Riv. Mat. Univ. Parma (4) **17** (1991), 87-97

M. FRIGON et A. GRANAS (*)

Problèmes aux limites pour des inclusions différentielles de type semi-continues inférieurement (**)

Introduction

Nous sommes concernés ici par des théorèmes d'existence de solutions du problème suivant

$$(*)\qquad \begin{array}{ll} x''(t) \in F(t,\ x(t),\ x'(t)) & \text{p.p. } t \in [0,\ 1] \\ x \in \mathcal{B} & \end{array}$$

où F: $[0,\ 1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction multivoque de type semi-continue inférieurement à valeurs compactes, non vides, pas nécessairement convexes, et où $\mathcal{B}$ désigne l'une ou l'autre des conditions aux limites de Dirichlet ou périodique

$$(\mathrm{D})\qquad x(0) = \alpha_0 \qquad x(1) = \alpha_1$$

$$(\mathrm{P})\qquad x(0) = x(1) \qquad x'(0) = x'(1).$$

Récemment, les Auteurs [6] ont donné un principe général d'existence de solutions pour des inclusions différentielles de ce type qui repose sur la théorie de la transversalité topologique (voir [4]) et sur un théorème de sélection pour des fonctions multivoques semi-continues inférieurement dû à Bressan et Colombo [3]. Le résultat principal de ce texte établit l'existence de solution du pro-

---

(*) Indirizzo: Département de Mathématiques et Statistique, Université de Montréal, C.P. 6128, succ. A, Montréal, Canada, H3C 3J7.

(**) Recherche supportée par un fonds du CRSNG du Canada.

MR classification: 34B15; 34A60. – Ricevuto: 3-IX-1990.

blème (*) sous une hypothèse d'existence de sur et sous solutions de (*), et pour F une fonction multivoque de type semi-continue inférieurement satisfaisant une condition de croissance de type Bernstein ou Bernstein-Nagumo. Des résultats similaires on été donnés pour F une fonction de Carathéodory univoque ou multivoque à valeurs convexes dans [8] et $[5]_1$ respectivement.

1 - Préliminaires

(a) Notations. - Nous noterons par $C^k[0,1]$, l'espace des fonctions continûment différentiable jusqu'à l'ordre k, $k=0,1,\ldots$ et par $L^1(0,1)$, l'espace des fonctions Lebesgue mesurables sur $(0,1)$. Ces espaces seront munis de leur norme usuelle, respectivement: $\|x\|_k = \max\{\|x\|_0, \|x'\|_0, \|x''\|_0, \ldots, \|x^{(k)}\|_0\}$ où $\|x\|_0 = \max\{|x(t)|: t \in [0,1]\}$ et $\|x\|_{L^1} = \int_0^1 |x(t)|\, dt$. Nous noterons $C^0[0,1]$ par $C[0,1]$. La classe de toutes les fonctions x dans $C^1[0,1]$ dont la dérivée x' est absolument continue sera notée $W^{2,1}(0,1)$.

Une *solution* de notre problème sera une fonction x dans $W^{2,1}(0,1)$ vérifiant (*).

Dans un but de référence, nous énonçons le résultat suivant

Lemme 1.1 (principe du maximum). *Soit* $x \in W^{2,1}(0,1)$. *Supposons que une des deux conditions suivantes est satisfaite:*

(i) $x''(t) \geqslant 0$ p.p. $t \in (0,1)$ $\quad x(0) \leqslant 0 \quad x(1) \leqslant 0$;

(ii) $x''(t) - x(t) \geqslant 0$ p.p. $t \in (0,1)$ $\quad (x(1) = x(0),\ x'(1) \leqslant x'(0))$ *ou* $(x(1)x'(1) = x(0)x'(0) = 0)$.

Alors $x(t) \leqslant 0$ *pour tout* $t \in [0,1]$.

