Riv. Mat. Univ. Parma (5) **1** (1992), 11-18

SALVATORE ANTONUCCI (*)

Grafi regolari senza clique (**)

0 - Introduzione

Riprendiamo le considerazioni iniziate in [3].

Un grafo regolare di ordine n e di valenza k si dirà *grafo di tipo* $R_{n,k}$ o semplicemente *grafo* $R_{n,k}$. Per indicare che il vertice a è adiacente al vertice b scriveremo $a\alpha b$; per indicare che a è adiacente ad ogni vertice di S scriveremo $a\alpha S$. Infine, quando si parlerà di *un solo grafo* si intenderà a meno di isomorfismi.

Si daranno alcuni risultati concernenti *grafi regolari privi di clique*. Salvo esplicito avviso riterremo i grafi connessi; inoltre, un grafo di tipo $R_{n,k}$ privo di clique sarà detto brevemente di tipo $R^0_{n,k}$.

1 - Non esistenza di grafi $R^0_{2k+1,k}$

In [3] si è già detto che non esistono grafi $R^0_{n,k}$ se $n < 2k$; qui vogliamo occuparci di grafi $R^0_{n,k}$ con $n > k$, e precisamente di problemi di esistenza.

Esaminiamo il caso $n = 2k + 1$ (k pari, cfr. [1]); più precisamente dimostriamo il seguente

Teorema 1. *Non esiste alcun grafo di tipo* $R^0_{n,k}$, *se* $n = 2k + 1$.

Sia 1 adiacente ai vertici 2, 3, ..., $k + 1$; l'insieme $\{2, 3, ..., k + 1\}$ è perciò stabile. Allora, il vertice 2 non potrà essere adiacente a nessuno dei vertici

(*) Dip. di Matematica e Applicazioni, Via Claudio 21, 80125 Napoli, Italia.
(**) Ricevuto il 29.4.1991. Classificazione AMS 05 C 35.

$3, 4, \ldots, k+1$ e pertanto sia adiacente ai vertici $k+2, k+3, \ldots, 2k$. Ne consegue che l'insieme $Y = \{k+2, k+3, \ldots, 2k\}$ deve essere stabile.

Poiché devono uscire, da ognuno dei vertici $3, 4, \ldots, k+1$, spigoli in numero di $k-1$ con un estremo in $X = \{k+2, k+3, \ldots, 2k+1\}$, ci devono essere $(k-1)^2$ spigoli con un estremo in un vertice dell'insieme $\{3, 4, \ldots, k+1\}$ e con l'altro estremo in un vertice dell'insieme X. Se, allora, si tiene conto che ci devono essere $(k-1)^2 + k$ spigoli con un estremo in X, per fare in modo che i conti tornino, è necessario che da $2k+1$, essendo Y stabile, escano $\frac{k}{2}$ spigoli con un estremo in Y.

Ciò posto, sia $2k+1$ adiacente agli ultimi $\frac{k}{2}$ vertici di Y; ognuno dei primi $k - 1 - \frac{k}{2} = \frac{k-2}{2}$ vertici di Y sarà allora adiacente ad ognuno dei vertici $3, 4, \ldots, k+1$; supposti costruiti tutti gli spigoli suddetti, risultano i vertici $3, 4, \ldots, k+1$ ognuno di grado $\frac{k-2}{2} + 1 = \frac{k}{2}$. Nessuno dei vertici $3, 4, \ldots, k+1$ potrà allora essere adiacente a $2k+1$, perché dovrebbe poi essere adiacente ad uno dei vertici di Y al quale $2k+1$ è adiacente, con la conseguente formazione di una clique K_3.

Il teorema segue.

2 - Grafi $R^0_{n,4}$

In [3] si è esaminato il caso d'un grafo $R^0_{n,k}$, con $k = 3$. Esaminiano, ora, il caso $k = 4$.

Sussiste, in proposito, il seguente

Teorema 2. *Per ogni* $n \geqslant 10$ *esiste un grafo* $R^0_{n,4}$.

Intanto, ricordiamo [3] che un grafo di tipo $R^0_{7,4}$ non esiste e, per quanto sopra detto, nemmeno un grafo di tipo $R^0_{9,4}$, mentre esiste un grafo di tipo $R^0_{8,4}$ [3].

Cominciamo a considerare il caso n pari. Ricordiamo che vi è un solo grafo G di tipo $R_{8,4}$ [3]; esso contiene un insieme stabile $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e, per $i = 5, 6, 7, 8$, $i \alpha A$. Dal grafo G si ottiene un grafo G' di tipo $R_{10,4}$ eliminando il ciclo 1526 (privo di corde) ed introducendo i vertici 9 e 10 ognuno adiacente ad ogni vertice del ciclo. Il grafo ottenuto è, naturalmente, privo di clique.

