Riv. Mat. Univ. Parma (4) **16** (1990), 311-330

A. AVERNA e T. CARDINALI (*)

Sui concetti di K-convessità (K-concavità) e di K-convessità* (K-concavità*) (**)

1 - Introduzione

Molti Autori si sono occupati del problema di stabilire, per funzioni monodrome «additive» (¹) o «midpoint convesse» (²), quali condizioni fossero sufficienti ad assicurare la continuità. Ricordiamo, tra gli altri, i risultati ottenuti da J. L. Jensen [8], M. Fréchet [7], F. Bernstein - G. Doetsch [3], S. Banach [1], W. Sierpinski $[12]_{1,2}$, J. Smital [13], P. Fischer - Z. Slodkowski [6], L. Thibault $[14]_1$. In [8], [7], [3], [1], $[12]_{1,2}$, [13] lo studio è limitato a funzioni f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; in [6] viene esteso a funzioni, a valori in $\mathbb{R}$, ma definite in spazi lineari separabili di Fréchet; in $[14]_1$, infine, il problema viene studiato nel contesto più generale di funzioni definite in spazi lineari topologici, completi, metrizzabili e a valori in spazi lineari topologici separati.

Recentemente, K. Nikodem in $[10]_1$ ha ripreso in esame, nel contesto più generale di «multifunzioni» «F» definite in un aperto e convesso D di uno spazio X lineare topologico T_0 e a valori in uno spazio Y lineare topologico T_0, una proposizione di F. Bernstein - G. Doetsch (cfr. [3]), nella quale era stato stabilito che è «continua» ogni funzione (monodroma) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ «midpoint convessa» e «limitata superiormente su un insieme con interno *non* vuoto». Nel Teorema 1 di $[10]_1$ Nikodem ha infatti provato che, nella classe delle multifunzioni F: $D \to \mathscr{P}(Y)$, a

---

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, 1 via Vanvitelli, I-06100 Perugia.

(**) Ricevuto: 18-VII-1990.

(¹) Cfr. [9], V, § 2, (1).

(²) La definizione di «midpoint convessità» per funzioni monodrome f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è stata introdotta da J. Jensen (cfr. [9], § 3, (1)).

valori «limitati» e, inoltre, «limitate su un insieme con interno *non* vuoto», la «midpoint convessità» (3) basta ad assicurare la «continuità».

L'Autore sempre in $[\mathbf{10}]_1$ ha conseguito altri risultati; così, nel Teorema 2 ha provato, per le multifunzioni «F» «midpoint convesse» e a valori «chiusi» e «limitati», la seguente implicazione

(1.1) «F» continua $\Rightarrow$ «F» convessa

mentre nel Teorema 3, nel contesto particolare $X = \mathbb{R}^n$, è riuscito a conseguire la proposizione inversa (4)

(1.2) «F» convessa $\Rightarrow$ «F» continua (5).

Lo stesso Autore in $[\mathbf{10}]_2$, utilizzando i concetti di multifunzione «midpoint K-convessa» e di multifunzione «K-continua», concetti questi più generali, se $K \neq \{0\}$, rispettivamente di quelli di multifunzione «midpoint convessa» e di multifunzione «continua», ha provato nel Teorema 1 che, nella classe delle multifunzioni a valori «limitati» e «K-limitate superiormente su un insieme con interno *non* vuoto», la «midpoint K-convessità» basta ad assicurare la «K-continuità». Questa proposizione contiene, oltre la citata proposizione di [3], il Teorema 1 di $[\mathbf{10}]_1$.

Noi qui, indicati al solito con X, Y due spazi lineari topologici T_0, con D un aperto e convesso di X e con K un cono di Y, abbiamo conseguito in 4 alcune proposizioni ove vengono stabilite relazioni tra la «K-continuità» e la «K-convessità» per le multifunzioni F: $D \to \mathscr{P}(Y)$: nel Teorema 4.2, supponendo che il cono K sia «chiuso», nella classe delle multifunzioni «F» «midpoint K-convesse» e a valori «compatti», abbiamo provato la seguente implicazione

(1.3) «F» K-continua $\Rightarrow$ «F» K-convessa

(3) Si potrebbe essere indotti a pensare che questa definizione di «midpoint convessità» si riduca, per funzioni monodrome, alla «midpoint convessità» fornita da J. Jensen: si vede però immediatamente che la definizione di Nikodem viene a risultare più restrittiva di quella di Jensen.

(4) La implicazione (1.2), come è noto, *non* sussiste se X è uno spazio lineare topologico di dimensione infinita.

(5) Qui *non* è stato necessario richiedere che i valori della multifunzione fossero «chiusi».

mentre, se $X = \mathbb{R}^n$, nel Teorema 4.3 siamo riusciti a conseguire la proposizione inversa

$$(1.4) \qquad «F» \ K\text{-convessa} \Rightarrow «F» \ K\text{-continua}$$

questa volta senza imporre né che il cono K sia «chiuso» né che i valori di «F» siano «compatti» (6).

Vogliamo osservare che il nostro Teorema 4.2, ove si tenga presente la nota (14), si riduce, per $K = \{0\}$, al già citato Teorema 2 di $[\mathbf{10}]_1$, mentre fornisce nuove proposizioni per ogni altra scelta del cono K. A proposito del Teorema 4.3, si vede subito che esso contiene strettamente il Teorema 3 di $[\mathbf{10}]_1$ (cfr. qui Osservazione VI).

In **5**, utilizzando i concetti di «midpoint K-concavità*» e di «K-concavità*», introdotti in **2**, abbiamo conseguito altre proposizioni che mettono in relazione la «K-continuità» con la «midpoint K-concavità*» e con la «K-concavità*». Di queste il Corollario I estende il Teorema 1 di $[\mathbf{10}]_2$ e contiene strettamente la più volte citata proposizione di [3] (cfr. qui Osservazione VII), mentre i Teoremi 5.4 e 5.5 estendono i citati Teoremi 4.2 e 4.3 da noi provati in **4**. È subito visto che se $X = \mathbb{R}^n$ e il cono K è «chiuso», i Teoremi 5.4 e 5.5, nella classe delle multifunzioni «midpoint K-concave*» e a valori «compatti» e «K-convessi», forniscono la seguente condizione necessaria e sufficiente

$$(1.5) \qquad «F» \ «K\text{-concava*»} \Leftrightarrow «F» \ «K\text{-continua»}.$$

È appena il caso di precisare che i risultati da noi ottenuti in **5** per le multifunzioni «midpoint K-concave*» («K-concave*») sono significativi nel senso che questi risultati *non* sono ovvie conseguenze di quelli ottenuti per le multifunzioni «midpoint K-convesse» («K-convesse»). A ciò potremmo essere indotti erroneamente a pensare riferendoci alle funzioni monodrome, per le quali da ogni proprietà valida per le funzioni «midpoint K-convesse» («K-convesse») se ne può associare banalmente un'altra per le funzioni «midpoint K-concave*» («K-concave*») (7), in quanto dalla «midpoint K-convessità» («K-convessità») di «f» segue banalmente la «midpoint K-concavità*» («K-concavità*») di «$-f$». Poiché però, come sarà precisato in **5**, esistono multifunzioni «F» «midpoint K-conves-

(6) Sui valori di «F» si richiede soltanto che siano «limitati».