Soient E_1 et E_2 deux espaces métriques, X un sous-ensemble fermé de E_1 et T un espace mesurable. Soient $H: X \to E_2$ et $G: T \to E_2$ deux fonctions multivoques à valeurs fermées non vides. Nous dirons que H est *semi-continue inférieurement* (s.c.i.) (resp. *semi-continue supérieurement* (s.c.s.)) si l'ensemble $\{x \in X: H(x) \subset B\}$ est fermé (resp. ouvert) pour tout B fermé (resp. ouvert) dans E_2; elle est *continue* si elle est semi-continue inférieurement et supérieurement. Nous dirons que G est *mesurable* (resp. $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$ *mesurable*) si l'ensemble $\{t \in T: G(t) \cap B \neq \emptyset\}$ est mesurable pour tout B fermé dans E_2 (resp. si $T = I \times \mathbb{R}^k$ où I est un intervalle réel et T est muni de la σ-algèbre engendrée par les ensembles $N \times D$ où $N \subset I$ est Lebesgue mesurable et $D \subset \mathbb{R}^k$ est Borel mesurable).

Un sous-ensemble A de $L^1(I)$ est *décomposable* si pour tout u, $v \in A$ et $N \subset I$ mesurable, on a $u\chi_N + v\chi_{I \setminus N} \in A$.

(b) *Deux types de fonctions multivoques.* - Soit F: $[0, 1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction multivoque à valeurs non-vides, compactes. Nous assignons à F deux opérateurs multivoques

$$\mathcal{F}\colon C^1[0, 1] \to L^1(0, 1) \qquad \mathcal{N}\colon C^1[0, 1] \to C[0, 1]$$

définis par

$$\mathcal{F}(x) = \{v \in L^1(0, 1)\colon v(t) \in F(t, \ x(t)x'(t)) \text{ p.p. } t \in (0, 1)\}$$

$$\mathcal{N}(x) = \{w \in L^1(0, 1)\colon w(t) = \int_0^t v(s)\, ds \quad \text{avec} \quad v \in \mathcal{F}(x)\}.$$

L'opérateur $\mathcal{F}$ est appelé l'*opérateur de Niemytzki* associé à F, et $\mathcal{N}$ l'*opérateur de Carathéodory* associé à F.

En utilisant cette terminologie, nous pouvons décrire deux types de base de fonctions multivoques. Pour une plus grande généralité, voir [7].

Déf. 1.2. Soit F: $[0, 1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction multivoque à valeurs non-vides, compactes. Alors

(i) F est dite de *type semi-continue inférieurement* (*type* s.c.i.) si $\mathcal{F}$ l'opérateur de Niemytzki associé à F est semi-continu inférieurement à valeurs non vides, fermées, décomposables.

(ii) F est dite de *type semi-continue supérieurement* (*type* s.c.s.) si $\mathcal{N}$ l'opérateur de Carathéodory associé à F est semi-continu supérieurement, complètement continu et à valeurs non vides, convexes, compactes.

Considérons les conditions suivantes sur F:

(H1) (i) $(t, x, p) \mapsto F(t, x, p)$ est $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$ mesurable;
(ii) $(x, p) \mapsto F(t, x, p)$ est semi-continue inférieurement p.p. $t \in (0, 1)$.

(H1)' (i) $t \mapsto F(t, x, p)$ est mesurable pour tout $(x, p) \in \mathbb{R}^2$;
(ii) $(x, p) \mapsto F(t, x, p)$ est continue p.p. $t \in (0, 1)$.

(H1)″ (i) $t \mapsto F(t, x, p)$ est mesurable pour tout $(x, p) \in \mathbb{R}^2$;
(ii) $(x, p) \mapsto F(t, x, p)$ est semi-continue supérieurement p.p. $t \in (0, 1)$.

(H2) Pour tout $k > 0$, il existe une fonction $h_k \in L^1(0, 1)$ telle que pour tout $\|(x, p)\| \leq k$ $|F(t, x, p)| \leq h_k(t)$ p.p. $t \in (0, 1)$.

Nous pouvons maintenant formuler un résultat décrivant les deux classes de fonctions multivoques introduites précédemment.

Proposition 1.3 (voir [7]). *Soit* F: $[0, 1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction multivoque à valeurs non-vides, compactes. Supposons que les conditions* (H1), (H2) *ou* (H1)′, (H2) (*resp. F est à valeurs convexes et* (H1)″, (H2)) *sont satisfaites. Alors F est de type* s.c.i. (*resp. type* s.c.s.).

(c) *Principe d'existence.* - Soit $\mathcal{H}$: $C^1[0, 1] \times [0, 1] \to L^1(0, 1)$ une fonction multivoque, considérons les familles de problèmes suivants:

$$(1.1)_\lambda \qquad x'' \in \mathcal{H}(x, \lambda) \qquad x(0) = \alpha_0 \qquad x(1) = \alpha_1$$

$$(1.2)_\lambda \qquad x'' - x \in \mathcal{H}(x, \lambda) \qquad x(0) = x(1) \qquad x'(0) = x'(1).$$

où $\lambda \in [0, 1]$.

