Riv. Mat. Univ. Parma (4) **16** (1990), 35-46

GIOVAMBATTISTA AMENDOLA e ADELE MANES (*)

Vibrazioni termoelastiche di una cavità sferica in un solido incomprimibile (**)

A TRISTANO MANACORDA per il suo 70° compleanno

1 - Introduzione

La termoelasticità lineare dei solidi incomprimibili nel senso di Signorini [6] è regolata da un sistema di tre equazioni differenziali alle derivate parziali, ricavate da T. Manacorda in $[5]_1$, una delle quali, conseguenza della presenza del vincolo interno di tipo termodinamico, esprime la proporzionalità tra la dilatazione cubica e la variazione della temperatura in ogni punto del corpo.

La forma assunta da queste equazioni, nell'ipotesi di omogeneità ed isotropia, in un sistema di coordinate polari è stata ricavata in $[1]_1$, dove si è data una particolare soluzione a simmetria sferica, ed è stata ripresa in $[1]_2$ per lo studio della propagazione di onde sferiche in tali solidi; in entrambi i lavori si è adottata l'ipotesi di C. Cattaneo [2] sulla propagazione del calore con velocità finita (v. $[5]_2$, [3]).

In questo lavoro vengono riprese le equazioni in coordinate polari nel caso di simmetria sferica, ammettendo però la legge di Fourier sulla conduzione del calore, nell'intento di studiare con tale ipotesi classica la propagazione di una particolare perturbazione termoelastica, periodica nel tempo, assegnata sul contorno del solido incomprimibile. Si rivolge pertanto l'attenzione all'importan-

---

(*) Indirizzo degli AA.: G. AMENDOLA, Istituto di Matematiche Applicate «U. Dini», Facoltà di Ingegneria, via Diotisalvi 2, I-56126 Pisa; A. MANES, Dipartimento di Matematica, Università, via Buonarroti 2, I-56127 Pisa.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del C.N.R. e con il contributo del Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica. – Ricevuto: 18-XII-1989.

te classe delle soluzioni periodiche del problema termoelastico, che corrispondono ad un regime stazionario per il quale la soluzione esiste in ogni istante; in tale situazione la soluzione è caratterizzata dalle condizioni al contorno e dalle condizioni di limitatezza delle grandezze in questione.

Si suppone a tale scopo che il solido termoelastico incomprimibile occupi tutto lo spazio eccetto una cavità sferica, avente il centro coincidente con l'origine del riferimento polare, all'interno della quale sia assegnata una variazione nel tempo sia della temperatura che della pressione esercitata sulla superficie della cavità con legge sinusoidale.

Lo studio viene fatto nel caso particolare in cui è nullo il coefficiente di dilatazione termica; tale ipotesi comporta che le trasformazioni sono isocore e il problema termico è indipendente da quello dinamico. Si riesce a risolvere in modo completo il problema termoelastico, ricavando l'andamento delle tre funzioni incognite: lo spostamento radiale $\boldsymbol{u}$, la temperatura θ ed il parametro lagrangiano q, che dà lo sforzo isotropo dovuto alla presenza del vincolo interno.

L'indipendente problema della temperatura ha una soluzione con andamento sinusoidale, che si smorza all'aumentare della distanza polare r con legge esponenziale divisa per r; si ha cioè una propagazione nel solido della perturbazione termica assegnata in ogni istante sulla superficie della cavità, con una velocità v che viene determinata. Si ha così per θ una diminuzione dell'ampiezza che è accompagnata da un cambiamento di fase all'aumentare di r; in particolare, la variazione dell'ampiezza è tanto più rapida quanto maggiore è la frequenza dell'oscillazione della temperatura sulla superficie della cavità (skin effect in elettromagnetismo). Il ritardo con il quale si risente all'interno del corpo l'oscillazione superficiale aumenta con r, ma diminuisce all'aumentare della frequenza della perturbazione superficiale, alla cui radice quadrata v è proporzionale.

Per quanto riguarda il problema dello spostamento si ottiene una soluzione che esprime la sovrapposizione di due moti armonici, attenuati con il fattore $1/r^2$, aventi pulsazioni in generale diverse: una coincide con quella della pressione eccitatrice e l'altra è propria del sistema. Nel caso in cui tali pulsazioni coincidono, siamo in condizione di risonanza e si modifica la precedente azione isofrequenziale con la pressione, che, pur conservando inalterato il valore della pulsazione, diventa ora una oscillazione forzata, in quadratura con la pressione e con l'ampiezza che varia linearmente nel tempo.