Dal grafo G', eliminando il ciclo 1, 9, 2, 10 ed aggiungendo i vertici 11 e 12 con le stesse modalità, si ottiene un grafo $R^0_{12,4}$, e così via.

Passiamo a considerare il caso n dispari.

Cominciamo con l'osservare che esiste un grafo di tipo $R^0_{11,4}$: esso contiene gli insiemi stabili $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{6, 7, 8\}$ e $C = \{9, 10, 11\}$ ed il ciclo 8, 11, 6, 10, 7, 9; inoltre si ha: $5\alpha A$, $1\alpha B$, $2\alpha B$, $3\alpha C$, $4\alpha C$.

Inoltre, da un grafo di tipo $R^0_{12,4}$ precedentemente costruito si ottiene un grafo $R^0_{13,4}$ eliminando gli spigoli $\{3, 8\}$ e $\{9, 11\}$ (osservato che non è $3\alpha\{9, 11\}$ e neppure $8\alpha\{9, 11\}$), aggiungendo 13 e collegandolo con i vertici 3, 8, 9, 11.

Analogamente, da un grafo di tipo $R^0_{14,4}$ precedentemente costruito, eliminando gli spigoli $\{3, 8\}$ e $\{9, 13\}$ ed aggiungendo il vertice 15 con le stesse modalità, si ottiene un grafo di tipo $R^0_{15,4}$ e così via. Il teorema segue.

Osserviamo che la procedura utilizzata per ottenere da un grafo $R^0_{n,4}$ (n pari) un grafo $R^0_{n+1,4}$ si può adottare in generale: trovato un grafo di tipo $R^0_{n,h}$ (h pari) e supposto che in esso vi siano $\frac{h}{2}$ spigoli a due a due disgiunti, si ottiene un grafo di tipo $R^0_{n+1,h}$ eliminando questi spigoli e congiungendo un nuovo vertice con gli estremi di tutti gli spigoli.

Allora dal Teorema 1 e dal Teorema 5 di [3] segue il seguente:

Corollario. *In un grafo di tipo* $R^0_{2h,h}$ *non ci possono essere* $\frac{h}{2}$ *spigoli a due a due disgiunti.*

3 - Costruzioni di grafi privi di clique da altri privi di clique

Esaminiamo ora una serie di costruzioni che consentono di ottenere grafi privi di clique da altri con la stessa proprietà.

Come in [3], se G e G' sono grafi dello stesso ordine con il simbolo G^*G' si intenderà un grafo contenente G e G' tale che ogni vertice di $G[G']$ sia adiacente ad uno e ad un solo vertice di $G'[G]$.

Osservazione 1. Se G e G' sono grafi regolari di ordine n e di valenza k, privi di clique, allora G^*G' è un grafo regolare di ordine $2n$, di valenza $k + 1$ e privo di clique (*costruzione* A).

Se G_1, G_2 e G_3 sono grafi dello stesso ordine, con il simbolo $(G_1, G_2, G_3)^*$ intenderemo un grafo contenente G_1, G_2 e G_3 più il ciclo

$$v_1^{(1)} v_1^{(2)} v_1^{(3)} v_2^{(1)} v_2^{(2)} v_2^{(3)} \dots v_n^{(1)} v_n^{(2)} v_n^{(3)} v_1^{(1)} ,$$

dove $v_i^{(j)}$ sono i vertici di G_j.

Osservazione 2. Se G, G' e G'' sono grafi regolari dello stesso ordine n e di valenza k, privi di clique, un grafo $(G, G', G'')^*$ è di ordine $3n$, di valenza $k+2$ e privo di clique (*costruzione* B).

Se si considerano $p \geqslant 4$ grafi regolari $G_1 G_2, \ldots, G_p$ di ordine n e di valenza k, con il simbolo $(G_1, G_2, \ldots, G_p)^{**}$ intenderemo un grafo G contenente i grafi G_i più i cicli

$$v_r^{(1)} v_r^{(2)} \ldots, v_r^{(p)} v_r^{(1)} \qquad \text{per } r = 1, 2, \ldots, n$$

dove $v_r^{(j)}$ sono i vertici di G_J.

Osservazione 3. Se $G_1, G_2, \ldots, G_p$ sono grafi regolari di ordine n e di valenza k, privi di clique, un grafo $(G_1, G_2, \ldots, G_p)^{**}$ è di ordine np, di valenza $k+2$ e privo di clique (*costruzione* C).