(7) Nel caso di funzioni monodrome il concetto di «midpoint K-concavità*» e di «K-concavità*» coincidono rispettivamente con il concetto di «midpoint K-concavità» e di «K-concavità».

se» («K-convesse») tali che «$-F$» *non* è «midpoint K-concava*» («K-concava*»), nel caso di multifunzioni *non* si ripresenta la situazione descritta per le funzioni monodrome.

2 — Siano X e Y due spazi lineari topologici T_0, $\mathcal{U}(0)$ e $\mathcal{W}(0)$ due basi di intorni «bilanciati» dello zero rispettivamente in X e in Y.

Un insieme $K \subset Y$, $K \neq \emptyset$, è detto «*cono*» se soddisfa le seguenti condizioni

$$K + K \subset K \qquad \alpha K \subset K \quad \forall \alpha \in [0, +\infty[\,. \tag{2.1}$$

Diciamo poi che un insieme $A \subset Y$ è «*K-convesso*» se

$$tA + (1-t)A \subset A + K \qquad \forall t \in [0, 1]\,(^8)\,. \tag{2.2}$$

Fissato un insieme $D \subset X$, $D \neq \emptyset$, aperto e convesso, e detta $\mathscr{P}(Y)$ la famiglia dei sottoinsiemi (*non* vuoti) di Y

$$\mathscr{P}(Y) = \{S \subset Y\colon\ S \neq \emptyset\} \tag{2.3}$$

la multifunzione $F\colon D \to \mathscr{P}(Y)$ si dice (cfr. [**10**]$_2$, p. 394) «*K-limitata inferiormente*» («*K-limitata superiormente*») su un insieme $A \subset D$, se esiste un insieme limitato $B \subset Y$ tale che

$$\bigcup_{x \in A} F(x) \subset B + K \qquad \Big(\bigcup_{x \in A} F(x) \subset B - K\Big)\,.$$

Diciamo inoltre (cfr. [**10**]$_2$, p. 394) che la multifunzione «F» è «*K-semicontinua inferiormente*» in un punto $x_0 \in D$ se

(K-s.c.i.) $\quad \forall W \in \mathcal{W}(0)$ esiste un intorno $U \in \mathcal{U}(0)$, $x_0 + U \subset D$

con la proprietà $\quad F(x_0) \subset F(x) + W + K \qquad \forall x \in x_0 + U$;

mentre «F» è «*K-semicontinua superiormente*» in x_0 se (cfr. [**10**]$_2$, p. 394)

(K-s.c.s.) $\quad \forall W \in \mathcal{W}(0)$ esiste un intorno $U \in \mathcal{U}(0)$ $\quad x_0 + U \subset D$

in modo che risulti $\quad F(x) \subset F(x_0) + W + K \qquad \forall x \in x_0 + U$.

(8) Ogni insieme A «K-convesso» ha la seguente proprietà: $aA + bA \subset (a+b)A + K$, $\forall a, b \in [0, +\infty[$.

La multifunzione «F» si dice «*K-continua*» nel punto $x_0 \in D$ se è K-semicontinua inferiormente e K-semicontinua superiormente in tale punto.

Andiamo ora a richiamare, per le multifunzioni $F\colon D \to \mathscr{P}(Y)$, i concetti di «*K-convessità*» (cfr. [4], § 1) («*K-concavità*» (cfr. [5], § 3)) e di «*midpoint K-convessità*» (cfr. $[14]_2$) («*midpoint K-concavità*» (cfr. [5]), concetti che estendono le note definizioni di «K-convessità» («K-concavità») e di «midpoint K-convessità» («midpoint K-concavità») per le funzioni monodrome (cfr. $[14]_1$) (9).

Una multifunzione «F» si dice «*K-convessa*» se

$$(2.4)_1 \qquad tF(x_1) + (1-t)F(x_2) \subset F(tx_1 + (1-t)\,x_2) + K \qquad \forall x_1,\ x_2 \in D$$

e per ogni $t \in [0,\ 1]$; mentre «F» si dice «*midpoint K-convessa*» se $(2.4)_1$ sussiste per $t = 1/2$.

Una multifunzione «F» si dice «*K-concava*» se

$$(2.5)_1 \qquad tF(x_1) + (1-t)\,F(x_2) \subset F(tx_1 + (1-t)\,x_2) - K \qquad \forall x_1,\ x_2 \in D$$

e per ogni $t \in [0,\ 1]$; mentre «F» si dice «*midpoint K-concava*» se $(2.5)_1$ sussiste per $t = 1/2$.

Andiamo ora a fornire per le multifunzioni $F\colon D \to \mathscr{P}(Y)$ un altro concetto di «K-convessità» («K-concavità») e un altro concetto di «midpoint K-convessità» («midpoint K-concavità») che, come peraltro quelli appena richiamati, nel caso di funzioni monodrome coincidono rispettivamente con gli usuali concetti di «convessità» («concavità») e di «midpoint convessità» («midpoint concavità») se su Y si considera l'ordinamento parziale definito nella nota (9).

Una multifunzione «F» la diciamo «*K-convessa**» se

$$(2.4)_2 \qquad F(tx_1 + (1-t)\,x_2) \subset tF(x_1) + (1-t)\,F(x_2) - K \qquad \forall x_1, x_2 \in D$$

e per ogni $t \in [0,\ 1]$; mentre diciamo che «F» «*midpoint K-convessa**» se $(2.4)_2$ sussiste per $t = 1/2$. Diciamo, inoltre, che «F» è «*K-concava**» se risulta

$$(2.5)_2 \qquad F(tx_1 + (1-t)\,x_2) \subset tF(x_1) + (1-t)\,F(x_2) + K \qquad \forall x_1, x_2 \in D$$

e per ogni $t \in [0,\ 1]$; diciamo che «F» è «*midpoint K-concava**» se $(2.5)_2$ sussiste per $t = 1/2$.

---

(9) Nel caso di funzioni monodrome i concetti di «K-convessità» («K-concavità») e di «midpoint K-convessità» («midpoint K-convessità») altro *non* sono che rispettivamente la «convessità» («concavità») e la «midpoint convessità» («midpoint concavità») quando su Y si considera l'ordinamento parziale $\leqslant_K$ definito da $x \leqslant_K y \Leftrightarrow y - x \in K$.

