

RENATA GRIMALDI (*)

**Noeuds et links fibrés
et géométrie asymptotique de feuilles (**)**

Introduction

Dans ce travail tous les objets sont de classe C^∞ . Soit V^3 une variété différentiable fermée (c'est-à-dire compacte sans bord), connexe, orientable, de dimension 3 (en particulier, la sphère S^3); sur V^3 on considère un feuilletage \mathcal{F} , de codimension 1, qui est construit à partir d'un *link fibré* ou d'un *noeud fibré* (en particulier, du noeud de trèfle dans S^3) et on étudie la *géométrie asymptotique* (c'est-à-dire le type de quasi-isométrie, voir 1) des *bouts isolés* (voir la Déf. 1) des feuilles non compactes.

Les résultats principaux de cet article ont été annoncés dans la Note [3]₃.

Ce travail, qui est né d'une suggestion de B. Reinhart, est le premier pas d'un ample programme: l'étude de questions de géométrie asymptotique pour les feuilletages des *sphères de dimension impair* (voir [5]₁ et [2]).

L'Auteur désire remercier V. Poénaru aussi pour quelques discussions sur l'argument.

1 - Géométrie asymptotique de feuilles et bouts isolés

Si M est une variété différentiable *compacte* et si F est une feuille non compacte d'un feuilletage différentiable \mathcal{F} sur M , alors on sait (voir [10] et [3]₁) que

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università di Palermo, via Archirafi 34, I-90123 Palermo.

(**) Travail réalisé avec l'aide financière du M.P.I. d'Italie.

MR classification 57R30. - Ricevuto: 21-X-1990.

toutes les métriques riemanniennes induites sur F par les métriques de M appartiennent à la même classe d'équivalence de métriques *complètes quasi-isométriques*, qui s'appelle la *géométrie asymptotique* de la feuille F (voir aussi les travaux [3]₂ à [4]₅).

Cette géométrie asymptotique est une propriété *intrinsèque* de F , indépendante de la métrique riemannienne de M .

Nous allons définir, maintenant, les *bouts isolés* de feuilles de dimension 2 et nous allons expliquer comment on peut parler de géométrie asymptotique d'un tel bout.

En général, soit F une surface ouverte obtenue à partir d'une surface fermée en ôtant un ensemble fermé totalement discontinu: par exemple, en ôtant un nombre *fini* de points.

Déf. 1. Une sous-variété *propre* $U \subset F$ telle que U soit difféomorphe à $S^1 \times [0, +\infty[$, définit un *bout isolé* de F .

Par exemple, un cusp quasi-isométrique (voir [3]₂) est un bout isolé.

Déf. 2. On dit que deux telles sous-variétés $U_1, U_2 \subset F$ définissent le *même* bout isolé si et seulement si elles sont *équivalentes* dans le sens suivant: l'intérieur de $U_1 \cap U_2$ contient une autre sous-variété $U \cong S^1 \times [0, +\infty[$, proprement plongée dans F . On écrira, alors, $U_1 \sim U_2$.

Soit, maintenant, g une métrique riemannienne *complète* sur F et soit (\mathring{U}, g) la structure induite sur l'intérieur \mathring{U} de U . La variété (\mathring{U}, g) est *complète du côté $t = \infty$ et incomplète du côté $t = 0$* , dans le sens suivant: soit $p \in \mathring{U}$ et soit γ une géodésique de (\mathring{U}, g) partant de p . Si γ ne touche pas à $S^1 \times \{0\}$, elle pourra être continuée indéfiniment dans \mathring{U} . En d'autres termes, soit $\{t_n\}$ une suite de points de $]0, +\infty[$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$, et soit $\{p_n = (x_n, t_n)\}$ une suite de (\mathring{U}, d) , où d est la distance induite par la métrique g : $\{p_n\}$ tend vers l'infini dans le sens de la distance d , puisque (F, d) est complète du côté $t = \infty$.

Soient U_1 et U_2 deux sous-variétés propres de F telles que $U_i \cong S^1 \times [0, +\infty[$, $i = 1, 2$.