Infine l'espressione ottenuta per il parametro q è legata alle soluzioni di $\boldsymbol{u}$ e di θ, e pertanto valgono considerazioni analoghe a quelle relative agli andamenti delle altre due funzioni.

2 - Premesse

Le trasformazioni infinitesime di un solido termoelastico C, incomprimibile nel senso di Signorini [6], sono regolate dalle equazioni linearizzate ricavate da Manacorda in $[5]_1$. Queste equazioni, nel caso omogeneo ed isotropo ed in assenza di forze di massa e di sorgenti termiche, sono

$$\tag{2.1} \begin{gathered} \rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \mu_T \Delta \boldsymbol{u} + (\lambda_T + \mu_T) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} - L T_0 \operatorname{grad} \theta - \operatorname{grad} q \\ \frac{\partial}{\partial t}(c T_0 \theta - a q + L \operatorname{div} \boldsymbol{u}) = k \Delta \theta \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = a T_0 \theta \end{gathered}$$

avendo indicato con $\boldsymbol{u}$ lo spostamento, $\theta = (T - T_0)/T_0$ la variazione specifica della temperatura rispetto alla temperatura T_0 uniforme della configurazione di riferimento, q il parametro che dà lo sforzo isotropo dovuto al vincolo di incomprimibilità, t il tempo, ρ_0 la densità materiale e k, c, L, a μ_T, λ_T costanti caratteristiche del materiale con

$$\tag{2.2} k > 0 \qquad \mu_T > 0$$

in base a considerazioni fisiche.

Il tensore linearizzato degli sforzi è espresso da

$$\tag{2.3} \boldsymbol{t} = -(q + L T_0 \theta - \lambda_T \operatorname{div} \boldsymbol{u}) \boldsymbol{1} + 2 \mu_T \boldsymbol{e} \qquad \text{con}$$

$$\tag{2.4} \boldsymbol{e} = \| \frac{1}{2} (\frac{\partial u_h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_h}) \| \qquad (h,\ k = 1,\ 2,\ 3)$$

dove x_h sono le coordinate cartesiane del generico punto di C in un prefissato sistema di riferimento ortogonale, rispetto al quale le u_h sono le componenti di $\boldsymbol{u}$.

3 - Equazioni in coordinate polari con l'ipotesi di simmetria radiale

La forma che le (2.1) assumono in coordinate polari r, α e ϕ è stata ricavata in $[1]_1$, dove è stata data anche la forma assunta nel caso di simmetria radiale.

Supponendo di essere nel caso ora detto, le funzioni incognite nelle (2.1) vengono a dipendere solo dalla coordinata spaziale r e dal tempo t; si ha cioè

$$u = u(r,\ t) \qquad \theta = \theta(r,\ t) \qquad q = q(r,\ t) \tag{3.1}$$

avendo indicato con u la componente radiale u_r di $\boldsymbol{u}$.

Il sistema di equazioni differenziali (2.1) assume di conseguenza la seguente forma

$$\begin{gathered} \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu_T \Big[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) - \frac{2u}{r^2}\Big] + \frac{\partial}{\partial r}\{[a(\lambda_T + \mu_T) - L]\, T_0\, \theta - q\} \\ \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}[(c + aL)\, T_0\, \theta - aq] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r}\Big) \qquad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u) = a T_0\, \theta \end{gathered} \tag{3.2}$$

dove si è tenuto conto della $(2.1)_3$ per ricavare le $(3.2)_{1,2}$.

4 - Posizione del problema nel caso in cui $a = 0$

Una ulteriore semplificazione delle (3.2) si ottiene supponendo che il coefficiente di dilatazione termica sia nullo, cioè con

$$a = 0\,. \tag{4.1}$$

Osserviamo che $a = 0$ non implica che il solido è indifferente alle variazioni di temperatura, perché a è la prima approssimazione della dilatazione nell'ambito cioè della termoelasticità linearizzata dei solidi in esame.

Le (3.2) si semplificano nel modo seguente

$$\begin{gathered} \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial r}(L T_0\, \theta + q) \\ \frac{c_0 T_0}{k}\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\theta) \qquad \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u) = 0 \end{gathered} \tag{4.2}$$

essendo nulla, in virtù della $(4.2)_3$ stessa, l'espressione a fattore di μ_T nella $(3.2)_1$ e per l'uguaglianza dei secondi membri nelle $(3.2)_2$ e $(4.2)_2$. In quest'ultima si è indicato con c_0 la determinazione di c per $a = 0$ $[5]_1$.