Osservazione I. È opportuno precisare che esistono multifunzioni «K-convesse*» che *non* sono «K-convesse» e che esistono multifunzioni «K-concave*» che *non* sono «K-concave», come è evidente osservando che, se $K=\{0\}$, la multifunzione F: $\mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ così definita

$$(2.6) \qquad F(x) = \begin{matrix} [0, \ x] & x \geq 0 \\ [x, \ 0] & x < 0 \end{matrix}$$

è «K-convessa*» e «K-concava*» ma *non* è né «K-convessa» né «K-concava».

D'altra parte, esistono multifunzioni «K-convesse» che *non* sono «K-convesse*» e, inoltre, esistono multifunzioni «K-concave» ma *non* «K-concave*», come è immediato riconoscere prendendo in esame la multifunzione F: $\mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ definita ponendo:

$$(2.7) \qquad F(x) = \begin{matrix} [0, \ 1] & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ [0, \ 2] & x \in \mathbb{Q} \end{matrix}$$

e assumendo $K = [0, \ +\infty[$.

Infatti, «F» è «K-convessa», ma, come si vede facilmente ponendo (cfr. qui $(2.4)_2$) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$ e $t = 1/2$, *non* è «K-convessa*».

Prendendo poi in esame la multifunzione «$-F$», si vede subito che «$-F$» è «K-concava» ma *non* «K-concava*».

Osservazione II. Il concetto di multifunzione «K-convessa*» («midpoint K-convessa*»), come accade per il concetto di multifunzione «K-convessa» («midpoint K-convessa») contiene, nel caso di funzioni (reali) monodrome, oltre al concetto di funzione «convessa» («midpoint convessa»), quello di funzione «concava» («midpoint concava»), come si vede assumendo rispettivamente $K = [0, \ +\infty[$ e $K =]-\infty, \ 0]$. La stessa situazione si presenta nel caso di multifunzioni «K-concave*» («midpoint K-concave*») assumendo rispettivamente, questa volta, $K =]-\infty, \ 0]$ e $K = [0, \ +\infty[$.

Osservazione III. Vogliamo, inoltre, precisare che se si considera sulla famiglia di sottoinsiemi $\mathscr{P}(Y)$ il preordinamento $\leqslant_K$ definito da $A \leqslant_K B \Leftrightarrow B \subset A + K$, con $A, B \in \mathscr{P}(Y)$, le multifunzioni F: $D \to \mathscr{P}(Y)$ «convesse» *non* sono altro che le multifunzioni «K-convesse» (cfr. qui $(2.4)_1$), mentre le multifunzioni «concave» non sono altro che le multifunzioni «K-concave*» (cfr.

qui $(2.5)_2$) [10]. Infine, osserviamo che esistono multifunzioni «F» «convesse» tali che «$-F$» *non* è «concava». Ciò risulta evidente prendendo ancora in esame la multifunzione F: $\mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ definita come in (2.7) e il cono $K = [0, +\infty[$: infatti, se su $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ si considera il preordinamento sopra citato, «F» è «convessa» mentre «$-F$» *non* è «concava».

3 — Andiamo ora a provare alcuni lemmi che ci saranno utili per conseguire i risultati contenuti in 4 e in 5.

Lemma 3.1. *Siano X uno spazio lineare topologico T_0, A un insieme aperto in X e x, $x_0 \in A$, con $x \neq x_0$. Esistono allora un punto $\bar{x} \in A$ e un numero diadico* [11] *$p \in]0, 1[$ con la proprietà $x = p\bar{x} + (1-p)x_0$.*

Cominciamo con l'osservare che esiste $U \in \mathscr{U}(0)$ tale che $x + U \subset A$; sia allora $V \in \mathscr{U}(0)$ in modo che $V + V \subset U$. È subito visto che è possibile determinare un numero $\delta > 0$ tale che

$$(3.1) \qquad \frac{x}{r} \in x + V \qquad \left(\frac{1-r}{r}\right)x_0 \in V \qquad \forall r \in \mathbb{R}\colon |r-1| < \delta .$$

Fissato ora un numero diadico $p \in]0, 1[$, con $|p-1| < \delta$, sia

$$\bar{x} = x - \left(\frac{1-p}{p}\right)x_0 .$$

Poiché V è bilanciato, da (3.1) segue che $\bar{x} \in x + U$. Risulta allora $\bar{x} \in A$ e $x = p\bar{x} + (1-p)x_0$.

Lemma 3.2. *Siano Y uno spazio lineare topologico T_0 e K un cono limitato in Y. In queste condizioni, risulta $K = \{0\}$.*

Dall'ipotesi segue che $K \subset \bigcap_{W \in \mathscr{U}(0)} W = \{0\}$ (cfr. [2], IX, § 2, Teorema 2) [12], da cui segue subito la tesi.

---

(10) In questo ordine di idee i concetti di «K-convessità*» (cfr. qui $(2.4)_2$) e di «K-concavità» (cfr. qui $(2.5)_1$) sono rispettivamente la «convessità» e la «concavità» quando su $\mathscr{P}(Y)$ si considera invece il preordinamento $\leqslant_{K'}$ così definito: $A \leqslant_{K'} B \Leftrightarrow A \subset B - K$, con A, $B \in \mathscr{P}(Y)$.

(11) (Cfr. [9], V, § 1).

(12) In realtà, in [2] si richiede che lo spazio lineare topologico Y soddisfi l'«assioma di totalità», ma si vede facilmente che il risultato continua a sussistere nel contesto più generale di «spazi lineari topologici T_0».