Proposition 1. *Si U_1 et U_2 définissent le même bout isolé, alors les variétés (\mathring{U}_1, g) et (\mathring{U}_2, g) sont quasi-isométriques.*

Dém. Si $U_1 \sim U_2$, il existe $U \cong S^1 \times [0, +\infty[$ telle que U est proprement plongée dans F et $U \subset \overset{\circ}{U}_1 \cap \overset{\circ}{U}_2$.

On peut bien trouver des difféomorphismes $\varphi_i: F \rightarrow F$, $i = 1, 2$, à support compact, tels que $\varphi_i(U_i) = U$, $i = 1, 2$; ça veut dire que, pour tout $x \in U$, à l'exception d'un ensemble compact on a $\varphi_1^{-1}(x) = x = \varphi_2^{-1}(x)$.

Alors $\varphi_{i|\overset{\circ}{U}_i}$ sera une quasi-isométrie entre $(\overset{\circ}{U}_i, g)$ et $(\overset{\circ}{U}, g)$ et, par conséquent, le difféomorphisme

$$(\varphi_{2|\overset{\circ}{U}_2})^{-1} \circ (\varphi_{1|\overset{\circ}{U}_1}): \overset{\circ}{U}_1 \rightarrow \overset{\circ}{U}_2$$

sera une quasi-isométrie entre $(\overset{\circ}{U}_1, g)$ et $(\overset{\circ}{U}_2, g)$.

On suppose, maintenant, que F est feuille d'un feuilletage d'une variété compacte M et que g_1 et g_2 sont deux métriques riemanniennes quelconque de M . Comme nous avons déjà dit, g_1 et g_2 induisent des métriques quasi-isométriques sur toute feuille, en particulier sur F .

On montre, alors, la suivante

Proposition 2. *Si $U_1 \sim U_2$, les variétés $(\overset{\circ}{U}_1, g_1)$ et $(\overset{\circ}{U}_2, g_2)$ sont quasi-isométriques.*

Dém. Soit $U \subset \overset{\circ}{U}_1 \cap \overset{\circ}{U}_2$. On sait (voir [10], [3]₁) que l'identité $I: (F, g_1) \rightarrow (F, g_2)$ est une quasi-isométrie; par restriction c'est aussi une quasi-isométrie entre $(\overset{\circ}{U}, g_1)$ et $(\overset{\circ}{U}, g_2)$. Alors comme d'après la Proposition 1 $(\overset{\circ}{U}_i, g_i)$ est q.i. à $(\overset{\circ}{U}, g_i)$, $i = 1, 2$, on trouve une q.i. entre $(\overset{\circ}{U}_1, g_1)$ et $(\overset{\circ}{U}_2, g_2)$.

Ceci nous permet, donc, de parler de la *géométrie asymptotique attachée au bout isolé* respectif de la feuille F .

2 - Noeuds et links fibrés et feuilletages

Dorénavant V^3 sera une variété différentiable de dimension 3, fermée, connexe et orientable.

On appelle *link* de V^3 une sous-variété L compacte sans bord, de dimension un, de V^3 .

En particulier, si la sous-variété L a une seule composante connexe, alors elle s'appelle *noeud* (voir, par exemple [11]).

Si $L \subset V^3$ est un link à n composantes connexes $C_i, i = 1, \dots, n$, on peut considérer, pour chaque C_i , un voisinage tubulaire $C_i \times D^2$ contenu dans V^3 ; la réunion (disjointe) $T(L) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^n (C_i \times D^2) = L \times D^2$ est donc un voisinage tubulaire du link L .

On a, alors, que $V^3 - L$ est *difféomorphe* à $V^3 - T(L)$.