L'ipotesi (4.1) ha come conseguenza che le trasformazioni di C sono isocore ed inoltre che il problema termico è indipendente da quello dinamico, in quanto nella $(4.2)_2$ non compare più la funzione incognita q.

Indicando ora con R il raggio di una cavità con centro coincidente con l'origine del sistema di coordinate polari, si vuole studiare la propagazione di una particolare onda termoelastica nel solido C, che occupa la regione dello spazio con $r \geqq R$. A tale scopo imponiamo le seguenti condizioni al contorno sulla cavità sferica, cioè per $r = R$,

$$\theta(R,\ t) = \theta_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t) \qquad p(t) = p_0 \operatorname{sen}(\omega t) \tag{4.3}$$

dove p indica una pressione che agisce sulla superficie della cavità sferica, e le consuete condizioni di regolarità all'infinito, dove cioè il materiale resta indisturbato.

Con le (4.3) si è assegnata una variazione sinusoidale nel tempo sia per la temperatura che per la pressione sul contorno della cavità sferica, con ampiezze costanti θ_0 e p_0 e con pulsazioni ω_0 ed ω, che, pur essendo supposte diverse tra loro per l'indipendenza del problema termico da quello dinamico, possono ovviamente anche coincidere.

5 - Risoluzione del problema

Dalle equazioni $(4.2)_{2,3}$, ormai disaccoppiate, è possibile ricavare l'espressione della temperatura e quella dello spostamento indipendentemente. Con la preventiva risoluzione di queste due equazioni, la $(4.2)_1$ permette poi di calcolare la funzione incognita residua $q(r,\ t)$.

(a) *Problema dello spostamento*

Dalla $(4.2)_3$, integrando rispetto ad r, si ricava per u la seguente espressione

$$u(r,\ t) = \frac{G(t)}{r^2} \tag{5.1}$$

dove $G(t)$ è una funzione arbitraria del tempo, che verrà determinata in seguito con le condizioni al contorno imposte in 4.

(b) *Problema della temperatura*

Tale problema è regolato dalla $(4.2)_2$, alla quale si può dare la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\theta)=\frac{c_0 T_0}{k}\frac{\partial}{\partial t}(r\theta). \tag{5.2}$$

Da questa, ponendo

$$F(r,\ t)=r\theta(r,\ t) \tag{5.3}$$

si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}=\frac{c_0 T_0}{k}\frac{\partial F}{\partial t} \tag{5.4}$$

nella nuova funzione incognita $F(r,\ t)$.

Volendo studiare la propagazione ondosa corrispondente alla condizione al contorno $(4.3)_1$, che si può scrivere nel modo seguente

$$\theta(R,\ t)=\mathrm{Im}(\theta_0\exp[\mathrm{i}\omega_0 t]) \tag{5.5}$$

cerchiamo una soluzione della (5.4) avente la forma

$$F(r,\ t)=\mathrm{Im}(H(r)\exp[\mathrm{i}\omega_0 t]) \tag{5.6}$$

dove Im indica la parte immaginaria dell'espressione in parentesi tonde, i è l'unità immaginaria ed $H(r)$ è una funzione soltanto di r.

Omettendo il simbolo Im e sostituendo la (5.6) nella (5.4), dopo aver eliminato il fattore comune $\exp[\mathrm{i}\omega_0 t]$, si ricava l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}r^2}=\frac{c_0 T_0\omega_0}{k}\mathrm{i}H \tag{5.7}$$

nella funzione incognita ora introdotta. Posto

$$\alpha^2=\frac{c_0 T_0\omega_0}{k}\mathrm{i} \tag{5.8}$$

le soluzioni del polinomio caratteristico, associato all'equazione differenziale omogenea del secondo ordine (5.7), sono

$$\alpha_{1,2} = \pm \left(\frac{c_0 T_0 \omega_\theta}{2k}\right)^{\frac{1}{2}} (1+\mathrm{i}) \tag{5.9}$$

per cui la soluzione generale della (5.7) è

$$H(r) = A \exp[\alpha_1 r] + B \exp[\alpha_2 r] \tag{5.10}$$

con A e B costanti arbitrarie.