Suivant que l'on considère la condition aux limites de Dirichlet ou périodique, l'existence de solution de notre problème (∗) sera déduite du théorème suivant essentiellement donné dans [**6**].

Théorème 1.4. *Soit* $\mathcal{H}$: $C^1[0, 1] \times [0, 1] \to L^1(0, 1)$ *une fonction multivoquee semi-continue inférieurement à valeurs décomposables, fermées, non vides telle que* $\mathcal{H}(x, 0) = \{0\}$. *Supposons qu'on peut majorer a priori toutes les solutions de* $(1.1)_\lambda$ (*resp.* $(1.2)_\lambda$), $\lambda \in [0, 1]$ *par rapport à la norme* $\|\cdot\|_1$ *dans* $C^1[0, 1]$. *Alors le problème* $(1.1)_1$ (*resp.* $(1.2)_1$) *possède au moins une solution.*

2 - Problème de Dirichlet

2.1. Énoncé du résultat. Étant donnée une fonction multivoque à valeurs compactes, non vides F: $[0, 1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et α_0, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, nous allons considérer le problème suivant

$$(*_D) \qquad x''(t) \in F(t,\ x(t),\ x'(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,\ 1] \qquad x(0) = \alpha_0 \qquad x(1) = \alpha_1 .$$

Introduisons la notion de sur et sous solutions de $(*_D)$.

Déf. 2.1. Nous disons qu'une fonction $x \in W^{2,1}(0,\ 1)$ est une *sur solution* (resp. *sous solution) de* $(*_D)$ si:

(i) il existe $v \in L^1(0,\ 1)$ tel que $v(t) \in F(t,\ x(t),\ x'(t))$ et $v(t) \geqslant x''(t)$ p.p. $t \in [0,\ 1]$ (resp. $v(t) \leqslant x''(t)$ p.p. $t \in [0,\ 1]$)

(ii) $x(0) \geqslant \alpha_0$ $x(1) \geqslant \alpha_1$ (resp. $x(0) \leqslant \alpha_0$ $x(1) \leqslant \alpha_1$).

Remarque. Si F satisfait (H2) et une des conditions (H1), (H1)$'$, ou (H1)$''$ et est à valeurs convexes, alors la condition (i) de la Déf. 2.1 peut être remplacée par la condition

(i)$'$ $F(t,\ x(t),\ x'(t)) \cap [x''(t),\ \infty) \neq \emptyset$ p.p. $t \in [0,\ 1]$ (resp. $F(t,\ x(t),\ x'(t)) \cap (-\infty,\ x''(t)] \neq \emptyset$ p.p. $t \in [0,\ 1]$).

Cette définition coincide avec celles précédemment introduites lorsque F est une fonction de Carathéodory univoque ou multivoque à valeurs convexes (voir $[5]_{1,2}$).

Sur la fonction multivoque F, considérons les conditions suivantes:

($\mathrm{H3}_D$) il existe $\phi \leqslant \psi \in W^{2,1}(0,\ 1)$ respectivement sous et sur solutions de $(*_D)$;

(H4) il existe $r,\ s \geqslant 0$, tels que $|F(t,\ x,\ p)| \leqslant rp^2 + s$ p.p. $t \in (0,\ 1)$ et pour tout x tel que $\phi(t) \leqslant x \leqslant \psi(t)$.

Nous énonçons maintenant notre théorème d'existence pour le problème de Dirichlet.

Théorème 2.2. *Soit* F: $[0,\ 1] \times \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ *une fonction multivoque à valeurs compactes, non vides, de type semi-continue inférieurement et satisfaisant les hypothèses* ($\mathrm{H3}_D$), (H4), *alors le problème* $(*_D)$ *possède une solution* x *telle que* $\phi(t) \leqslant x(t) \leqslant \psi(t)$ *pour tout* $t \in [0,\ 1]$.

La preuve de ce théorème sera donnée au **2.3.** Nous allons considérer de nouveaux problèmes desquels l'existence d'une solution nous permettera de déduire l'existence d'une solution de notre problème original. Mais avant, énonçons l'analogue du Théorème 2.2 pour une fonction de type semi-continue supérieurement.

