborioso permette di verificare che

$$\sum_r (A_{rr} \widehat{v})(x) = \sum_r (A_{rr} v)(\gamma x) \qquad \sum_{r \neq s} (A_{rs} \widehat{v})(x) = \sum_{r \neq s} (A_{rs} v)(\gamma x) .$$

Sono così dimostrate le (5.3) per ogni simmetria di $G \cap G'$.

Si consideri ora la soluzione u di (4.2). Per definizione, $u = 0$ su $\bar{\Omega}_h \backslash \Omega_h$ e $(L_h u)(x) = f(x)$ se $x \in \Omega_h$. Se γ è una simmetria di $G \cap G'$ e vale la (5.1), si ha

$$(L_h \hat{u})(x) = (L_h u)(\gamma x) = f(\gamma x) = (-1)^\alpha f(x) \qquad x \in \Omega_h .$$

Inoltre $x \in \bar{\Omega}_h \setminus \Omega_h$ implica $\gamma x \in \bar{\Omega}_h \setminus \Omega_h$ e quindi $\hat{u} = 0$ su $\bar{\Omega}_h \setminus \Omega_h$. Ne segue che $(-1)^\alpha \hat{u}$ è soluzione di (4.2). Per l'unicità della soluzione, deve essere $u(x) = (-1)^\alpha u(\gamma x)$ in $\bar{\Omega}_h$.

Possiamo ora dimostrare le seguenti *proprietà di simmetria* della funzione u', interpolante u, definita da (3.8).

Teorema 6. *Se il termine noto f del problema* (2.8) *verifica in Ω l'identità* (5.1) *e γ è una simmetria di $G \cap G'$, allora la funzione u' interpolante la soluzione u di* (4.2) *verifica in $\bar{\Omega}$ l'identità*

$$u'(\gamma x) = (-1)^\alpha u'(x) \qquad \alpha = 0 \ (\textit{oppure } \alpha = 1). \tag{5.4}$$

Dimostrazione. Si verifica facilmente che una funzione multilineare in una cella $\bar{\omega}_{kh}$ e nulla nei vertici è identicamente nulla in $\bar{\omega}_{kh}$. Ne segue che, se due funzioni multilineari a pezzi interpolano la stessa funzione u, definita su Λ_h, allora coincidono in $\boldsymbol{R}^n$.

Ciò premesso, sia γ una simmetria di $G \cap G'$ e sussista la (5.1). Si considerino le due funzioni $(-1)^\alpha u'$ e $\hat{u}'$, ove $\hat{u}'(x) \equiv u'(\gamma x)$ in $\boldsymbol{R}^n$. Riesce

$$\hat{u}'(x) = u(\gamma x) = (-1)^\alpha u(x) = (-1)^\alpha u'(x) \qquad x \in \Lambda_h$$

e quindi $\hat{u}' = (-1)^\alpha u'$ in tutto $\boldsymbol{R}^n$. Resta così provata l'identità (5.4).

Dal Teorema 6, ricordando che la simmetria γ_i rispetto a $x_i = 0$ muta in sé un'arbitraria griglia, segue

Corollario 2. *Se $\gamma_i \in G$ e f è una funzione pari* (*dispari*) *rispetto alla variabile x_i, allora la funzione u' è pari* (*dispari*) *rispetto a x_i.*

Si consideri ora una griglia relativa ad un vettore h a componenti non tutte distinte. Se $h_i = h_j$, la simmetria γ_{ij} rispetto a $x_i = x_j$ muta in sé la griglia Λ_h e quindi appartiene a G'; viceversa se $\gamma_{ij} \in G'$, riesce $h_i = h_j$. Dal Teorema 6 segue allora

Corollario 3. *Se $\gamma_{ij} \in G \cap G'$ e f è una funzione simmetrica* (*antisimmetrica*) *delle variabili x_i e x_j, allora la funzione u' è simmetrica* (*antisimmetrica*) *nelle variabili x_i e x_j.*

6 - Teorema di convergenza

Questo numero è dedicato allo studio della convergenza dello schema alle differenze finite considerato. Si suppone che L verifichi l'ipotesi (4.3).

Per ogni h, sia u_h la soluzione del problema (4.2), u_h' la funzione multilineare a pezzi interpolante u_h. La funzione u_h' appartiene a $H_0^1(\Omega)$ e può considerarsi un'*approssimazione della soluzione debole* u^* del problema (2.8). Questa affermazione è giustificata dal Teorema 7, che precisa il comportamento di u_h' per h che tende a zero.