In [3] (Teorema 5) si è costruito l'unico grafo di tipo $R^0_{2k,\,k}$; in esso vengono ad individuarsi due insiemi stabili, siano $\{1, 2, \ldots, k\}$ e $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$; allora, da due grafi di tipo $R^0_{2k,\,k}$ si ottiene un grafo del tipo $R^0_{4k,\,k+2}$ aggiungendo i cicli

$$(1, 1', 2, 2', \ldots, k, k', 1) \qquad (a_1, a'_1, a_2, a'_2, \ldots, a_k, a'_k, a_1)$$

dove $\{1', 2', \ldots, k'\}$ e $\{a'_1, a'_2, \ldots, a'_k\}$ sono gli insiemi stabili del secondo dei grafi $R^0_{2k,\,k}$.

Il grafo G di tipo $R^0_{4k,\,k+2}$ ottenuto (*costruzione* D) sarà indicato con il simbolo $G'(^*)G''$ dove G' e G'' sono i due grafi di ripo $R^0_{2k,\,k}$ suddetti.

Nel grafo G di tipo $R^0_{4k,\,k+2}$ così ottenuto risultano stabili gli insiemi

$$\{1, 2, \ldots, k, a'_1, a'_2, \ldots, a'_k\} \qquad \{1', 2', \ldots, k', a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

L'operazione può allora essere ripetuta a due grafi di tipo $R^0_{4k,\,k+2}$ del tipo trovato, ottenendo un grafo di tipo $R^0_{8k,\,k+4}$ e così via, per ottenere, in generale, in virtù dell'ipotesi di induzione, un grafo di tipo $R^0_{sk,\,k+2p}$, con $s = 2^{p+1}$.

I risultati precedenti e quelli contenuti nelle Osservazioni 1, 2 e 3, applicati al caso d'un grafo di tipo $R^0_{2k,\,k}$ sono raccolti nell'enunciato del seguente teorema, dimostrabile facilmente per induzione.

Teorema 3. *Per ogni $k \geqslant 1$ e per ogni $p \geqslant 0$ esistono i grafi di tipo*

$$R^0_{sk,\,k+p} \qquad R^0_{2t,\,k+2p} \qquad R^0_{sk,\,k+2p}$$

con $s = 2^{p+1}$ *e* $t = 3^p$. *Per ogni* $k \geqslant 1$ *e per ogni* $p \geqslant 4$ *esiste un grafo del tipo* $R^0_{2ku,\, k+2m}$ *con* $u = \prod_i^m p_i$.

Dimostriamo, ora, un teorema che indica un'ulteriore costruzione di grafi privi di clique a partire da altri con la stessa proprietà.

Teorema 4. *Se esiste un grafo di tipo* $R^0_{n,\, k}$ *e se* $n \geqslant 2k + 2$, *per ogni* $k > 1$ *e per ogni* $p > 1$, *esiste un grafo di tipo* $R^0_{sn,\, k+2p}$ *con* $s = 2^p$.

Richiamiamo il seguente risultato, congetturato da P. Herdos e dimostrato da A. Hajnal e E. Szemeredi in [6]

Proposizione 1. *I vertici d'un grafo d'ordine n e di grado massimo k possono essere suddivisi in* $h + 1$ *insieme stabili disgiunti aventi ciascuno* $\{ \frac{n}{k+1} \}$ *o* $[\frac{n}{k+1}]$ *elementi.*

I simboli $\{x\}$, $[x]$, con $x \in \boldsymbol{R}$, indicano rispettivamente il minimo intero maggiore o uguale ad x, il massimo intero minore o uguale ad x.

Per la proposizione suddetta, se $n \geqslant 2k + 2$, i vertici d'un grafo $R_{n,\, k}$ possono essere suddivisi in insiemi stabili di cardinalità maggiore o uguale a 2; allora, da due copie di un grafo di tipo $R^0_{n,\, k}$, detti $A_1, A_2, \ldots$ gli insiemi stabili dell'uno e $A_1', A_2', \ldots$ i corrispondenti insiemi stabili dell'altro, se $v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \ldots$ sono gli elementi di A_i e $w_1^{(i)}, w_2^{(i)}, \ldots$ gli elementi di A_i', si ottiene un grafo di tipo $R^0_{2n,\, k+2}$ aggiungendo i cicli

$$v_1^{(i)} w_1^{(i)} v_2^{(i)} w_2^{(i)} \ldots v_{s_i}^{(i)} w_{s_i}^{(i)} v_1^{(i)}$$

per $i = 1, 2, \ldots$, essendo s_i la cardinalità di A_i.

Porremo $G = G'(**)G''$, se G' e G'' sono le copie suddette e G è il grafo ottenuto.