Théorème 2.3. *Soit* F: $[0, 1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction multivoque à valeurs compactes, non vides, de type semi-continue supérieurement et satisfaisant les hypothèses* ($H3_D$), (H4), *alors le problème* ($*_D$) *possède une solution* x *telle que* $\phi(t) \leqslant x(t) \leqslant \psi(t)$ *pour tout* $t \in [0, 1]$.

Nous ne démontrons pas ce théorème puisque la preuve est essentiellement donnée dans $[5]_1$.

2.2. Modification du problème. Pour $\lambda \in [0, 1]$, notons $d_\lambda(t) = (1-\lambda)(\psi(t)-\phi(t))/4$ et considérons la fonction f: $[0, 1] \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t, x, v, \lambda) = \begin{cases} \max\{v, \psi''(t)\} & \text{si } x > \psi(t) > \phi(t) \\ \min\{v, \phi''(t)\} & \text{si } x < \phi(t) < \psi(t) \\ \delta v + (1-\delta)\max\{v, \psi''(t)\} & \text{si } d_\lambda(t) > 0 \ x = \psi(t) - \delta d_\lambda(t) \ \delta \in [0, 1) \\ \delta v + (1-\delta)\min\{v, \phi''(t)\} & \text{si } d_\lambda(t) > 0 \ x = \phi(t) + \delta d_\lambda(t) \ \delta \in [0, 1) \\ v & \text{si } \psi(t) > \phi(t) \ \phi(t) + d_\lambda(t) \leqslant x \leqslant \psi(t) - d_\lambda(t) \\ \psi''(t) & \text{si } \psi(t) = \phi(t). \end{cases}$$

A partir de cette fonction f, définissons une fonction multivoque qui satisfera certaines hypothèses du Théorème 1.4 par

$$\mathcal{H}: C^1[0, 1] \times [0, 1] \to L^1(0, 1)$$

$\mathcal{H}(x, \lambda) = \{w \in L^1(0, 1)$: $w(t) = f(t, x(t), \lambda v(t), \lambda)$ p.p. avec $v \in \mathcal{F}(x)$ tel que $v(t) \geqslant \psi''(t)$ p.p. sur $\{t: \psi(t) = x(t) > \phi(t)\}$ et $v(t) \leqslant \phi''(t)$ p.p. sur $\{t: \psi(t) > x(t) = \phi(t)\}\}$, où $\mathcal{F}$ est l'opérateur de Niemytzki associé à F.

Remarque. Si $\psi''(t) \leqslant 0 \leqslant \phi''(t)$, on peut définir f et par conséquent $\mathcal{H}$ plus simplement en posant $d_\lambda(t) \equiv 0$.

Proposition 2.4. *Sous les hypothèses du Théorème* 2.2, *la fonction multivoque* $\mathcal{H}$ *est semi-continue inférieurement, à valeurs fermées, non vides, décomposables.*

Preuve. Étant donné que $\mathcal{F}$ est de type s.c.i. et vu l'hypothèse $(H3)_D$, on vérifie aisément que $\mathcal{H}$ est à valeurs non vides, fermées et décomposables.

Montrons la semi-continuité inférieure de $\mathcal{H}$. Soit B un ensemble fermé dans $L^1(0, 1)$, nous devons montrer que $\mathcal{E} = \{(x, \lambda) \in C^1[0, 1] \times [0, 1]\colon \mathcal{H}(x, \lambda) \subset B\}$ est fermé.

Soit une suite $\{(x_n, \lambda_n)\}$ dans $\mathcal{E}$ convergeant vers (x, λ) dans $C^1[0, 1] \times [0, 1]$, et soit $w \in \mathcal{H}(x, \lambda)$. Montrons que $w \in B$. Par définition, il existe $v \in \mathcal{F}(x)$ tel que $v(t) \geqslant \psi''(t)$ p.p. sur $\{t\colon \psi(t) = x(t) > \phi(t)\}$ et $v(t) \leqslant \phi''(t)$ p.p. sur $\{t\colon \psi(t) > x(t) = \phi(t)\}$ et tel que $w(t) = f(t, x(t), \lambda v(t), \lambda)$. Vu la semi-continuité inférieure de $\mathcal{F}$, il existe des fonctions $v_n \in \mathcal{F}(x_n)$ telles que $v_n \to v$ dans $L^1(0, 1)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v_n(t) \geqslant \psi''(t)$ p.p. sur $\{t\colon \psi(t) = x_n(t) > \phi(t)\}$ et $v_n(t) \leqslant \phi''(t)$ p.p. sur $\{t\colon \psi(t) > x_n(t) = \phi(t)\}$ et que $v_n(t) \to v(t)$ p.p. $t \in (0, 1)$. Posons $w_n(t) = f(t, x_n(t), \lambda_n v_n(t), \lambda_n)$, donc $w_n \in \mathcal{H}(x_n, \lambda_n)$. Pour conclure, il suffit de montrer que

