Riv. Mat. Univ. Parma (4) **17** (1991), 59-67

T. CARDINALI e F. PAPALINI (*)

Sull'esistenza di punti fissi per multifunzioni a grafo debolmente chiuso (**)

1 - Introduzione

Molti Autori si sono occupati del problema di dare risposta alla ben nota congettura di J. Schauder (cfr. [4], Problema 54), che consiste nello stabilire se, essendo K un sottoinsieme *compatto* e *convesso* di uno spazio lineare topologico X, le funzioni f: $K \to K$ *continue* hanno un punto fisso. A questo problema hanno dato parziale risposta lo stesso Schauder [12] nel caso che X sia uno spazio di Banach e A. Tychonoff [14] nel più ampio contesto che X sia uno spazio lineare topologico localmente convesso di Hausdorff.

Successivamente, e fino ai nostri giorni, il problema dell'esistenza di un punto fisso è stato studiato per multifunzioni nel caso che X sia, come in [14], uno spazio lineare topologico localmente convesso di Hausdorff. Nel 1952 I. L. Glicksberg [3] e K. Fan [1] hanno provato che hanno un punto fisso le multifunzioni G: $K \to K$, ove $K \subset X$ è un insieme *compatto* e *convesso*, con le proprietà:

(α) $G(x)$ è chiuso e convesso $\forall x \in K$;

($\alpha\alpha$) G è semicontinua superiormente su K (1)(2).

Nel 1972 C. J. Himmelberg [6] ha ottenuto due proposizioni di punto fisso. Nel Teorema 1 l'Autore consegue una proposizione che contiene il citato Teorema di Glicksberg. Egli prende in esame multifunzioni G: $C \to C$, ove $C \subset X$ è un insieme

---

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, via Vanvitelli 1, I-06100 Perugia.

(**) MR classification: 47H10; 58C30. - Ricevuto: 18-VII-1990.

(1) Cfr. qui (2.5).

(2) Questo risultato per $X = \mathbb{R}^n$ era già stato conseguito nel 1941 da S. Kakutani [8].

compatto, per le quali l'ipotesi (α) del Teorema di Glicksberg viene sostituita con la più debole ipotesi:

(i) $G(x)$ è chiuso $\forall x \in C$, e esiste un insieme A *quasi convesso* (3), con $\overline{A} = C$, tale che $G(x)$ è convesso $\forall x \in A$.

Nel Teorema 2 Himmelberg prova che, se $S \subset X$ è un insieme *convesso* (*non* necessariamente compatto), hanno un punto fisso le multifunzioni $G\colon S \to S$ con le proprietà (α), ($\alpha\alpha$) e (jj) esiste un insieme C compatto tale che $\bigcup_{x \in S} G(x) \subset C$. Come è subito visto, anche questa proposizione contiene il Teorema di Glicksberg.

Recentemente O. Hadzic [5], nel 1982, e A. Idzik [7], nel 1988, hanno ottenuto due teoremi di punto fisso rispettivamente se X è uno spazio lineare topologico metrizzabile e se X è uno spazio lineare topologico di Hausdorff. Queste proposizioni estendono i risultati sopra citati.

Noi qui, operando nel contesto di multifunzioni, abbiamo conseguito due proposizioni di punto fisso (cfr. qui Teorema I e Teorema II). Nel Teorema I abbiamo provato che una multifunzione $G\colon C \to C$, ove C è un sottoinsieme *compatto* di uno spazio lineare topologico localmente convesso di Hausdorff, ha un punto fisso se soddisfa l'ipotesi (i) e inoltre ha la proprietà

(ii) G è *a grafo debolmente chiuso* (4).

Poiché ogni multifunzione con le proprietà richieste nel Teorema 1 di Himmelberg verifica le ipotesi del nostro Teorema I e peraltro esistono multifunzioni che soddisfano le ipotesi della nostra proposizione ma *non* quelle del citato Teorema 1 (cfr. qui Osservazione III), questo nostro risultato contiene strettamente il Teorema 1 di cui in [6].

Nel Teorema II abbiamo, invece, preso in esame multifunzioni $G\colon S \to S$, ove S è un sottoinsieme *convesso* (*non* necessariamente compatto) di uno spazio lineare topologico localmente convesso di Hausdorff, provando l'esistenza di un punto fisso per le multifunzioni che verificano le ipotesi (α), (ii) e (jj). Come abbiamo precisato nell'Osservazione IV, questa nostra proposizione contiene strettamente il Teorema 2 di Himmelberg.