Il teorema è perciò vero per $p = 1$. La Proposizione 1 è applicabile utilmente ai grafi successivamente ottenuti con la suddetta costruzione, se gli insiemi stabili dei grafi ottenuti hanno cardinalità maggiore o uguale a 2; osserviamo allora che, dato un grafo di tipo $R^0_{sn,\, k+2p}$, $s = 2^p$, se risulta

$$sn \geqslant 2(k + 2p + 1) \tag{1}$$

sarà possibile costruire un grafo di tipo $R^0_{tn,\, k+2(p+1)}$ con $t = 2^{p+1}$.

Dalla (1) si deduce, però

$$2^{p+1}n \geqslant 4k + 8p + 4 > 2k + 4p + 6 \tag{2}$$

cioè $2^{p+1}n > 2(k + 2p + 3)$ e questo implica la possibilità della costruzione d'un grafo di tipo $R^0_{vn,\, k+(p+2)}$, $v = 2^{p+2}$.

Il teorema segue per induzione.

Segnaliamo, ancora, un'ulteriore costruzione, contenuta nella seguente osservazione (*costruzione* E).

Osservazione 4. Siano G e G' due grafi regolari privi di clique, di valenze h e $h-1$ e di ordini $2n$ e $\frac{n}{2}$, rispettivamente. Supponiamo che i vertici di G si possano raggruppare in coppie (a_i, b_i), per $i = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$ tali che a_i sia disgiunto da b_i per ogni i.

Allora, dai grafi G e G' si ottiene un grafo G'' privo di clique, di ordine $\frac{3n}{2}$ e di valenza $h+1$, congiungendo ogni vertice c_i di G' con i vertici della coppia (a_i, b_i), aggiungendo cioè gli spigoli $\{a_i, c_i\}$ e $\{b_i, c_i\}$, per $i = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$. Useremo il simbolo $G'' = G^\frown G'$.

Infine, indichiamo un'ulteriore costruzione (*costruzione* F).

Osservazione 5. In un grafo di tipo $R^0_{2k,\, k}$ vi sono due insiemi stabili $I = \{1, 2, \ldots, k\}$ e $J = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Ogni vertice di I è adiacente ad ogni vertice di J. Sia i adiacente ad a_i. Eliminiamo gli spigoli $\{i, a_i\}$ ed aggiungiamo i vertici V e V' e gli spigoli $\{i, V\}$ e $\{a_i, V'\}$ per $i = 1, 2, \ldots, k$. Si ottiene, in tal guisa, un grafo $R^0_{2k+2,\, k}$. L'operazione può essere ripetuta eliminando progressivamente gli spigoli $\{i, a_{i+m}\} \pmod{k}$, per $i = 1, 2, \ldots, k$ e per $m = 1, 2, \ldots, k+2$, ed aggiungendo vertici e spigoli come sopra, ottenendo così grafi del tipo

$$R^0_{2k+4,\, k},\ R^0_{2k+6,\, k},\ \ldots,\ R^0_{4k-2,\, k};$$

del grafo di partenza restano gli spigoli

$$\{1, a_k\},\ \{2, a_1\},\ \ldots,\ \{k, a_{k-1}\}$$

che non debbono essere eliminati, pena la sconnessione.

4 - Grafi $R^0_{n,\,5}$ e $R^0_{n,\,6}$

Esaminiamo i casi particolari $R^0_{n,\,k}$ per $k = 5, 6$. Osserviamo (Teorema 2) che per ogni $n \geqslant 10$ esiste un $R^0_{n,\,4}$. Allora, se G è un grafo di tipo $R^0_{n,\,4}$ ottenuto con la procedura indicata nel Teorema 2, il grafo

$$G' = G^*G \tag{3}$$

è di tipo $R^0_{2n,5}$. Da ciò segue che esiste un grafo di tipo $R^0_{n,5}$ per ogni $n \geqslant 20$. Poiché, poi, esiste un grafo di tipo $R^0_{10,5}$, esistono i grafi di tipo $R^0_{12,5}$, $R^0_{14,5}$, ..., $R^0_{18,5}$, in base alla costruzione F. Osserviamo poi che un grafo di tipo $R^0_{18,5}$ può essere ottenuto, per altra via, applicando la costruzione E. Infatti, ricordando che se nella (3) G è un grafo $R^0_{6,3}$, risulta G' di tipo $R^0_{12,4}$, segue che in G' così ottenuto esistono le coppie

$$\{1, 2\} \quad \{3, 1'\} \quad \{2', 3'\} \quad \{a_1, a_2\} \quad \{a_3, a_1'\} \quad \{a_2', a_3'\}$$

con elementi disgiunti; allora, applicando la costruzione E, al grafo G' e al grafo G si ottiene un grafo $G'' = G^\frown G'$ di tipo $R^0_{18,5}$. Quest'ultimo risulta *non isomorfo* all'altro precedentemente ottenuto perché, come si può vedere, in esso i vertici possono ripartirsi in tre insiemi, il sottografo generato da ognuno dei quali è un bipartito $K_{3,3}$, cosa che non può farsi nell'altro.