$$w_n(t) \to w(t) \text{ p.p. } t \in (0, 1) \tag{2.1}$$

et d'appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Si $\lambda \neq 1$, vu la définition de f, il est clair que l'équation (2.1) a lieu. D'autre part, on montre aisément que l'équation (2.1) a lieu lorsque $\lambda = 1$ en utilisant le fait qu'on a $v(t) \geqslant \psi''(t)$ p.p. sur $\{t\colon \psi(t) = x(t) > \phi(t)\}$ et $v(t) \leqslant \phi''(t)$ p.p. sur $\{t\colon \psi(t) > x(t) > \phi(t)\}$. Ce qui termine la preuve.

Considérons maintenant la famille de problèmes suivants

$$(*_D)_\lambda \qquad x'' \in \mathcal{H}(x, \lambda) \qquad x(0) = \alpha_0 \qquad x(1) = \alpha_1$$

où $\lambda \in [0, 1]$.

Proposition. 2.5. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2, toute solution x de $(*_D)_\lambda$ pour $\lambda \in [0, 1]$ satisfait:*

(i) *$\phi(t) \leqslant x(t) \leqslant \psi(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$;*

(ii) *il existe une constante M telle que $|x'(t)| \leqslant M$ pour tout $t \in [0, 1]$.*

Preuve. Soit $x \in W^{2,1}(0, 1)$ une solution de $(*_D)_\lambda$ pour un certain $\lambda \in [0, 1]$, montrons que $x(t) \leqslant \psi(t)$; l'autre inégalité se démontrant analoguement. Presque partout sur $\{t \in [0, 1]\colon x(t) > \psi(t)\}$, on a $\mathcal{H}(x, \lambda)(t) \subset (\psi''(t), \infty)$, d'où $x''(t) \geqslant \psi''(t)$ p.p. En utilisant le Lemme 1.1 (i) et les conditions aux limites sur x et sur ψ, on obtient $x(t) \leqslant \psi(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Nous ne démontrons pas l'affirmation (ii) puisque la preuve est essentiellement la même que dans [5]$_1$ (Prop. V.2).

2.3. Preuve du Théorème 2.2. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Théorème 2.2. Nous allons montrer que $(*_D)_1$ possède une solution, ensuite nous montrerons qu'elle est une solution du problème original $(*_D)$.

Considérons la fonction multivoque $\tilde{\mathcal{H}}$: $C^1[0, 1] \times [0, 1] \to L^1(0, 1)$ définie par

$$\tilde{\mathcal{H}}(x, \gamma) = \begin{matrix} \mathcal{H}(x, 2\gamma - 1) & \text{si } \gamma \in [12, 1] \\ (2\gamma)\,\mathcal{H}(x, 0) & \text{si } \gamma \in [0, 1/2) \end{matrix}$$

et la famille de problèmes correspondants à cette fonction

$$(\tilde{*}_D)_\gamma \qquad x'' \in \tilde{\mathcal{H}}(x, \gamma) \qquad x(0) = \alpha_0 \qquad x(1) = \alpha_1$$

où $\gamma \in [0, 1]$.

On vérifie aisément que les solutions de $(\tilde{*}_D)_\gamma$ pour $\gamma \in [0, 1/2]$ peuvent être majorées a priori. D'où, vu la Proposition 2.5, il existe une constante $k > 0$ telle que toutes les solutions de $(\tilde{*}_D)_\gamma$ pour $\gamma \in [0, 1]$ satisfont $\|x\|_1 < k$.

Vu la Proposition 2.4 et la majoration a priori des solutions déjà obtenue, les hypothèses du Théorème 1.4 sont satisfaites. D'où le problème $(\tilde{*}_D)_1$ et par conséquent le problème $(*_D)_1$ possèdent une solution.