Di conseguenza la (5.6) assume la seguente forma

$$\begin{aligned} F(r,\ t) = \mathrm{Im}\{&\exp[\mathrm{i}\omega_\theta t]\,(A \exp[(\frac{c_0 T_0 \omega_\theta}{2k})^{\frac{1}{2}} (1+\mathrm{i})\, r] \\ &+ B \exp[-(\frac{c_0 T_0 \omega_\theta}{2k})^{\frac{1}{2}} (1+\mathrm{i})\, r])\}\,. \end{aligned} \tag{5.11}$$

L'andamento della temperatura, in virtù della (5.3), si ricava dividendo per r la (5.11). D'altra parte, per le condizioni di regolarità all'infinito delle soluzioni, anche la temperatura deve mantenersi finita per $r \to +\infty$, per cui si deve avere

$$A = 0 \tag{5.12}$$

e quindi si ricava

$$\theta(r,\ t) = \mathrm{Im}\{\frac{B}{r} \exp[-(\frac{c_0 T_0 \omega_\theta}{2k})^{\frac{1}{2}} r - \mathrm{i}\{(\frac{c_0 T_0 \omega_\theta}{2k})^{\frac{1}{2}} r - \omega_\theta t\}]\} \tag{5.13}$$

con la sola costante arbitraria B.

Tale costante, che si determina imponendo la condizione al contorno, nella forma data dalla (5.5), assume la seguente espressione

$$B = R\theta_0 \exp[(\frac{c_0 T_0 \omega_\theta}{2k})^{\frac{1}{2}} R(1+\mathrm{i})]\,. \tag{5.14}$$

Si ottiene infine la soluzione

$$\theta(r,\ t) = \theta_0 \frac{R}{r} \exp[-(\frac{c_0 T_0 \omega_\theta}{2k})^{\frac{1}{2}} (r-R)] \,\mathrm{sen}[\omega_\theta t - (\frac{c_0 T_0 \omega_\theta}{2k})^{\frac{1}{2}} (r-R)]\,. \tag{5.15}$$

Da questa segue che in un qualsiasi punto del corpo, cioè $\forall r \geqq R$, la temperatura è una funzione sinusoidale del tempo t, con la stessa pulsazione ω_0 della perturbazione termica assegnata per $r = R$, ma con una ampiezza minore di θ_0 e con un certo sfasamento, rispetto alla perturbazione sulla superficie della cavità. In particolare, l'ampiezza diminuisce all'aumentare di r, con legge esponenziale decrescente divisa anche per r, e tale variazione è tanto più forte quanto maggiore è la frequenza della temperatura sulla superficie della cavità; inoltre si ha un cambiamento di fase al variare di r, in quanto l'oscillazione della temperatura si risente nei punti di C con un ritardo proporzionale alla distanza polare $r - R$ dalla superficie della cavità e che diminuisce all'aumentare della frequenza. Questo fenomeno, noto in elettromagnetismo come «skin effect», spiega anche la propagazione nel sottosuolo delle variazioni diurne e stagionali della temperatura, a parte l'attenuazione dovuta al fattore $1/r$ che è presente nel nostro caso.

Si può dire anche che la (5.15) esprime una propagazione di onde armoniche progressive, che si attenuano con r, con una velocità

$$v = \left(\frac{2k\omega_0}{c_0 T_0}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.16}$$

il cui valore cresce all'aumentare della frequenza della perturbazione.

(c) *Determinazione di $q(r, t)$ e $u(r, t)$*

Resta ancora da esaminare la $(4.2)_1$, dalla quale si ricava l'espressione del parametro q che concorre a dare la parte isotropa del tensore degli sforzi. Infatti, tenendo conto della soluzione (5.1) dello spostamento, la $(4.2)_1$ diventa

$$\frac{\partial}{\partial r}(q + LT_0\theta) = -\frac{\rho_0}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}t^2} \tag{5.17}$$

e da questa, integrando rispetto ad r, si ottiene

$$q(r, t) = -LT_0\theta(r, t) + \frac{\rho_0}{r}\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}t^2} + E(t) \tag{5.18}$$

dove $\theta(r, t)$ è data dalla (5.15) ed $E(t)$ è una nuova funzione arbitraria di t.