Dalle considerazioni precedenti segue, allora, il

Teorema 5. *Per ogni $n > 10$ (n pari) esiste un grafo di tipo $R^0_{n,5}$.*

Esaminiamo, infine, il caso $k = 6$. Distinguiamo due sottocasi:

n pari - Da un grafo di tipo $R^0_{12,6}$ (Teorema 5, [3]) si ottengono (costruzione F) grafi di tipo $R^0_{14,6}$, $R^0_{16,6}$, ..., $R^0_{22,6}$. Si ha poi che, se nella (3) G è un grafo di tipo $R^0_{12,5}$, G' è un grafo di tipo $R^0_{24,6}$; per $n \geqslant 24$, esiste un grafo G di tipo $R^0_{\frac{n}{2},4}$ (Teorema 2), onde il grafo $G' = G(^{**})G$ è di tipo $R^0_{n,6}$. Da ciò, per il Teorema 4, segue l'esistenza di grafi di tipo $R^0_{n,6}$ per ogni n pari maggiore o uguale a 12.

n dispari - Supponiamo che sia $n - 1 = 4k$. Ricordiamo ([9] e [4], Corollario 2, p. 271) che, per ogni grafo G connesso di ordine n con m spigoli, che non sia una clique, per il numero di stabilità di G risulta

$$\alpha(G) > \frac{n^2}{2m + n}. \tag{4}$$

Allora, posto che sia, nella (3), G di tipo $R^0_{2k,5}$, G' risulta di tipo $R^0_{n-1,6}$. Per la (4) si ha $\alpha(G) > \dfrac{k}{3}$. Se $k \geqslant 6$, allora in G esiste un insieme stabile con 3 elementi. Conseguentemente, in G' esistono 6 vertici 1, 2, 3, a_1, a_2, a_3, con i adiacente ad

a_i e $\{1, 2, 3\}$ e $\{a_1, a_2, a_3\}$ insiemi stabili. Eliminando allora da G gli spigoli $\{i, a_i\}$ ed aggiungendo il vertice V e gli spigoli $\{i, V\}$, $\{a_i, V\}$, si ottiene un grafo di tipo $R^0_{n,6}$. Si ha perciò il

Teorema 6. *Per ogni n pari maggiore o uguale a 12 e per ogni n dispari, $n-1$ doppio di un numero pari, $n \geqslant 25$, esiste un grafo di tipo $R^0_{n,6}$.*

Rimane aperta la questione dell'esistenza di grafi di tipo $R^0_{n,6}$, con n dispari, $n \geqslant 25$ ed $n-1$ contenente un solo fattore uguale a due.

Bibliografia

[1] S. Antonucci, *Colorazioni semplici e generalizzate delle cliques private di cicli hamiltoniani e dei grafi regolari*, Riv. Mat. Univ. Parma **9** (1983), 447-456.

[2] S. Antonucci, *Su una generalizzazione dei grafi T e sulla regolarità quasi forte*, Riv. Mat. Univ. Parma **13** (1987), 395-400.

[3] S. Antonucci, *Costruendo grafi regolari*, Riv. Mat. Univ. Parma **17** (1991), 265-270.

[4] C. Berge, *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.

[5] M. Gionfriddo, *Sulle colorazioni L_s d'un grafo finito*, Boll. Un. Mat. Ital. **15-A** (1978), 444-454.

[6] A. Hajnal and S. Szemeredi, *Proof of a conjecture of P. Erdos*, Combinatorial theory and its applications, Balatonfured (Erdos, Renyi, V. J. Ses ed.), North Holland, Amsterdam, 1970, 601-623.

[7] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1969.

[8] F. Speranza, *Colorazioni di specie superiore d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. **12**, suppl. fasc. 3 (1975), 53-62.

[9] P. Turan, *An extremal problem in graph theory*, Mat. Fiz. Lapok 48 (1941), 436-452.

Summary

We study existence problems for regular graphs without cliques and give some constructions to obtain graphs without cliques from other ones of the same type. Last, we consider in particular graphs $R_{n,5}$ and $R_{n,6}$ without cliques.

* * *