Vogliamo inoltre osservare che i nostri risultati rappresentano una estensione delle proposizioni conseguite da O. Hadzic (cfr. [5], Teorema 2) e da A. Idzik (cfr. [7], Teorema 4.3) e, se X è uno spazio lineare topologico localmente convesso me-

---

(3) Cfr. qui (2.1).
(4) Cfr. qui (2.8).

trizzabile, addirittura contengono il citato Teorema 2 di O. Hadzic (cfr. qui Osservazione IV).

2 - Siano X uno spazio lineare topologico localmente convesso di Hausdorff e $\mathcal{W}(0)$ una famiglia di intorni dello zero *convessi* e *bilanciati*. Un insieme $A \subset X$ si dice (cfr. [6], p. 205) *quasi convesso* se

(2.1) per ogni $V \in \mathcal{W}(0)$ e per ogni $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset A$ esiste $\{z_1, \ldots, z_n\} \subset A$ tale che $z_i - a_i \in V$ $\forall i = 1, \ldots, n$, $\mathrm{co}\{z_1, \ldots, z_n\} \subset A$.

Per ogni insieme $D \subset X$ andiamo ad introdurre le seguenti famiglie di sottoinsiemi:

$$\boldsymbol{P}(D) = \{S \subset D \colon S \neq \emptyset\} \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{C}(D) = \{S \subset D \colon S \text{ chiuso}, \ S \neq \emptyset\} \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{D}(D) = \{S \subset D \colon S \text{ chiuso}, \ \text{convesso}, \ S \neq \emptyset\}\,. \tag{2.4}$$

Una multifunzione $F \colon D \to \boldsymbol{P}(D)$ si dice (cfr. [11], p. 394) *semicontinua superiormente* (s.c.s.) *su* D se

(2.5) $\forall x_0 \in D$, $\forall W \in \mathcal{W}(0)$ esiste un intorno $U \in \mathcal{W}(0)$ tale che $F(x) \subset F(x_0) + W$ $\forall x \in (x_0 + U) \cap D$.

Denotato con $\boldsymbol{Gr}(F) = \{(x, y) \in D \times D \colon y \in F(x)\}$ il grafo della multifunzione F, si dice (cfr. [3], p. 170) che la multifunzione F è *a grafo chiuso* se

$$\boldsymbol{Gr}(F) \quad \text{è chiuso in} \quad X \times X \tag{2.6}$$

o, in modo equivalente,

(2.6)′ per ogni rete $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta} \subset D$ $\quad x_\delta \to x \quad x \in D$
e per ogni rete $\{y_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ $\quad y_\delta \in F(x_\delta) \quad y_\delta \to y \quad y \in D$
risulta $y \in F(x)$.

Osservazione I. Nel caso particolare in cui D è un insieme compatto e la multifunzione F è a valori chiusi, si ha (cfr. [10], Teorema VI.1.12)

$$F \text{ (s.c.s.) su } D \Leftrightarrow F \text{ è } a \ grafo \ chiuso \text{ in } X \times X\,. \tag{2.7}$$

Diremo, inoltre, che la multifunzione F è *a grafo debolmente chiuso* se

(2.8) per ogni rete $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta} \subset D$ $\quad x_\delta \to x \quad x \in D$
e per ogni rete $\{y_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ $\quad y_\delta \in F(x_\delta) \quad y_\delta \to y$
risulta $\mathrm{L}(x, y) \cap F(x) \neq \emptyset$

ove $\mathrm{L}(x, y) = \{x + \lambda(y - x) \colon \lambda \in [0, 1]\}$.

Osservazione II. È subito visto che ogni multifunzione F *a grafo chiuso è a grafo debolmente chiuso*. In generale, però, *non* sussiste l'implicazione inversa. Infatti, essendo $X = \mathbb{R}$ e $D = [0, 2]$, consideriamo la multifunzione $F\colon D \to \boldsymbol{D}(D)$ (cfr. qui (2.4)) definita ponendo

$$F(x) = \begin{matrix} \{1\} & x \in [0, 2[\\ \{2\} & x = 2 . \end{matrix} \tag{2.9}$$

Si vede facilmente che F è a grafo debolmente chiuso, ma *non* è a grafo chiuso.

3 - Andiamo ora a provare due teoremi che assicurano l'esistenza di un punto fisso per multifunzioni.