Lemma 3.3. *Siano X, Y due spazi lineari topologici T_0, $D \subset X$ un insieme aperto e convesso, $K \subset Y$ un cono e $F: D \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunzione con le proprietà:*

(i) *$F(x)$ è K-convesso, $\forall x \in D$* (ii) *F è midpoint K-convessa*.*

In queste condizioni, risulta

$$F(n2^{-p}x_1 + (1 - n2^{-p})x_2) \subset n2^{-p}F(x_1) + (1 - n2^{-p})F(x_2) + K$$

$$\forall p,\ n \in \mathbb{N} \qquad n \leqslant 2^p \qquad \forall x_1,\ x_2 \in D.$$

Andiamo intanto a provare, per induzione, che, per ogni $q \in \mathbb{N}$, risulta

$$F(2^{-q}(z_1 + \ldots + z_{2^q})) \subset 2^{-q}[F(z_1) + \ldots + F(z_{2^q})] + K \qquad \forall z_1, \ldots, z_{2^q} \in D. \tag{3.2}$$

Intanto, per l'ipotesi (ii) la (3.2) è vera per $q = 1$. Basta allora provare che se (3.2) sussiste per $q = m - 1$, essa continua a sussistere per $q = m$. Infatti da (ii), $\forall z_1, \ldots, z_{2^m} \in D$, si deduce

$$F(2^{-m}(z_1 + \ldots + z_{2^m}))$$

$$\subset 2^{-1}F(2^{-(m-1)}(z_1 + \ldots + z_{2^{m-1}})) + 2^{-1}F(2^{-(m-1)}(z_{2^{m-1}+1} + \ldots + z_{2^m})) + K$$

$$\subset 2^{-m}[F(z_1) + \ldots + F(z_{2^m})] + K.$$

Fissati ora $x_1,\ x_2 \in D$, $p,\ n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant 2^p$, siano $z_1 = \ldots = z_n = x_1$ e $z_{n+1} = \ldots = z_{2^p} = x_2$. Da (3.2) segue

$$F(n2^{-p}x_1 + (1 - n2^{-p})x_2)$$

$$\subset 2^{-p}[F(z_1) + \ldots + F(z_n)] + 2^{-p}[F(z_{n+1}) + \ldots + F(z_{2^p})] + K.$$

Tenendo, infine, presente che gli insiemi $F(x_1)$ e $F(x_2)$ sono K-convessi (8), risulta

$$F(n2^{-p}x_1 + (1 - n2^{-p})x_2)$$

$$\subset 2^{-p}[nF(x_1) + K] + 2^{-p}[(2^p - n)F(x_2) + K] + K$$

$$\subset 2^{-p}nF(x_1) + (1 - 2^{-p}n)F(x_2) + K.$$

4 — Se K è un cono «chiuso», le multifunzioni «midpoint K-convesse» hanno proprietà analoghe a quelle provate da K. Nikodem in **[10]**$_1$ per le multifunzioni «midpoint convesse» ([13]), come è provato dal seguente

Teorema 4.1. *Siano X, Y due spazi lineari topologici T_0, $D \subset X$ un insieme aperto e convesso, $K \subset Y$ un cono chiuso e F: $D \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunzione tale che*

(j) *$F(x)$ è compatto $\forall x \in D$* (jj) *«F» è midpoint K-convessa.*

In queste condizioni, si prova che

(α) *$F(x)$ è K-convesso $\forall x \in D$;*

($\alpha\alpha$) $qF(x_1) + (1-q)F(x_2) \subset F(qx_1 + (1-q)x_2) + K$

$\forall q \in \mathrm{Q} \cap [0,\ 1] \qquad \forall x_1,\ x_2 \in D.$

Per provare (α), fissato $x \in D$, osserviamo intanto che, per ogni numero diadico $c \in [0,\ 1]$, risulta (cfr. **[10]**$_2$, Lemma 1)

$$cF(x) + (1-c)F(x) \subset F(x) + K. \tag{4.1}$$

Fissati y_1, $y_2 \in F(x)$ e $t \in [0,\ 1]$, sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri diadici convergente a t. Tenendo presente (4.1), si ha $a_n y_1 + (1-a_n) y_2 \in F(x) + K$ $\forall n \in \mathrm{N}$; inoltre, posto $y = ty_1 + (1-t) y_2$, per ogni $W \in \mathscr{W}(0)$ esiste $\tilde{n} \in \mathrm{N}$ con la proprietà $a_n y_1 + (1-a_n) y_2 \in y + W$, $\forall n \in \mathrm{N}$, $n \geqslant \tilde{n}$, e quindi y è punto di accumulazione per l'insieme $F(x) + K$. Ne segue, poiché $F(x) + K$ è chiuso (cfr. [2], IX, § 2, Teorema 2) ([12]), che $y \in F(x) + K$. Pertanto, $F(x)$ è un insieme K-convesso.

Per provare ($\alpha\alpha$) fissiamo due punti x_1, $x_2 \in D$ e un numero $q \in \mathrm{Q} \cap]0,\ 1[$, $q = m/n$, con m, $n \in \mathrm{N}$. Procedendo per induzione osserviamo intanto che, per ogni $p \in \mathrm{N}$, risulta (cfr. (jj))

$$2^{-p}[F(z_1) + \ldots + F(z_{2^p})] \subset F(2^{-p}(z_1 + \ldots + z_{2^p})) + K \tag{4.2}$$

$$\forall z_1, \ldots, z_{2^p} \in D.$$

Scelto $p \in \mathrm{N}$, $n < 2^p$, e fissati i punti $z_1, \ldots, z_{2^p}$ in modo che $z_1 = \ldots = z_m = x_1$,

---

([13]) Se $K = \{0\}$, le multifunzioni «midpoint K-convesse» sono dette, più semplicemente, «midpoint convesse».

$z_{m+1} = \ldots = z_n = x_2,\ z_{n+1} = \ldots = z_{2^p} = n^{-1}(z_1 + \ldots + z_n)$, da (4.2) segue

$$2^{-p}[F(z_1) + \ldots + F(z_n) + (2^p - n)F(n^{-1}(z_1 + \ldots + z_n))]$$

$$\subset 2^{-p}[F(z_1) + \ldots + F(z_{2^p})] \subset F(n^{-1}(z_1 + \ldots + z_n)) + K$$

da cui

$$F(z_1) + \ldots + F(z_n) + (2^p - n)F(n^{-1}(z_1 + \ldots + z_n)) \tag{4.3}$$

$$\subset nF(n^{-1}(z_1 + \ldots + z_n)) + (2^p - n)F(n^{-1}(z_1 + \ldots + z_n)) + K\,.$$

Poiché $nF(n^{-1}(z_1 + \ldots + z_n)) + K$ è un insieme convesso e chiuso (cfr. [2], IX, § 2, Teorema 5)(12), da (4.3), utilizzando il Lemma 2 di **[10]**$_1$, discende

$$F(z_1) + \ldots + F(z_n) \subset nF(n^{-1}(z_1 + \ldots + z_n)) + K$$

e pertanto, essendo $mF(x_1) + (n-m)F(x_2) \subset F(z_1) + \ldots + F(z_n)$, si ha infine $qF(x_1) + (1-q)F(x_2) \subset F(qx_1 + (1-q)x_2) + K$.

Osservazione IV. È subito visto che, nella classe delle multifunzioni «midpoint K-convesse», le proprietà (α) e ($\alpha\alpha$) continuano a sussistere se, invece dell'ipotesi (j), si richiede che $F(x)$ sia, per ogni $x \in D$, «chiuso» e «limitato», purché il cono K sia «compatto». Poiché l'unico cono compatto è $K = \{0\}$ (cfr. qui Lemma 3.2), questo risultato altro *non* è che la Proposizione 1 di cui in **[10]**$_1$.