Per determinare le due funzioni $G(t)$ ed $E(t)$ dobbiamo imporre le condizioni al contorno (per $r=R$ e $r \to +\infty$). A tale scopo riprendiamo in esame l'espressione del tensore degli sforzi (2.3), che, per la (4.1), assume la forma

$$t = -(q + LT_0\theta)\boldsymbol{1} + 2\mu_T \boldsymbol{e} \tag{5.19}$$

e che, nel riferimento polare prefissato, per l'ipotesi di simmetria sferica ammessa con le (3.1), ha solo tre componenti non nulle, cioè (v. (5.18), (5.1))

$$\begin{aligned} t_{rr}(r,\ t) &= -[q(r,\ t) + LT_0\theta(r,\ t)] + 2\mu_T\frac{\partial u(r,\ t)}{\partial r} \\ &= -\frac{\rho_0}{r}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}t^2} - 4\mu_T\frac{G(t)}{r^3} - E(t) \\ t_{\alpha\alpha}(r,\ t) \equiv t_{\varphi\varphi}(r,\ t) &= -[q(r,\ t) + LT_0\theta(r,\ t)] + 2\mu_T\frac{u(r,\ t)}{r} \\ &= -\frac{\rho_0}{r}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}t^2} + 2\mu_T\frac{G(t)}{r^3} - E(t)\,. \end{aligned} \tag{5.20}$$

In base alla $(4.3)_2$, si deve avere sulla superficie della cavità sferica in ogni istante

$$t_{rr}(R,\ t) = -p(t)\,; \tag{5.21}$$

imponendo inoltre la condizione di limitatezza del tensore degli sforzi $\boldsymbol{t}$ anche per $r \to +\infty$, si ricava che, per il nostro problema, nelle (5.20) e quindi nella (5.18) si ha

$$E(t) \equiv 0\,. \tag{5.22}$$

La (5.21), tenendo conto delle $(5.20)_1$ e (5.22), fornisce la seguente equazione differenziale ordinaria

$$\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}t^2} + \frac{4v_T^2}{R^2}G = \frac{Rp_0}{\rho_0}\operatorname{sen}(\omega t) \tag{5.23}$$

nella funzione incognita $G(t)$, avendo posto

$$v_T^2 = \frac{\mu_T}{\rho_0}. \tag{5.24}$$

Integrando la (5.23) nell'ipotesi che

$$\omega^2 \neq \frac{4v_T^2}{R^2} \tag{5.25}$$

si ricava

$$G(t) = C \operatorname{sen}(\frac{2v_T}{R}t + \xi) + \frac{R^3 p_0}{\rho_0(4v_T^2 - R^2\omega^2)} \operatorname{sen}(\omega t) \tag{5.26}$$

e di conseguenza (v. (5.1), (5.18) e (5.15))

$$\begin{aligned} u(r,\ t) &= \frac{1}{r^2}\{C \operatorname{sen}(\frac{2v_T}{R}t + \xi) + \frac{R^3 p_0}{\rho_0(4v_T^2 - R^2\omega^2)} \operatorname{sen}(\omega t)\} \\ q(r,\ t) &= -LT_0\theta_0\frac{R}{r}\exp[-(\frac{c_0T_0\omega_0}{2k})^{\frac{1}{2}}(r-R)]\operatorname{sen}[\omega_0 t - (\frac{c_0T_0\omega_0}{2k})^{\frac{1}{2}}(r-R)] \\ &\quad -\frac{\rho_0}{r}\{\frac{4v_T^2}{R^2}C \operatorname{sen}(\frac{2v_T}{R}t + \xi) + \frac{R^3\omega^2 p_0}{\rho_0(4v_T^2 - R^2\omega^2)} \operatorname{sen}(\omega t)\} \end{aligned} \tag{5.27}$$

dove C e ξ sono due costanti arbitrarie, da determinare in base ad eventuali condizioni iniziali.

Se invece si assegna ω tale che

$$\omega^2 = \frac{4v_T^2}{R^2} \tag{5.28}$$

la soluzione della (5.23) assume la seguente forma

$$G(t) = D \operatorname{sen}(\omega t + \delta) - \frac{Rp_0}{\rho_0}\frac{t}{2\omega}\cos(\omega t) \tag{5.29}$$