Teorema I. *Siano X uno spazio lineare topologico localmente convesso di Hausdorff, $C \subset X$ un insieme compatto e $G\colon C \to \boldsymbol{C}(C)$* (cfr. (2.3)) *una multifunzione con le proprietà:*

(i) *esiste $A \subset C$, A quasi convesso, $\overline{A} = C$* (5), *tale che $G(x)$ è convesso $\forall x \in A$;*

(ii) *G è a grafo debolmente chiuso.*

In queste condizioni esiste un punto $x \in C$ tale che $x \in G(x)$.

Denotata con $\mathcal{V}(0)$ una base di intorni dello zero chiusi, convessi e bilanciati in X, per ogni $V \in \mathcal{V}(0)$, sia

$$G_V = \{x \in C \colon x \in G(x) + V\} . \tag{3.1}$$

---

(5) $\overline{A}$ rappresenta la chiusura di A.

È subito visto che per conseguire la tesi basta provare

$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}(0)} G_V \neq \emptyset . \tag{3.2}$$

A tale scopo, iniziamo con il dimostrare che, per ogni $V \in \mathcal{V}(0)$, l'insieme G_V è chiuso, cioè che ogni rete contenuta in G_V ha in tale insieme un punto di accumulazione (cfr. [15], Teorema 17.4). Fissata, quindi, una rete $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta} \subset G_V$, esistono due reti $\{y_\delta\}_{\delta \in \Delta}$, $y_\delta \in G(x_\delta)$ e $\{v_\delta\}_{\delta \in \Delta} \subset V$ tali che $x_\delta = y_\delta + v_\delta \quad \forall \delta \in \Delta$. Dall'essere C un insieme compatto, è possibile determinare due sottoreti $\{x_{\delta'}\}_{\delta' \in \Delta'}$ e $\{y_{\delta'}\}_{\delta' \in \Delta'}$ convergenti rispettivamente in C ai punti x e y, perciò (cfr. (ii))

$$\text{esiste } \tilde{\lambda} \in [0, 1]: \; x \in G(x) + \tilde{\lambda}(x - y) . \tag{3.3}$$

Poiché la rete $\{v_{\delta'}\}_{\delta' \in \Delta'}$, $v_{\delta'} = x_{\delta'} - y_{\delta'}$, converge al punto $x - y \in V$, risulta (cfr. qui (3.3)) che x, punto di accumulazione per la rete $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$, appartiene all'insieme G_V.

Proviamo, inoltre, che G_V è un insieme *non* vuoto. Poiché A è un insieme quasi convesso (cfr. qui (2.1)) e $\overline{A} = C$ è un insieme compatto, possiamo determinare $\{z_1, \ldots, z_m\} \subset A$ in modo che

$$\operatorname{co}\{z_1, \ldots, z_m\} \subset A \qquad \text{e} \qquad C \subset \bigcup_{i=1}^{m} (z_i + V) . \tag{3.4}$$

Posto ora $K = \operatorname{co}\{z_1, \ldots, z_m\}$, sia $H_V \colon K \to \boldsymbol{D}(K)$ (cfr. qui (2.4)) la multifunzione definita ponendo

$$H_V(x) = (G(x) + V) \cap K \qquad \forall x \in K . \tag{3.5}$$

Facciamo intanto osservare che la multifunzione H_V è *a grafo debolmente chiuso*: a tale scopo, fissata una rete $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta} \subset K$ convergente ad un punto $\tilde{x} \in K$ e fissata una rete $\{y_\delta\}_{\delta \in \Delta} \subset K$, $y_\delta \in H_V(x_\delta)$, $y_\delta \to \tilde{y}$, siano, per ogni $\delta \in \Delta$, $a_\delta \in G(x_\delta)$ e $v_\delta \in V$ tali che

$$y_\delta = a_\delta + v_\delta \qquad \forall \delta \in \Delta . \tag{3.6}$$

Dall'essere C un insieme compatto, è possibile determinare una sottorete $\{a_{\delta'}\}_{\delta' \in \Delta'}$ convergente ad un punto $a \in C$: esiste perciò (cfr. (ii)) un numero $\lambda^* \in [0, 1]$ tale che $\tilde{x} + \lambda^*(a - \tilde{x}) \in G(\tilde{x})$. Pertanto, poiché V è un insieme chiuso e bilanciato, si ha (cfr. qui (3.6))

$$\tilde{x} + \lambda^* (\tilde{y} - \tilde{x}) \in G(\tilde{x}) + V . \tag{3.7}$$

Tenendo ora presente (cfr. qui (3.4)) che l'insieme K è compatto e convesso (cfr. [13], p. 134) risulta $\tilde{x} + \lambda^* (\tilde{y} - \tilde{x}) \in K$ e quindi da (3.7) segue per l'appunto $\mathrm{L}(\tilde{x},\ \tilde{y}) \cap H_V(\tilde{x}) \neq \emptyset$.