Il Teorema 4.2 e il Teorema 4.3, che ora proveremo, stabiliscono relazioni fra i concetti di «K-convessità» e di «K-continuità», proprietà queste che, come è noto, estendono rispettivamente i concetti di «convessità» e di «continuità».

Per ogni sottoinsieme A dello spazio lineare topologico Y e per ogni intorno $W \in \mathscr{W}(0)$, poniamo

$$N_W^K(A) = \{B \subset Y\colon\ B \subset A + W + K,\ A \subset B + W + K\}\,. \tag{4.4}$$

Teorema 4.2(14). *Siano X, Y due spazi lineari topologici T_0, $D \subset X$ un in-*

---

(14) Vogliamo osservare che quanto detto nell'Osservazione IV può ora essere ripetuto facendo riferimento al Teorema 4.2 di qui e al Teorema 2 di **[10]**$_1$ (in luogo, rispettivamente, del Teorema 4.1 e della Proposizione 1).

sieme aperto e convesso, $K \subset Y$ un cono chiuso e $F: D \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunzione con le proprietà

(γ) *$F(x)$ è compatto $\forall x \in D$* ($\gamma\gamma$) *«F» è midpoint K-convessa*
($\gamma\gamma\gamma$) *«F» è K-continua su D.*

In queste condizioni, si prova che la multifunzione «F» è K-convessa.

Siano x_1, $x_2 \in D$ e $t \in [0, 1]$. Fissati una successione di numeri diadici $\{q_n\}_n$ convergente a t e un intorno $W \in \mathscr{W}(0)$, siano I, $J \in \mathscr{W}(0)$ tali che

(4.5) $$I + I \subset W \qquad J + J \subset I.$$

Andiamo intanto a provare che è possibile determinare un numero $n^* \in \mathbb{N}$ in modo che risulti

(4.6) $$q_n F(x_1) + (1 - q_n) F(x_2) \in N_I^K(tF(x_1) + (1 - t) F(x_2))$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, con $n \geqslant n^*$.

Poiché $F(x_1)$ è un insieme limitato (cfr. (γ)), esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $|q_n - t| F(x_1) \subset J$, $\forall n \geqslant n_1$, e quindi

$(4.7)_1$ $$q_n F(x_1) \subset tF(x_1) + J + K \qquad tF(x_1) \subset q_n F(x_1) + J + K \qquad \forall n \geqslant n_1 .$$

In modo analogo, si prova che esiste $n_2 \in \mathbb{N}$ in modo che

$(4.7)_2$ $$\begin{aligned} &(1 - q_n) F(x_2) \subset (1 - t) F(x_2) + J + K \qquad \forall n \geqslant n_2 \\ &(1 - t) F(x_2) \subset (1 - q_n) F(x_2) + J + K \qquad \forall n \geqslant n_2 . \end{aligned}$$

Posto quindi $n^* = \max\{n_1, n_2\}$, da $(4.7)_1$, $(4.7)_2$ e (4.5), segue (4.6).

Detto $\bar{x} = tx_1 + (1 - t) x_2$, è possibile inoltre determinare (cfr. ($\gamma\gamma\gamma$)) un intorno $U \in \mathscr{U}(0)$, con $\bar{x} + U \subset D$, e un numero $m^* \in \mathbb{N}$ in modo che

(4.8) $$F(q_n x_1 + (1 - q_n) x_2) \in N_I^K(F(\bar{x})) \qquad \forall n \geqslant m^* .$$

Se, quindi, poniamo $p^* = \max\{n^*, m^*\}$, da (4.6), (4.8) e (4.5), si ha allora (cfr. qui ($\gamma\gamma$) e il Lemma 1 di $[10]_2$)

(4.9) $$tF(x_1) + (1 - t) F(x_2) \subset F(\bar{x}) + W + K .$$

Ora, poiché (4.9) sussiste per ogni intorno $W \in \mathscr{W}(0)$, risulta (cfr. [2], IX, § 2, Teorema 5) (12) $tF(x_1) + (1 - t) F(x_2) \subset \overline{F(\bar{x}) + K}$, da cui segue infine (cfr. [2], IX, § 2, Teorema 1 e Teorema 2) [12]

$$tF(x_1) + (1-t)F(x_2) \subset F(tx_1 + (1-t)x_2) + K.$$

Andiamo ora a provare il

Teorema 4.3. *Siano $X = \mathbb{R}^n$, Y uno spazio lineare topologico T_0, $D \subset X$ un insieme aperto e convesso, K un cono di Y e F: $D \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunzione con le proprietà:*

(β) *$F(x)$ è limitato $\forall x \in D$* ($\beta\beta$) *«F» è K-convessa.*

In queste condizioni, «F» è K-continua su D.

Poiché *non* è restrittivo supporre $0 \in D$, andiamo intanto a provare, procedendo per induzione su «n», che «F» è K-semicontinua inferiormente nel punto $x_0 = 0$.

Esaminando, per cominciare, il caso $n = 1$, proviamo che

$$\forall W \in \mathscr{W}(0) \qquad \exists B^{(1)}(0, \rho) \subset D\,[15] \qquad \text{tale che} \tag{4.10}$$

$$F(0) \subset F(x) + W + K \qquad \forall x \in B^{(1)}(0, \rho).$$

Fissato $W \in \mathscr{W}(0)$, sia $I \in \mathscr{W}(0)$ con $I + I \subset W$; e fissata inoltre la boccia $B^{(1)}(0, \varepsilon) \subset D$, sia $\bar{x} \in B^{(1)}(0, \varepsilon)$, $\bar{x} > 0$. Da (β) segue che esiste $p \in]0, 1]$ tale che $tF(\bar{x}) \subset I$, $tF(-\bar{x}) \subset I$, $tF(0) \subset I$, $\forall t \in [0, p[$. Tenendo presente ($\beta\beta$) possiamo allora scrivere

$$F(0) \subset F(t\bar{x}) + W + K \qquad \forall t \in [0, p[\tag{4.11$_1$}$$

$$F(0) \subset F(-t\bar{x}) + W + K \qquad \forall t \in [0, p[. \tag{4.11$_2$}$$

Posto, quindi, $\rho = p\bar{x}$ è immediato constatare (cfr. qui $(4.11)_1$ e $(4.11)_2$) che sussiste (4.10) e pertanto la «F», se $n = 1$, è K-semicontinua inferiormente in $x_0 = 0$.

Supponendo ora che la proprietà provata sussista se $n = m - 1$, andiamo a dimostrarla se $n = m$.