Vu la Proposition 2.5, la solution du problème $(*_D)_1$ précédemment obtenue satisfait: $\phi(t) \leq x(t) \leq \psi(t)$ pout tout $t \in [0, 1]$. Or par définition $\mathcal{H}(x, 1) \subset \mathcal{F}(x)$. D'où x est une solution du problème original $(*_D)$.

3 - Problème périodique

Étant donnée une fonction multivoque à valeurs compactes, non vides, F: $[0, 1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, nous allons maintenant considérer le problème périodique suivant

$$(*_P) \quad x''(t) \in F(t, x(t), x'(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, 1] \quad x(0) = x(1) \quad x'(0) = x'(1).$$

Introduisons la notions de sur et sous solutions de $(*_P)$.

Déf. 3.1. Nous disons qu'une fonction $x \in W^{2,1}(0, 1)$ est une *sur solution* (resp. *sous solution) de* $(*_P)$ si x satisfait la condition (i) de la Déf. 2.1 et (ii)' $x(0) = x(1)$, $x'(1) \geqslant x'(0)$ (resp. $x(0) = x(1)$, $x'(1) \leqslant x'(0)$).

Aussi, considérons la condition

$(\mathrm{H}3_P)$ il existe $\phi \leqslant \psi \in W^{2,1}(0, 1)$ respectivement sous et sur solutions de $(*_P)$.

Nous énonçons maintenant notre théorème d'existence pour le problème périodique.

Théorème 3.2. *Soit* F: $[0, 1] \times \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ *une fonction multivoque à valeurs compactes, non vides, de type semi-continue inférieurement et satisfaisant les hypothèses* $(\mathrm{H}3_P)$, (H4). *Alors le problème* $(*_P)$ *possède une solution* x *telle que* $\phi(t) \leqslant x(t) \leqslant \psi(t)$ *pour tout* $t \in [0, 1]$.

Comme pour le problème de Dirichlet, pour démontrer ce théorème, nous devons considérer de nouveaux problèmes desquels l'existence d'une solution nous permettera de déduire l'existence d'une solution de notre problème original $(*_P)$.

Définissons h: $C[0, 1] \to C[0, 1]$ par

$$h(x)(t) = \begin{matrix} \psi(t) & \text{si } x(t) > \psi(t) \\ x(t) & \text{si } \phi(t) \leqslant x(t) \leqslant \psi(t) \\ \phi(t) & \text{si } x(t) < \phi(t). \end{matrix}$$

Et définissons $\mathcal{G}$: $C^1[0, 1] \times [0, 1] \to L^1 0, 1)$ par

$$\mathcal{G}(x, \lambda) = \mathcal{H}(x, \lambda) - h(x)$$

où $\mathcal{H}$ est la fonction multivoque définie au 2.2.

Considérons la famille de problèmes suivants

$$(*_P)_\lambda \qquad x'' - x \in \mathcal{G}(x, \lambda) \quad x(0) = x(1) \quad x'(0) = x'(1)$$

où $\lambda \in [0, 1]$.

En utilisant respectivement la Proposition 2.4 et le Lemme 1.1 (ii), on montre les analogues des Propositions 2.4 et 2.5 pour les problèmes $(*_P)_\lambda$.

Comme nous l'avons fait pour le problème de Dirichlet, pour démontrer le Théorème 3.2, nous déduisons l'existence d'une solution du problème $(*_P)$ à partir d'une solution du problème $(*_P)_1$. Nous procédons comme dans la preuve du Théorème 2.2 avec $(\widetilde{*}_P)_\gamma$, et nous utilisons le Théorème 1.4 avec la famille du problèmes $(1.2)_\lambda$.

Remarquons que nous avons aussi l'analogue du Théorème 3.2 pour F une fonction de type s.c.s.

4 - Généralisations

Mentionnons quelques généralisations des résultats précédents.