Teorema 7 (convergenza delle funzioni approssimanti). *Sia $h^{(m)}$ una successione di vettori a n componenti strettamente positive tale che* $\lim h^{(m)} = 0$. *Sia $u'_{h^{(m)}}$ la corrispondente successione di funzioni approssimanti. La successione $u'_{h^{(m)}}$ converge in $\mathscr{L}^2(\Omega)$ ad una funzione u^* appartenente a $H_0^1(\Omega)$, le derivate $\dfrac{\partial u'_{h^{(m)}}}{\partial x_i}$ convergono debolmente in $\mathscr{L}^2(\Omega)$ a $\dfrac{\partial u^*}{\partial x_i}$ e la funzione u^* è la soluzione debole del problema* (2.8.).

Dimostrazione. Dai Teoremi 2, 4 e Corollario 1 segue l'esistenza di una sottosuccessione $u'_{h^{(m_p)}}$ convergente in $\mathscr{L}^2(\Omega)$ ad una funzione u^* di $H_0^1(\Omega)$, tale che $\dfrac{\partial u'_{h^{(m_p)}}}{\partial x_i}$ convergano debolmente in $\mathscr{L}^2(\Omega)$ a $\dfrac{\partial u^*}{\partial x_i}$ $(i = 1, \dots, n)$.

Dimostro che u^* è soluzione debole di (2.8).

Sia η un'arbitraria funzione di $C_0^\infty(\Omega)$ che penserò definita in $\boldsymbol{R}^n$ ponendola uguale a zero fuori di Ω. Poiché il supporto di η è contenuto in Ω, esiste un $\delta > 0$ tale che, se $|h| < \delta$, allora η è nulla su tutte le celle ω_{kh} con $kh \notin \Omega$. Denotata con $\bar{B}_h$ l'unione di tutte le celle $\bar{\omega}_{kh}$ con $kh \in \Omega_h$, riesce $\operatorname{supp} \eta \subset \bar{B}_h$.

In corrispondenza ad un dato h, siano $\tilde{\eta}_h$ la funzione costante a pezzi interpolante la restrizione η_h di η a Λ_h, $\tilde{\xi}_{h,i}$ e $\tilde{\zeta}_{h,i}$ le funzioni costanti a pezzi e interpolanti rispettivamente $(\eta_h)_{x_i}$ e $(\eta_h)_{\bar{x}_i}$. Per $h \to 0$, $\tilde{\eta}_h$ converge a η uniformemente in $\bar{\Omega}$, $\tilde{\xi}_{h,i}$ e $\tilde{\zeta}_{h,i}$ convergono uniformemente in $\bar{\Omega}$ a $\dfrac{\partial \eta}{\partial x_i}$.

Ciò premesso, per definizione, $u_{h^{(m)}}$ è soluzione del problema (4.2) per $h = h^{(m)}$. Ciò implica che, per $h = h^{(m)}$ e $m = 1, 2, \dots$ sono verificate le relazioni (applicando la sommazione per parti (3.4))

$$\mu_h \mathscr{L}_h(u_h, \eta_h) = -\mu_h \sum_{x \in \Omega_h} f(x) \eta_h(x). \tag{6.1}$$

Ma, per ogni h, riesce

$$\mathcal{L}_h(u_h, \eta_h) = \mathcal{L}_h'(u_h, \eta_h) + \mathcal{E}_h(u_h, \eta_h) \tag{6.2}$$

ove $\mathcal{L}_h'(u_h, \eta_h)$ e $\mathcal{E}_h(u_h, \eta_h)$ sono definite rispettivamente da (4.7) e (4.8). Sia β una costante positiva tale che $|a_{ii}(x)| \leq \beta$ in $\bar{\Omega}$ per ogni i. Valgono le seguenti diseguaglianze:

$$\begin{aligned}\mu_h |\mathcal{E}_h(u_h, \eta_h)| &\leq \beta \|(u_h)_x - (u_h)_{\bar{x}}\|_h [\sum_i \sum_{x \in \Omega_h} \mu_h((\eta_h)_{x_i} - (\eta_h)_{\bar{x}_i})^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \beta(\|(u_h)_x\|_h + \|(u_h)_{\bar{x}}\|_h)(\int_\Omega \sum_i (\tilde{\xi}_{h,i} - \tilde{\zeta}_{h,i})^2 \, dx)^{\frac{1}{2}} .\end{aligned}$$

Poiché la funzione $\sum_i (\tilde{\xi}_{h,i} - \tilde{\zeta}_{h,i})^2$ tende uniformemente a zero in $\bar{\Omega}$ per $h \to 0$ e, per le (4.13), $\|(u_h)_x\|_h + \|(u_h)_{\bar{x}}\|_h$ si mantiene limitata, segue $\lim_{h\to 0} \mu_h \mathcal{E}_h(u_h, \eta_h) = 0$.