---

[15] Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}^+$, sia $B^{(n)}(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon d(0, x) < r\}$, ove $d(0, x) = |x_1| + \ldots + |x_n|$ $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Consideriamo intanto le multifunzioni così definite:

$$(4.12)_1 \qquad F_1((z_1, \ldots, z_{m-1})) = F((z_1, \ldots, z_{m-1}, 0)) \qquad \forall (z_1, \ldots, z_{m-1}) \in D_1$$

$$(4.12)_2 \qquad F_2(t) = F((0, \ldots, 0, t)) \qquad \forall t \in D_2$$

ove $D_1 = \{(z_1, \ldots, z_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}: (z_1, \ldots, z_{m-1}, 0) \in D\}$ e

$$D_2 = \{t \in \mathbb{R}: (0, \ldots, 0, t) \in D\}.$$

Fissati $W, I \in \mathcal{W}(0)$, tali che $I + I \subset W$, esistono allora due bocce $B^{(m-1)}(0, \rho_1) \subset D_1$ e $B^{(1)}(0, \rho_2) \subset D_2$ in modo che

$$(4.13)_1 \qquad F_1(0) \subset F_1(z) + I + K \qquad \forall z \in B^{(m-1)}(0, \rho_1)$$

$$(4.13)_2 \qquad F_2(0) \subset F_2(t) + I + K \qquad \forall t \in B^{(1)}(0, \rho_2).$$

Posto $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$, siano B_1 e B_2 i sottoinsiemi di $D \subset \mathbb{R}^m$

$$B_1 = B^{(m-1)}(0, \rho) \times \{0\} \qquad B_2 = \{(0, \ldots, 0)\} \times B^{(1)}(0, \rho)$$

essendo $\{0\} \subset \mathbb{R}$ e $\{(0, \ldots, 0)\} \subset \mathbb{R}^{m-1}$.

Per ogni $x \in B^{(m)}(0, \rho)$ risulta $x = ab_1 + (1-a)b_2$, con $a \in [0, 1]$, $b_1 \in B_1$, $b_2 \in B_2$ e pertanto, da $(4.13)_1$ e $(4.13)_2$, segue (cfr. qui (2.1) e $(\beta\beta)$)

$$F(0) \subset a[F(b_1) + I + K] + (1-a)[F(b_2) + I + K] \subset F(x) + W + K.$$

Risulta così provato che ogni «F» soddisfacente (β) e $(\beta\beta)$ è K-semicontinua inferiormente nel punto $x_0 = 0$ e pertanto (cfr. $[\mathbf{10}]_2$, Lemma 2) in ogni punto di D. Tenendo poi presente il Lemma 3 di $[\mathbf{10}]_2$, si vede infine che «F» è K-semicontinua superiormente in ogni punto di D.

Osservazione V. La proposizione ora dimostrata *non* continua a sussistere se X è uno spazio lineare topologico T_0 di dimensione infinita e il cono è $K = \{0\}$: esistono multifunzioni a valori «compatti» che sono «K-convesse» ma *non* «K-continue» (cfr. $[\mathbf{10}]_1$, Osservazione 1).

Osservazione VI. Come è immediato constatare assumendo $K = \{0\}$, il nostro Teorema 4.3 contiene il Teorema 3 di K. Nikodem (cfr. $[\mathbf{10}]_1$).

5 — Conseguiremo qui alcune proposizioni che stabiliscono relazioni fra il concetto di «midpoint K-concavità*» e quello di «K-continuità». Queste proposi-

zioni *non* sono ovvie conseguenze di quelle provate in [10]$_2$ da Nikodem per multifunzioni «midpoint K-convesse»,come si potrebbe essere indotti a ritenere pensando alle funzioni monodrome. Per i concetti di «midpoint K-concavità*» e di «midpoint K-convessità» si presenta la stessa situazione descritta nell'Osservazione III, cioè, esistono multifunzioni «F» «midpoint K-convesse» tali che «$-F$» *non* è «midpoint K-concava*».

Teorema 5.1. *Siano X, Y due spazi lineari topologici T_0, $D \subset X$ un insieme aperto e convesso, $K \subset Y$ un cono e F: $D \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunzione tale che:*

(η) *$F(x)$ è limitato e K-convesso, $\forall x \in D$;*
($\eta\eta$) *«F» è midpoint K-concava*;*
($\eta\eta\eta$) *esiste $x_0 \in D$ tale che «F» è K-semicontinua superiormente in x_0.*

In queste condizioni, la multifunzione «F» risulta K-semicontinua superiormente su D.

Fissato $x \in D$, $x \neq x_0$, siano (cfr. qui Lemma 3.1) p un numero diadico, $p \in]0, 1[$, e $\bar{x} \in D$ tali che $x = p\bar{x} + (1-p)x_0$. Per ogni $W \in \mathscr{W}(0)$, in corrispondenza di un intorno $I \in \mathscr{W}(0)$, con $I + I + I + I \subset W$, dall'ipotesi ($\eta\eta\eta$), tenendo presente il Lemma 3.3 (cfr. qui (η) e ($\eta\eta$)), esiste un intorno $U \in \mathscr{U}(0)$, con $x_0 + U \subset D$ e $x + U \subset D$, tale che

$$
\begin{aligned}
(5.1) \qquad F(x + (1-p)u) &\subset pF(\bar{x}) + (1-p)F(x_0 + u) \\
&\subset pF(\bar{x}) + (1-p)F(x_0) + I + K \qquad \forall u \in U.
\end{aligned}
$$

Scelto ora (cfr. (η)) un numero diadico $q \in]0, 1]$, con $qF(x_0) \subset I$, $qF(x) \subset I$, $qF(\bar{x}) \subset I$, fissiamo l'intorno $V = q(1-p)U \in \mathscr{U}(0)$. Per ogni $v \in V$, $v = q(1-p)u$, con $u \in U$, dal Lemma 3.3, tenendo presente (5.1), segue

$$F(x + v) \subset (1-q)F(x) + qF(x + (1-p)u) \subset F(x) + W + K$$

e pertanto «F» è K-semicontinua superiormente in x.

Teorema 5.2. *Siano X, Y, D, K, F: $D \to \mathscr{P}(Y)$ e $x_0 \in D$ come nel Teorema 5.1. Allora «F» è K-semicontinua inferiormente in x_0.*

Anche qui possiamo supporre senza perdita di generalità che $x_0 = 0 \in D$.