On dit que L est un *link fibré* (pour $n = 1$, un *noeud fibré*) s'il existe une fibration du complément $V^3 - L$ sur S^1 , en fait même une *fibration f de $V^3 - T(L)$ sur S^1* , dont les fibres $B_x \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(x), x \in S^1$, sont des surfaces (de Seifert, voir [11]) compactes, connexes, orientables, de genre $g \geq 1$, à bord (qui est constitué de n composantes connexes) et on a, pour chaque $x \in S^1$,

$$\partial B_x = B_x \cap \partial(V^3 - \overset{\circ}{T}(L))$$

et, puisque $\partial(C_i \times D^2) = C_i \times \partial D^2 = C_i \times S^1, i = 1, \dots, n$, alors

$$\partial B_x = B_x \cap (L \times S^1) = L \times \{x\}$$

cette intersection est transverse.

Par exemple, le noeud de trèfle dans S^3 est fibré et chaque fibre est une surface de Seifert de genre 1 avec une unique composante du bord.

Remarque 1. Une fibration d'un noeud, avec $g \geq 1$, est toujours non triviale et le noeud en question est automatiquement non trivial lui aussi. Les fibrations avec $g = 0$ apparaissent seulement pour les noeuds triviaux et elles sont triviales.

Remarque 2. Le problème de savoir quand le complément d'un noeud dans S^3 est fibré sur S^1 a été étudié complètement par Stallings [12] (voir aussi [9]).

Remarque 3. Une classe très importante de noeuds et links fibrés est donnée par les noeuds et les links de la géométrie algébrique (voir le *théorème de fibration de Milnor* [8]).

Par un *théorème classique d'Alexander* [1] on sait que dans une variété V^3 il existe toujours un link L qui est fibré sur S^1 .

Soit, donc, $L = \bigcup_{i=1}^n C_i$ un link fibré dans V^3 . On peut feuilletter V^3 par un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 (voir Lawson [5]₂) de la manière suivante:

(1) on considère un voisinage tubulaire $T(L) = L \times D^2$ du link L et, dans chaque tore plein de $T(L)$, on considère le feuilletage de Reeb dont la surface de genre 1 qui est le bord de ce tore plein est la seule feuille compacte et dont toutes les feuilles non compactes sont des plans. Chaque tore plein ainsi feuilleté s'appelle une *composante de Reeb*.

(2) À l'extérieur de $T(L)$, dans $V^3 - T(L)$ on a la fibration sur S^1 dont chaque fibre F_x est exactement la fibre B_x privée du bord

$$F_x = B_x - \partial B_x ;$$

ces fibres F_x sont, alors, *difféomorphes* à une surface connexe, orientable, compacte, *privée de n points*.

En faisant *spiraler* (voir la Figure 1) ces fibres F_x autour de $\partial T(L)$, c'est-à-dire autour du bord des composantes de Reeb, on obtient un *feuilletage* \mathcal{F}_0 de $V^3 - T(L)$.

Si m et p désignent, respectivement, un méridien et un parallèle du tore qui est bord d'une composante de Reeb, nous dessinons une section à travers un plan qui contient le cercle m :