Si consideri ora il secondo membro della relazione (6.1). Per la continuità di f e η, essendo inoltre $\operatorname{supp} \eta \subset \Omega$, riesce

$$\lim_{h \to 0} \mu_h \sum_{x \in \Omega_h} f(x) \eta_h(x) = \int_\Omega f(x) \eta(x) \, dx . \tag{6.3}$$

Dalle (6.1), (6.3), ricordando che $\lim_{h \to 0} \mu_h \mathcal{E}_h(u_h, \eta_h) = 0$, segue che esiste $\lim \mu_h \mathcal{L}_h'(u_h, \eta_h)$ e riesce

$$\lim_{h \to 0} \mu_h \mathcal{L}_h'(u_h, \eta_h) = -\int_\Omega f(x) \eta(x) \, dx . \tag{6.4}$$

Il teorema sarà allora dimostrato se farò vedere che

$$\lim_{p \to \infty} \mu_{h^{(m_p)}} \mathcal{L}_{h^{(m_p)}}'(u_{h^{(m_p)}}, \eta_{h^{(m_p)}}) = \mathcal{L}(u^*, \eta) . \tag{6.5}$$

Ricordando che, se $|h| < \delta$, riesce $\operatorname{supp} \eta \subset \bar{B}_h$, per $|h| < \delta$ si ha

$$\begin{aligned}\mu_h \mathcal{L}_h'(u_h, \eta_h) &= \int_{\bar{B}_h} [\sum_{i,j} (\tilde{a}_{ij})_h (\tilde{\Delta}_i u)_h (\tilde{\Delta}_j \eta)_h - \sum_j (\tilde{b}_j)_h (\tilde{\Delta}_j u)_h \tilde{\eta}_h - \tilde{c}_h \tilde{u}_h \tilde{\eta}_h] \, dx \\ &= \sum_{i,j} \int_\Omega (\tilde{a}_{ij})_h (\tilde{\Delta}_i u)_h (\tilde{\Delta}_j \eta)_h \, dx - \sum_j \int_\Omega (\tilde{b}_j)_h (\tilde{\Delta}_j u)_h \tilde{\eta}_h \, dx - \int_\Omega \tilde{c}_h \tilde{u}_h \tilde{\eta}_h \, dx\end{aligned} \tag{6.6}$$

e le funzioni costanti a pezzi $(\tilde{a}_{ij})_h$, $(\tilde{b}_j)_h$, $\tilde{c}_h$ per $h \to 0$ convergono rispettivamente ad a_{ij}, b_j, c, uniformemente in $\bar{\Omega}$.

Inoltre le funzioni $(\tilde{\Delta}_j \eta)_h = \frac{1}{2}(\tilde{\xi}_{h,j} + \tilde{\zeta}_{h,j})$ convergono uniformemente in $\bar{\Omega}$ a $\frac{\partial \eta}{\partial x_j}$.

Le successioni $(\tilde{\Delta}_j u)_{h^{(m_p)}}$ convergono debolmente in $\mathscr{L}^2(\Omega)$ a $\frac{\partial u^*}{\partial x_j}$, in base al Teorema 3.

Ne segue che, posto in (6.6) $h = h^{(m_p)}$, per $p \to \infty$ ciascuno degli integrali a secondo membro di (6.6) converge e si ha la (6.5).

Per l'unicità della soluzione debole u^* del problema (2.8), la successione $u'_{h^{(m_p)}}$ converge a u^* in $\mathscr{L}^2(\Omega)$ e, per ogni i, la successione $\frac{\partial u'_{h^{(m_p)}}}{\partial x_i}$ converge debolmente in $\mathscr{L}^2(\Omega)$ a $\frac{\partial u^*}{\partial x_i}$. Il teorema è così dimostrato.

Bibliografia

[1] L. BASSOTTI RIZZA, *Operatori lineari invarianti rispetto ad un gruppo di congruenze*, Riv. Mat. Univ. Parma 5* (1979), 453-470.

[2] G. FICHERA, *Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari*, I e II, Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. 8 (1956), 46-55, 166-172.

[3] O. A. LADYZHENSKAYA, *The boundary value problems of mathematical physics*, Springer, Berlin 1985.

[4] G. I. MARCUK, *Metodi del calcolo numerico*, Editori riuniti, Roma 1984.

[5] F. A. RAVIART and J. M. THOMAS, *Introduzione all'analisi numerica delle equazioni alle derivate parziali*, Masson, Parigi 1989.

Summary

Let be Ω a bounded domain of $\boldsymbol{R}^n$ and L a second order elliptic differential operator. Assume that Ω and L are invariant with respect to a group G of isometries.

A convenient finite difference scheme for the Dirichlet problem concerning L and Ω is considered. Existence and some symmetry properties of a solution u of the approximate problem are obtained.

A function u', interpolating u and having the same symmetry properties of the exact solution u^*, is proposed. Finally, it is shown that u' converges to u^* as the diameter of the grid tends to zero.

* * *