e quindi, sempre in base alle (5.1), (5.18) e (5.15), segue che

$$
(5.30)\quad
\begin{aligned}
u(r,\ t) &= \frac{1}{r^2}\{D\,\mathrm{sen}(\omega t+\delta)-\frac{Rp_0}{\rho_0}\frac{t}{2\omega}\cos(\omega t)\}\\
q(r,\ t) &= -LT_0\theta_0\frac{R}{r}\exp[-(\frac{c_0T_0\omega_0}{2k})^{\frac{1}{2}}(r-R)]\,\mathrm{sen}[\omega_0 t-(\frac{c_0T_0\omega_0}{2k})^{\frac{1}{2}}(r-R)]\\
&\quad+\frac{\rho_0\omega^2}{r}\{-D\,\mathrm{sen}(\omega t+\delta)+\frac{Rp_0}{\rho_0}[\frac{1}{\omega^2}\mathrm{sen}(\omega t)+\frac{t}{2\omega}\cos(\omega t)]\}
\end{aligned}
$$

con D e δ costanti arbitrarie.

Come si può notare, in entrambi i casi corrispondenti alle (5.25) e (5.28), le soluzioni per $\theta(r,\ t)$ ed $u(r,\ t)$, date dalle (5.15) e $(5.27)_1$ o $(5.30)_1$, sono completamente disaccoppiate a causa dell'indipendenza dei due problemi, termico e dinamico, ma entrambe concorrono a generare il tensore degli sforzi con la $(5.27)_2$ o $(5.30)_2$.

Per quanto riguarda lo spostamento si ha nel primo caso, caratterizzato dalla (5.25), la sovrapposizione di due moti armonici (v. $(5.27)_1$) con pulsazioni diverse, una delle quali coincide con quella della pressione sulla superficie della cavità sferica mentre l'altra è una pulsazione propria del sistema, caratteristica del materiale. Si ha pertanto una immediata propagazione nel solido dell'azione della pressione nella cavità, cui si sovrappone una seconda azione, che dipende dalla natura del materiale ed è eventualmente sfasata rispetto all'eccitazione superficiale. Le ampiezze delle due azioni si attenuano con il fattore $1/r^2$ che porta automaticamente alla limitatezza di $u(r,\ t)$ anche all'infinito.

Nel secondo caso, caratterizzato dalla condizione di risonanza espressa dalla (5.28), viene a modificarsi solo la precedente azione della pressione, espressa ora da una oscillazione forzata in quadratura con la pressione eccitatrice e la cui ampiezza cresce linearmente nel tempo.

Analoghe considerazioni valgono per $q(r,\ t)$, espressa nei due casi dalle $(5.27)_2$ e $(5.30)_2$.

Osserviamo infine che dalle (5.20) è possibile ricavare la differenza tra t_{rr} e $t_{\alpha\alpha}$ (o $t_{\phi\phi}\equiv t_{\alpha\alpha}$) in ogni punto del corpo; si ha $t_{\alpha\alpha}(r,\ t)-t_{rr}(r,\ t)=6\mu_T G(t)/r^3$ per ogni t e per ogni valore di r ed in particolare per $r=R$, cioè sulla superficie che delimita la cavità sferica.

Bibliografia

[1] G. AMENDOLA: [•]$_1$ *Una particolare soluzione della termoelasticità di solidi incomprimibili*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **36** (1988), 45-56; [•]$_2$ *Spherical waves in incompressible thermoelastic solids*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) 3-A (1989), 95-101.

[2] C. CATTANEO, *Sulla conduzione del calore*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 3 (1948), 83-101.

[3] G. GRIOLI: [•]$_1$ *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui* (Nota I), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Fis., Cl. Sci. Mat. Fis. Nat. (8) **67** (1979), 332-339; [•]$_2$ *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui* (Nota II), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Fis., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., (8) **67** (1979), 426-432.

[4] M. E. GURTIN, *The linear theory of elasticity*, in Handbuch der Physik, Band VIa/2, Berlin, 1972.

[5] T. MANACORDA: [•]$_1$ *Sulla termoelasticità dei solidi incomprimibili*, Riv. Mat. Univ. Parma, (2) **1** (1960), 149-170; [•]$_2$ *On heat propagation in solids*, Quad. Ist. Mat. Appl. «U. Dini», Fac. Ing., Pisa **7** (1982).

[6] A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite* (III): Solidi incomprimibili, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **39** (1955), 147-201.

Summary

In this Note we consider the effect of impressing a harmonic variation of the temperature and of a pressure on the surface of a spherical cavity in an infinite medium, thermoelastic and incompressible. The derived solution of the problem is examined also when the phenomenon of resonance occurs.

***