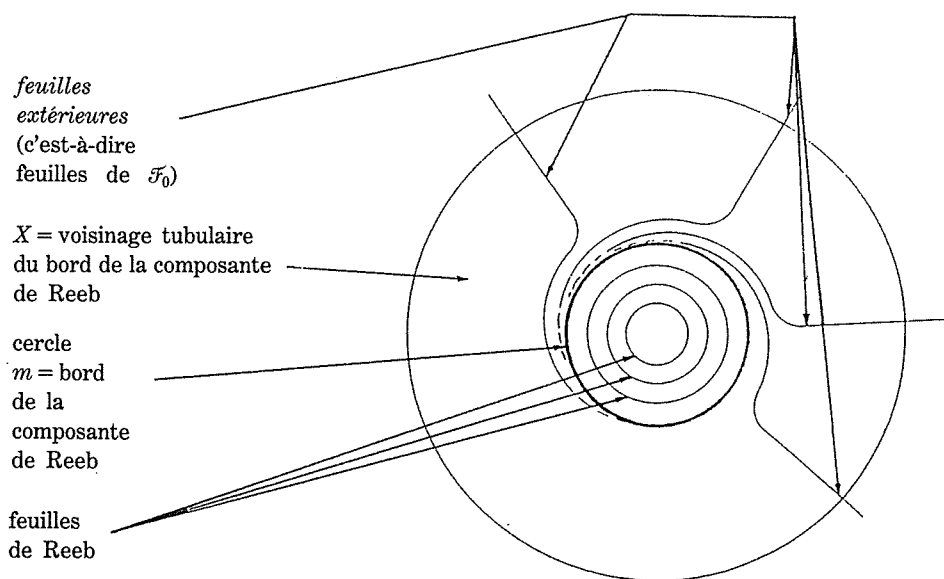


Fig. 1.

En mettant ensemble \mathcal{F}_0 et les composantes de Reeb, on obtient finalement un feuilletage \mathcal{F} , de codimension 1, de V^3 , construit à partir d'un link fibré L . Pendant que les feuilles extérieures spiralent autour du méridien m du tore, les feuilles de Reeb spiralent autour du parallèle p .

Dans le cas d'un noeud de trèfle dans S^3 , les feuilles de \mathcal{F}_0 sont *difféomorphes* à une surface connexe, orientable, de genre 1, compacte, *privée d'un point*.

Remarque 4. Au moyen d'une autre construction Lickorish [6] a démontré que toute variété compacte, orientable, de dimension 3, admet un feuilletage de codimension 1.

Soit, donc, \mathcal{F} un feuilletage de V^3 construit à partir d'un link fibré; observons qu'à chacun des n points enlevés d'une fibre B_x correspond, pour la feuille obtenue, un *bout isolé*.

On montre finalement le résultat suivant.

Théorème. (I) *La géométrie asymptotique des feuilles non compactes des composantes de Reeb n'est jamais quasi-isométrique à (\mathbb{R}^2, \hat{g}) , où \hat{g} est une métrique à courbure gaussienne partout négative ou nulle.*

(II) *Pour ce qui concerne toutes les feuilles non compactes de \mathcal{F} , la géométrie asymptotique de tout bout isolé est exactement celle cylindrique plate de $S^1 \times]0, +\infty[$.*

Dém. Pour la partie (I), voir [4]₁: il n'y a rien à changer et on n'a plus qu'à s'occuper de (II).

Soit F une feuille de l'extérieur des composantes de Reeb et considérons un bout isolé, disons U , de F : comme nous avons déjà dit, il *spirale* autour du bord T^2 d'une composante de Reeb (voir encore la Figure 1).

Puisque toutes les métriques riemanniennes induites sur $\overset{\circ}{U}$ par les métriques de V^3 sont quasi-isométriques, il suffit d'étudier la métrique induite sur $\overset{\circ}{U}$ par une métrique g bien choisie sur V^3 .

Considérons, alors, un voisinage tubulaire ouvert Y de T^2 (bord de la composante de Reeb), du type $Y = T^2 \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$, et soit $W \stackrel{\text{def}}{=} V^3 - (T^2 \times [-\varepsilon/2, \varepsilon/2])$.

On a, naturellement, $V^3 = Y \cup W$.

Soit g_0 la *métrique plate* de T^2 et soit δ la *métrique standard* de l'intervalle ouvert $] - \varepsilon, \varepsilon[$.

Nous démontrons d'abord la proposition suivante.

Proposition 3. *Sur V^3 il existe une métrique riemannienne g qui, sur $T^2 \times] - \varepsilon/4, \varepsilon/4[$ coïncide avec la métrique produit de g_0 et de δ .*

Dém. Sur Y nous considérons la métrique produit $g_1 = g_0 \oplus \delta$ et sur W une métrique quelconque g_2 . En utilisant une partition de l'unité on a la conclusion.

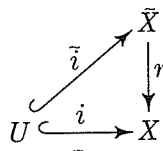
Revenons, maintenant, à la preuve du théorème.

Soit X le voisinage tubulaire du tore T^2 donné, exactement, par $T^2 \times]0, \varepsilon/4[$ (voir encore la Figure 1), et soit $U \xrightarrow{i} X$ l'injection de U dans X ; i est une *immersion injective non propre*.