È subito visto allora che la multifunzione H_V soddisfa le ipotesi del Teorema di cui in [2] ([6]) ed esiste pertanto (cfr. qui (3.5)) un punto $\bar{x} \in K$ tale che $\bar{x} \in G(\bar{x}) + V$, cioé, ove si tenga presente la (3.1), $G_V \neq \emptyset$.

Essendo allora $\{G_V\}_{V \in \mathcal{V}(0)}$ una famiglia di sottoinsiemi chiusi e *non* vuoti di C, tenendo presente che $G_{V_1 \cap V_2} \subset G_{V_1} \cap G_{V_2}\ \forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}(0)$, e che C è un insieme compatto, si perviene alla (3.2).

Osservazione III. Vogliamo osservare che il nostro Teorema I contiene strettamente il Teorema 1 conseguito da C. J. Himmelberg in [6], come è subito visto considerando ancora la multifunzione definita come in (2.9).

Teorema II. *Siano X uno spazio lineare topologico localmente convesso di Hausdorff, $S \subset X$ un insieme convesso e F: $S \to \boldsymbol{D}(S)$* (cfr. (2.4)) *una multifunzione con le proprietà*

(j) *F è a grafo debolmente chiuso;*
(jj) *esiste un insieme compatto C, $C \subset S$, tale che $\bigcup_{x \in S} F(x) \subset C$.*

In queste condizioni, esiste un punto $z \in S$ tale che $z \in F(z)$.

Possiamo supporre, senza perdita di generalità, che lo spazio X sia completo (cfr. [9], § 18.4 (3)) poiché le ipotesi sull'insieme S e sulla multifunzione F rimangono inalterate nel completamento dello spazio.

Posto $A = \mathrm{co}\, C$ e considerati gli insiemi $K = \overline{A}$ e $\mathcal{K} = \bigcup_{x \in A} (\{x\} \times F(x))$, sia G: $K \to \boldsymbol{P}(K)$ (cfr. qui (2.2)) la multifunzione così definita

$$G(x) = \begin{matrix} F(x) & x \in A \\ T(x) & x \in K \setminus A \end{matrix} \tag{3.8}$$

ove $T(x) = \{y \in K\colon (x,\ y) \in \overline{\mathcal{K}}\}$.

([6]) È immediato constatare che ogni multifunzione a grafo debolmente chiuso è *a grafo parzialmente chiuso.*

Andiamo intanto a dimostrare che G ha un punto fisso. A tale scopo è sufficiente provare che

(a) $T(x) \neq \emptyset, \qquad \forall x \in K \setminus A$

(b) $T(x)$ è chiuso $\qquad \forall x \in K \setminus A$

(c) G è *a grafo debolmente chiuso*

poiché, dall'essere K un insieme compatto (cfr. [9], § 20.6 (3)), la multifunzione G soddisfa le ipotesi del nostro Teorema I.

Iniziamo con il dimostrare che sussiste la (a). Osserviamo intanto che, dall'essere

$$\overline{\mathcal{K}} \subset K \times C \qquad \text{risulta} \tag{3.9}$$

$$T(x) \subset C \qquad \forall x \in K \setminus A\,. \tag{3.10}$$

Se, per assurdo, esistesse $\tilde{x} \in K \setminus A$ tale che, per ogni $y \in C$, $(\tilde{x}, y) \notin \overline{\mathcal{K}}$, sarebbe possibile determinare due intorni $U_y(\tilde{x})$ e $V_y(y)$ in modo che

$$(U_y(\tilde{x}) \times V_y(y)) \cap \overline{\mathcal{K}} = \emptyset\,. \tag{3.11}$$

Poiché peraltro C è un insieme compatto, esistono $y_1, \ldots, y_n \in C$ tali che $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}(y_i)$. Posto quindi $U(\tilde{x}) = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}(\tilde{x})$, da (3.11) seguirebbe

$$(U(\tilde{x}) \times C) \cap \overline{\mathcal{K}} = \emptyset \tag{3.12}$$

da cui, tenendo presente la (3.9), si giungerebbe alla relazione $U(\tilde{x}) \cap A = \emptyset$, assurda in quanto $\tilde{x} \in \overline{A}$.

Andiamo ora a provare la (b). Fissato $x \in K \setminus A$, per provare che $T(x)$ è chiuso consideriamo una rete $\{y_\delta\}_{\delta \in \Delta} \subset T(x)$.