Fissato arbitrariamente $W \in \mathcal{W}(0)$, sia $J \in \mathcal{W}(0)$, con $J + J + J \subset W$. Esistono allora un numero diadico $q \in [1/2, \ 1[$ e un intorno $U \subset D$, tali che (cfr. qui (η) e $(\eta\eta\eta)$)

$$(5.2) \qquad \left(\frac{1-q}{q}\right) F(0) \subset J \qquad F(u) \subset F(0) + J + K \qquad \forall u \in U.$$

Fissato ora l'intorno $V = (1-q)\,U$ e preso $x \in V$, consideriamo il punto $\bar{x} = \left(\frac{-q}{1-q}\right) x \in U$. Intanto dal Lemma 3.3 (cfr. qui (η) e $(\eta\eta)$) si deduce subito che

$$F(0) \subset q^{-1}[F(0) - (1-q)F(0)] \subset F(x) + \left(\frac{1-q}{q}\right) F(\bar{x}) - \left(\frac{1-q}{q}\right) F(0) + K$$

da cui, tenendo presente (5.2), segue infine $F(0) \subset F(x) + W + K$. Pertanto, data l'arbitrarietà di $x \in V$, «F» è K-semicontinua inferiormente nel punto $x_0 = 0$.

Dai Teoremi 5.1 e 5.2 discende subito il seguente

Corollario I. *Se X, Y, D, K e F: $D \to \mathcal{B}(Y)$ sono come nel Teorema* 5.1, *la multifunzione «F» è K-continua su D.*

Andiamo ora a dimostrare il

Teorema 5.3. *Siano X, Y, D e K come nel Teorema* 5.1 *e sia F: $D \to \mathcal{B}(Y)$ una multifunzione soddisfacente alle ipotesi (η) e $(\eta\eta)$ del Teorema* 5.1 *e alla seguente proprietà:*

$(\lambda\lambda\lambda)$ *esiste un insieme $A \subset D$, $\mathring{A} \neq \emptyset$ in modo che «F» sia K-limitata inferiormente su A.*

In queste condizioni esiste $x_0 \in D$ tale che «F» è K-semicontinua superiormente in tale punto.

Siano intanto $x_0 \in \mathring{A}$, $U \in \mathcal{U}(0)$, con $x_0 + U \subset A$, e $B \subset Y$ un insieme limitato tale che (cfr. $(\lambda\lambda\lambda)$) $\bigcup_{u \in U} F(x_0 + u) \subset B + K$. Per ogni $W \in \mathcal{W}(0)$, in corrispondenza di $I \in \mathscr{W}(0)$, ove $I + I \subset W$, è possibile determinare (cfr. (η)) un numero diadico $q \in]0, 1]$ in modo che $qF(x_0) \subset I$, $qB \subset I$.

Considerato ora l'insieme $V = x_0 + qU$, per ogni $x \in V$, poiché $x = x_0 + qy$, con $y \in U$, risulta (cfr. qui Lemma 3.3)

$$F(x) \subset qF(x_0 + y) + (1 - q) F(x_0) + K \subset q(B + K) + F(x_0) - qF(x_0) + K$$

$$\subset F(x_0) + W + K .$$

Osservazione VII. Il Teorema 5.3 consente un facile confronto del nostro Corollario I con il classico Teorema di F. Bernstein - G. Doetsch (cfr. [3]) e con il Teorema 1 di K. Nikodem (cfr. [**10**]$_2$). Intanto il Corollario I contiene il citato Teorema di [3] per funzioni monodrome: ogni funzione monodroma e a valori reali, soddisfacente le ipotesi della proposizione di cui in [3], verifica infatti, se $K =]-\infty, 0]$, le proprietà richieste nel nostro Corollario I (cfr. qui Osservazione II di **2** e Teorema 5.3). Inoltre il nostro Corollario I rappresenta una estensione alle multifunzioni «midpoint K-concave*» del Teorema 1 di [**10**]$_2$.

Vogliamo, inoltre, precisare che la condizione che gli insiemi $F(x)$ siano «K-convessi», *non* richiesta nel Teorema 1 di [**10**]$_2$, *non* può essere omessa nel nostro Corollario I, né peraltro nel Teorema 5.1 (cfr. qui, Esempio 5.1).

Con l'Esempio 5.2 proveremo, infine, che la tesi del Teorema 5.3 *non* continua a sussistere se sostituiamo l'ipotesi $(\lambda\lambda\lambda)$ con quella richiesta nel Teorema 1 di [**10**]$_2$, cioè

$(\lambda\lambda\lambda)'$ *esiste un insieme* $A \subset D$, $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ *in modo che «F» sia K-limitata superiormente su A.*

Esempio 5.1. Siano $X = Y = D = \mathbb{R}$, $K = \{0\}$ e $F \colon D \to \mathscr{P}(Y)$ la multifunzione così definita

$$F(x) = \begin{matrix} \{0,\ 1,\ 2\} & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \{0,\ 2\} & x \in \mathbb{Q} . \end{matrix}$$

Tale multifunzione è a valori «limitati» ma *non* «K-convessi», inoltre è «midpoint K-concava*» e è «K-semicontinua superiormente» in $x_0 = \pi$, ma *non* è «K-semicontinua superiormente» in $x_0 = 0$.

Esempio 5.2. Fissata una funzione g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ «additiva» e «discontinua» e posti $X = D = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$ e $K =]-\infty,\ 0]$, la multifunzione F: $D \to \mathscr{P}(Y)$, ove $F(x) = \{e^{g(x)}\}\ \forall x \in D$, soddisfa alle ipotesi (η) e $(\eta\eta)$ del Teorema 5.3 e alla $(\lambda\lambda\lambda)'$, ma per ogni $x_0 \in D$, *non* è «K-semicontinua superiormente» in x_0.

Sussistono, inoltre, i seguenti due teoremi, che stabiliscono relazioni tra la «K-concavità*» e la «K-continuità»

Teorema 5.4. *Siano X, Y due spazi lineari topologici T_0, $D \subset X$ un insieme aperto e convesso, $K \subset Y$ un cono chiuso e F: $D \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunzione con le proprietà:*

(ξ) *$F(x)$ è compatto e K-convesso $\forall x \in D$;*
($\xi\xi$) *«F» è midpoint K-concava*;*
($\xi\xi\xi$) *«F» è K-continua su D.*

In queste condizioni, «F» è K-concava.*

Di questo Teorema omettiamo la dimostrazione poiché la tesi si consegue in modo analogo a quanto fatto per provare il nostro Teorema 4.2 (16), utilizzando però, in luogo del Lemma 1 di $[\mathbf{10}]_2$, il Lemma 3.3 qui provato.

Teorema 5.5. *Siano $X = \mathbb{R}^n$, Y uno spazio lineare topologico T_0, $D \subset X$ un insieme aperto e convesso, K un cono di Y e F: $D \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunzione tale che:*

(δ) *$F(x)$ è limitato e K-convesso $\forall x \in D$;*
($\delta\delta$) *«F» è K-concava*.*

In queste condizioni, «F» è K-continua su D.