Puisque $]0, \varepsilon/4[$ est contractile, le groupe fondamental $\pi_1 X$ est le même que celui du tore T^2 , c'est-à-dire le produit direct $Z\alpha \times Z\beta$ (où α décrit le méridien m , bord d'un disque de la composante de Reeb, et β décrit le parallèle p , bord correspondant de la fibre à partir de laquelle nous avons obtenu la feuille F en question).

Soit H le sous-groupe de $\pi_1 X$ donné par $H = Z\beta$ et soit $\tilde{X} \xrightarrow{r} X$ le revêtement infini cyclique (pas universel) de X qui correspond à H , c'est-à-dire tel que $r_*(\pi_1 \tilde{X}) = H$.

Puisque $U \cong S^1 \times [0, +\infty[$, le groupe fondamental $\pi_1 U$ est Z et l'homomorphisme d'inclusion i_* est un isomorphisme entre $\pi_1 U$ et $H \subset \pi_1 X$. Alors puisque l'image de $\pi_1 U$ est contenue dans H on peut considérer le *relèvement* \tilde{i} de i à \tilde{X} [7]



et cette application \tilde{i} est un *plongement propre*.

Soit g la métrique que nous venons de construire sur V^3 , soit g_1 sa restriction

à X , qui coïncide avec $g_0 \oplus \varepsilon$, et soit aussi \tilde{g}_1 la *seule* métrique sur \tilde{X} telle que le revêtement r soit *riemannien*

$$\tilde{g}_1 = r^* g_1$$

r est donc une *locale isométrie*.

Sur U on a alors

$$i^* g_1 = \tilde{i}^* \tilde{g}_1.$$

Maintenant, le revêtement \tilde{X} étant $(\mathbb{R} \times S^1) \times]0, \varepsilon/4]$, la métrique \tilde{g}_1 sera le produit de trois métriques standard *plates*; la métrique $\tilde{i}^* \tilde{g}_1$ est *plate elle-même*.

Ainsi, nous allons étudier la géométrie asymptotique de U plongé proprement dans (\tilde{X}, \tilde{g}_1) .

Decrivons le feuilletage de \tilde{X} dont les feuilles sont les *relèvements isométriques* des bouts isolés des feuilles extérieures de V^3 (bouts isolés correspondant à la composante de Reeb en question).

Soient (x, y, z) des coordonnées pour $\tilde{X} = \mathbb{R} \times S^1 \times]0, \varepsilon/4]$: la coordonnée x est celle du revêtement universel du cercle α , la coordonnée y est celle du cercle β , tandis que la coordonnée z est celle de $]0, \varepsilon/4]$.

D'abord dessinons le feuilletage de la band $\mathbb{R} \times]0, \varepsilon/4]$.

Soit $z = k(x)$ une fonction C^∞ , strictement décroissante, telle que $k(0) = \varepsilon/4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 0$. On va appeler K la courbe $z = k(x)$. Par translation de la courbe K le long de l'axe x , on obtient un feuilletage de $\mathbb{R} \times]0, \varepsilon/4]$ (voir la Figure 2).

En prenant le produit (riemannien) avec S^1 on obtient un feuilletage de $\tilde{X} = \mathbb{R} \times S^1 \times]0, \varepsilon/4]$ qui est invariant pour les mêmes translations et dans lequel $\tilde{i}(U)$ avec sa métrique s'identifie à $S^1 \times K$ avec la métrique induite de celle produit de \tilde{X} .

À ce point, on voit bien que sur $\tilde{i}(\overset{\circ}{U})$ la métrique \tilde{g}_1 sera *exactement* celle de $S^1 \times]0, +\infty]$, qui est *plate*.

Donc la géométrie asymptotique de $(\overset{\circ}{U}, g_1)$ est *quasi-isométrique* à celle cylindrique plate de $S^1 \times]0, +\infty]$.

Si on considère, enfin, les feuilles à l'intérieur des composantes de Reeb, elles ont un bout isolé, qui est cylindrique plat lui-même.