(1) Nous pouvons considérer d'autres conditions aux limites dont les conditions de Sturm-Liouville et Neumann. Par exemple, une condition aux limites de la forme suivante

$$\text{(C)}\quad \begin{array}{l} a_0 x(0) - b_0 x'(0) = \alpha_0 \\ a_1 x(1) + b_1 x'(1) = \alpha_1 \qquad a_i,\ b_i \geq 0 \qquad a_i + b_i > 0 \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}\ i = 0,\ 1\,. \end{array}$$

Pour le problème $(*_C)$, i.e. le problème $(*)$ où $\mathcal{B}$ désigne la condition aux limites (C), nous introduisons la notion de sur et sous solutions comme suit. Dans la Déf. 2.1, nous remplaçons la condition (ii) par

(ii)″ $a_0 x(0) - b_0 x'(0) \geq \alpha_0 \qquad a_1 x(1) + b_1 x'(1) \geq \alpha_1$
(resp. $a_0 x(0) - b_0 x'(0) \leq \alpha_0 \qquad a_1 x(1) + b_1 x'(1) \leq \alpha_1$).

Et nous avons l'analogue du Théorème 2.2 dans lequel nous remplaçons l'hypothèse $(H3_D)$ par $(H3_C)$.

(2) L'hypothèse (H4) est appelée une condition de croissance de type Bernstein. Elle peut être généralisée par une condition de type Bernstein-Nagumo.

(H4)′: il existe une fonction $q\colon (c, \infty) \to (0, \infty)$ Borel mesurable telle que:

(i) $|F(t, x, p)| \leq q(|p|)$ p.p. $t \in (0, 1)$ et pour tout x tel que $\phi(t) \leq x \leq \psi(t)$;

(ii) $\displaystyle\int_c^\infty \frac{s}{q(s)}\,ds > \sup\{\psi(t_1) - \phi(t_2)\colon t_1,\ t_2 \in [0, 1]\}$

où $c = c(\mathcal{B})$ dépend de la condition aux limites.

Par exemple, pour les problèmes de Dirichlet et périodique, on prend $c = |\alpha_1 - \alpha_0|$ et $c = 0$ respectivement (voir $[5]_1$, [8]).

Références bibliographiques

[1] C. BERGE, *Espace topologiques. Fonctions multivoques*, Dunod, Paris, 1959.

[2] Y. G. BORISOVICH, B. D. GEL'MAN, A. D. MYSHKIS et V. V. OBUKHOVSKII, *Multi-valued mappings*, J. Soviet Math. 24(1984), 719-791 (trans. from russian Itogi Nauki i Tekhniki, Seriya Matematicheskii Analiz, **19** (1982), 127-230).

[3] A. BRESSAN et G. COLOMBO, *Extensions and selections of maps with decomposable values*, Studia Mathematica **90** (1988), 70-85.

[4] J. DUGUNDJI et A. GRANAS, *Fixed point theory*, I, Monografie Matematyczne **61**, P.W.N., Warszawa, 1982.

[5] M. FRIGON: $[\bullet]_1$ *Application de la théorie de la transversalité topologique à des problèmes non linéaires pour des équations différentielles ordinaires*, Dissertationes Math. **296** (1990), 1-75; $[\bullet]_2$ *Problèmes aux limites pour des inclusions différentielles sans condition de croissance*, Ann. Polon. Math. **54** (1991), 68-93.

[6] M. FRIGON et A. GRANAS, *Théorèmes d'existence pour des inclusions différentielles sans convexité*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1, **310** (1990), 819-822.

[7] M. FRIGON, A. GRANAS et Z. GUENNOUN, *On the Cauchy problem for the differential inclusions*, Rapport de recherche Math.-12, Université de Moncton, 1990.

[8] A. GRANAS et Z. GUENNOUN, *Quelques résultats dans la théorie de Bernstein-Carathéodory de l'équation* $y'' = f(t, y, y')$, C. R. Acad. Sci. Paris (1), **306** (1988), 703-706.

[9] A. GRANAS, R. B. GUENTHER et J. W. LEE, *Some general existence principles in the Carathéodory theory of nonlinear differential systems*, J. Math. Pures et Appl. **70** (1991), 153-196.

[10] C. J. HIMMELBERG, *Measurable relations*, Fund. Math. **87** (1975), 53-72.

[11] A. ORNELAS, *Approximation of relaxed solutions for lower semi-continuous differential inclusions*, preprint SISSA 102/86/M, Trieste, 1986.

Abstract

We establish the existence of a solution to the problem $x''(t) \in F(t, x(t), x'(t))$ p.p. $t \in (0, 1)$, $x \in \mathcal{B}$, *where* F *is a multi-valued mapping of the lower semi-continuous type satisfying a Bernstein-Nagumo type growth condition, and where* $\mathcal{B}$ *corresponds to a periodic or Dirichlet boundary condition.*

***