Dall'essere C un insieme compatto, esiste in C un punto $\tilde{y}$ di accumulazione per la rete $\{y_\delta\}_{\delta \in \Delta}$, e, poiché $(x, y_\delta) \in \overline{\mathcal{K}}$ $\forall \delta \in \Delta$, risulta $\tilde{y} \in T(x)$, e pertanto l'insieme $T(x)$ è chiuso.

Per conseguire la (c) fissiamo una rete $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta} \subset K$ convergente ad un punto x e una rete $\{y_\delta\}_{\delta \in \Delta}$, $y_\delta \in G(x_\delta)$, convergente ad un punto y. È subito visto che il punto (x, y), a cui converge la rete $\{(x_\delta, y_\delta)\}_{\delta \in \Delta}$, appartiene all'insieme $\overline{\mathcal{K}}$ e pertanto, se $x \in K \setminus A$ risulta (cfr. qui (3.8)) $\mathbb{L}(x, y) \cap G(x) \neq \emptyset$, mentre se $x \in A$, per ogni intorno $U \in \mathcal{W}(0)$, esiste (x_U, y_U) in modo da aversi $(x_U, y_U) \in (x + U) \times (y + U) \cap \mathcal{K}$.

Poiché la rete $\{x_U\}_{U \in \mathcal{W}(0)} \subset A$ converge a x e la rete $\{y_U\}_{U \in \mathcal{W}(0)}$, che converge a y, è tale che $y_U \in F(x_U)$, dall'ipotesi (j) si deduce ancora che $\mathbb{L}(x, y) \cap G(x) \neq \emptyset$. Ne segue che la multifunzione G è *a grafo debolmente chiuso*.

Siamo allora in grado di affermare che esiste un punto $z \in K$ tale che $z \in G(z)$. Peraltro, poiché $G(z) \subset C$ (cfr. (jj) e (3.10)), risulta $z \in S$ e $z \in F(z)$, c.v.d.

Osservazione IV. Vogliamo inoltre osservare che il Teorema II contiene strettamente il Teorema 2 di cui in [6], come risulta evidente prendendo ancora in esame la multifunzione definita in (2.9).

Facciamo infine notare che sia il Teorema I che il Teorema II, qui provati, rappresentano una estensione dei risultati conseguiti da O. Hadzic (cfr. [5], Teorema 2) e da A. Idzik (cfr. [7], Teorema 4.3), e, se X è uno spazio lineare topologico localmente convesso metrizzabile, contengono il citato Teorema 2 di O. Hadzic (cfr. qui (2.9)).

Bibliografia

[1] K. FAN, *Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. Usa 38 (1952), 121-126.

[2] N. I. GLEBOV, *On a generalization of the Kakutani fixed point theorem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR Tom 185, 5 (1969), 981-983.

[3] I. L. GLICKSBERG, *A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points*, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 170-174.

[4] A. GRANAS, KKM-*maps and their applications to nonlinear problems*, The Scottish Book, Ed., R. D. Mauldin, Birkhauser, Basel and Boston, Mass. 1981, 45-61.

[5] O. HADZIC, *On Kakutani's fixed point theorem in topological vector spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 30 (1982), 141-144.

[6] C. J. HIMMELBERG, *Fixed points of compact multifunctions*, J. Math. Anal. Appl. 38 (1972), 205-207.

[7] A. IDZIK, *Almost fixed point theorems*, Proc. Amer. Math. Soc. 104 (1988), 779-784.

[8] S. KAKUTANI, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math. J. 7 (1941), 457-459.

[9] G. KOTHE, *Topological vector spaces* (I), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg-New York, 1969.

[10] C. MAYER, *Outils topologiques et métriques de l'Analyse Mathématique*, Collection Analyse Fonctionnelle, Paris, Centre de Documentation Universitaire, 1969.

[11] K. NIKODEM, *Continuity of K-convex set-valued functions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 34 (1986), 393-399.

[12] J. SCHAUDER, *Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen*, Studia Math. 2 (1930), 171-180.
[13] A. E. TAYLOR, *Introduction to Functional Analysis*, Wiley & Sons, 1967.
[14] A. TYCHONOFF, *Ein Fixpunktsatz*, Math. Ann. **111** (1935), 767-776.
[15] S. WILLARD, *General topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.

Summary

In this note we prove two fixed point theorems for particular multifunctions having «weakly closed graph». The results here obtained respectively contain two theorems due to C. J. Himmelberg.

***