Poiché *non* è restrittivo supporre $0 \in D$, per conseguire la tesi è sufficiente provare che «F» è K-semicontinua superiormente nel punto 0 (cfr. qui Corollario I), cioè che sussiste la seguente proprietà

$$\forall W \in \mathscr{W}(0) \qquad \exists B^{(n)}(0,\ \rho) \subset D\,(^{15}) \qquad \text{tale che} \tag{5.7}$$

$$F(x) \subset F(0) + W + K \qquad \forall x \in B^{(n)}(0,\ \rho).$$

(16) Nel Teorema 4.2 i valori della multifunzione «F», anche se *non* è richiesto esplicitamente, sono «K-convessi» (cfr. qui Teorema 4.1).

Osserviamo peraltro che la (5.7) si consegue con un procedimento analogo a quello svolto per provare nel Teorema 4.3 la K-semicontinuità inferiore nel punto zero.

Osservazione VIII. La proprietà espressa dal Teorema 5.5 *non* può essere estesa al caso in cui X abbia dimensione infinita. Infatti, se X è uno spazio lineare topologico T_0 di dimensione infinita e assumiamo $K = \{0\}$, esistono multifunzioni «F» con le proprietà (δ) e ($\delta\delta$), addirittura a valori compatti, che *non* sono «K-continue» (cfr. [**10**]$_1$, Osservazione 1).

Le multifunzioni «midpoint K-concave*» hanno inoltre una proprietà analoga a quella provata nel Teorema 4.1 per le multifunzioni «midpoint K-convesse», come prova il

Teorema 5.6. *Siano X, Y due spazi lineari topologici T_0, $D \subset X$ un insieme aperto e convesso, $K \subset Y$ un cono chiuso e F: $D \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunzione con le proprietà:*

(σ) *$F(x)$ è compatto e K-convesso $\forall x \in D$;*
($\sigma\sigma$) *«F» è midpoint K-concava*.*

In queste condizioni, si dimostra che:

$$F(qx_1 + (1-q)x_2) \subset qF(x_1) + (1-q)F(x_2) + K \qquad \forall q \in \mathrm{Q} \cap [0,\ 1] \qquad \forall x_1,\ x_2 \in D. \tag{5.8}$$

Iniziamo con il fissare due punti x_1, $x_2 \in D$, un numero $q \in]0,\ 1[\cap \mathrm{Q}$, $q = m/n$, m, $n \in \mathrm{N}$, e un numero $p \in \mathrm{N}$ tale che $n < 2^p$. Scelti allora $z_1, \ldots, z_{2^p} \in D$ in modo che $z_1 = \ldots = z_m = x_1$, $z_{m+1} = \ldots = z_n = x_2$, $z_{n+1} = \ldots = z_{2^p} = n^{-1}(z_1 + \ldots + z_n)$, risulta (cfr. qui, (3.2) e nota (8))

$$2^p F(n^{-1}(z_1 + \ldots + z_n)) + K \subset F(z_1) + \ldots + F(z_n)$$

$$+ (2^p - n) F(n^{-1}(z_1 + \ldots + z_n)) + K$$

e, tenendo presente che i valori della multifunzione «F» sono «K-convessi» e la nota (8), si deduce

$$nF(n^{-1}(z_1 + \ldots + z_n)) + (2^p - n) F(n^{-1}(z_1 + \ldots + z_n))$$

$$\subset mF(x_1) + (n-m) F(x_2) + (2^p - n) F(n^{-1}(z_1 + \ldots + z_n)) + K$$

da cui, poiché l'insieme $mF(x_1)+(n-m)F(x_2)+K$ è «chiuso» (cfr. [2], IX, § 2, Teorema 1 e Teorema 5) (12) e «convesso», segue (cfr. $[10]_1$, Lemma 2)

$$nF(n^{-1}(z_1+\ldots+z_n)) \subset mF(x_1)+(n-m)F(x_2)+K.$$

Per la scelta da noi operata dei punti $z_1,\ldots,z_n$ e del numero q, possiamo scrivere infine

$$F(qx_1+(1-q)x_2) \subset qF(x_1)+(1-q)F(x_2)+K.$$

Bibliografia

[1] S. BANACH, *Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$*, Fund. Math. **1** (1920), 123-124.

[2] C. BERGE, *Espaces topologiques. Functions multivoques*, Dunod, Paris (1959).

[3] F. BERNSTEIN und G. DOETSCH, *Zur theorie der konvexen funktionen*, Math. Ann. **76** (1915), 514-526.

[4] J. BORWEIN, *Multivalued convexity and optimization: a unified approach to inequality and equality constraints*, Math. Program. **13** (1977), 183-199.

[5] H. W. CORLEY, *Optimality conditions for maximizations of set-valued functions*, J. Optim. Theory Appl. 58, 1 (1988), 1-10.

[6] P. FISCHER and Z. SLODKOWSKI, *Christensen zero sets and measurable convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), 449-453.

[7] M. FRECHET, *A propos d'un article sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$*, Enseignement Math. 16 (1914).

[8] J. L. W. V. JENSEN, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Math. **30** (1906), 179-193.

[9] M. KUCZMA, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities Cauchy's èquation and Jensen's inequality*, PWN-Universytet Slaski, Warszawa-Krakow-Katowice (1985).

[10] K. NIKODEM: $[\bullet]_1$ *On midpoint convex set-valued functions*, Aequationes Math. 33 (1987) 46-56; $[\bullet]_2$ *Continuity of K-convex set-valued functions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 34 (1986), 392-399.

[11] H. H. SCHAEFER, *Topological vector spaces*, Graduate Texts in Math., Springer, New York (1980).

[12] W. SIERPINSKI: $[\bullet]_1$ *Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$*, Fund. Math. **1** (1920), 116-122; $[\bullet]_2$ *Sur les fonctions convexes mesurables*, Fund. Math. **1** (1920), 125-128.

[13] J. SMITAL, *On the functional equation $f(x+y)=f(x)+f(y)$*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **13** (1968).

[14] L. THIBAULT: $[\bullet]_1$ *Continuity of measurable convex and biconvex operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **90**, **2** (1984), 281-284; $[\bullet]_2$ *Continuity of measurable multifunctions*, Lectures Notes in Math., Springer-Verlag, **1091** (1984), 216-224.

[15] L. I. TRUDZIK: *Continuity properties of vector-valued convex functions*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, **36** (1984), 404-415.

Abstract

In this note we prove for a set-valued function «F» various theorems giving relations between the «K-continuity» condition and the notions of «K-convexity», «K-concavity», «K-convexity» and «K-concavity*».*

The principal results here obtained contain the classical Bernstein-Doetsch theorem and contain or extend theorems due to K. Nikodem.

***