Le théorème est ainsi démontré.

Remarque 4. Le *type de croissance* [2] de toutes les feuilles de \mathcal{F} est *linéaire*.

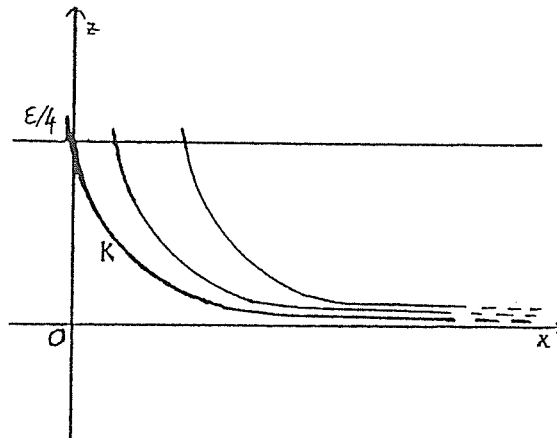


Fig. 2.

Références bibliographiques

- [1] J. W. ALEXANDER, *A lemma on systems of knotted curves*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 9 (1923), 93-95.
- [2] C. GODBILLON, *Feuilletages. Études géométriques (I) et (II)*, Publication de l'I.R.M.A. de Strasbourg, 1986.
- [3] R. GRIMALDI: [\bullet]₁ *Sulla geometria asintotica delle foglie di una foliazione*, Rend. Circ. Mat. Palermo, (III) 32 (1983), 199-207; [\bullet]₂ *Non-esistenza di cusps nella geometria asintotica delle foglie*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Natur. 80 (1986), 292-297; [\bullet]₃ *Géométrie asymptotique et noeuds fibrés*, C. R. Acad. Sci. Paris 309 (1989), 933-936.
- [4] R. GRIMALDI et G. PASSANTE: [\bullet]₁ *Sulla geometria asintotica delle foglie di una foliazione*, II, Atti Accad. Sci. Torino 118 (1984), 97-100; [\bullet]₂ *La géométrie asymptotique pour les feuilletages d'Anosov*, C. R. Acad. Sci. Paris 300 (1985), 275-276; [\bullet]₃ *La geometria asintotica per le foliazioni di Anosov*, Boll. U.M.I. (6) 5-A (1986), 321-329; [\bullet]₄ *La géométrie asymptotique des feuilles exceptionnelles des feuilletages d'Anosov*, C. R. Acad. Sci. Paris, 305 (1987), 85-87; [\bullet]₅ *La geometria asintotica delle foglie eccezionali delle foliazioni di Anosov*, Ann. di Mat. Pura ed Appl. (IV) 152 (1988), 345-358.
- [5] H. B. LAWSON jr.: [\bullet]₁ *Codimension one foliations of spheres*, Ann. of Math., (2) 94 (1971), 494-503; [\bullet]₂ *Foliations*, B.A.M.S. 80 (1974), 369-418.
- [6] W. B. R. LICKORISH, *A foliation for 3-manifolds*, Ann. of Math. 82 (1965), 414-420.
- [7] W. S. MASSEY, *Algebraic Topology. An introduction*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1977.
- [8] J. MILNOR, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies 61, Princeton Univ. Press, 1968.

- [9] L. NEUWIRTH, *On Stallings fibrations*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 380-381.
- [10] A. PHILLIPS et D. SULLIVAN, *Geometry of leaves*, Topology **20** (1981), 209-218.
- [11] A. ROLFSEN, *Knots and links*, Math. Lect. (7), Publish or Perish, Boston, 1976.
- [12] J. STALLINGS, *On fibering certain 3-manifolds*, Univ. of Georgia Conference on Topology of Manifolds, 1961.

Abstract

If V^3 is a closed, connected and orientable 3-manifold and if \mathcal{F} is a codimension one foliation of V^3 , which is constructed from a fibred knot or from a fibred link, we study the asymptotic geometry of isolated ends of the non compact leaves.
