Riv. Mat. Univ. Parma (4) **16** (1990), 5-11

GIOVANNA REMORINI (*)

# Sul teorema di Kelvin in magnetofluidodinamica (**)

A TRISTANO MANACORDA per il suo 70° compleanno

## 1 - Introduzione

Per un fluido perfetto barotropico soggetto a forze di massa conservative, nell'ipotesi che tutti gli elementi del moto siano funzioni uniformi delle coordinate, sussiste il ben noto teorema di Kelvin il quale afferma che la circolazione lungo una qualsiasi linea materiale chiusa è costante nel tempo.

Tale proprietà e le sue conseguenze per i moti irrotazionali (teorema di Lagrange) e sui moti vorticosi (teoremi di Helmholtz) sono a fondamento di tutta l'idrodinamica non viscosa.

Sempre nell'ipotesi che le forze di massa siano conservative, il teorema di Kelvin sussiste per un fluido viscoso se e solo se questo ammette un potenziale di flessione (cfr. per esempio [12], pag. 93). Vari autori (cfr. per esempio [4]-[7], [9], [12]) si sono dedicati allo studio delle proprietà di tali moti che sono anche detti moti che conservano la circolazione.

Il teorema di Kelvin è di particolare importanza anche nell'ambito della magnetofluidodinamica (MFD) e vari autori (cfr. per esempio [1]-[3], [10], [11]) hanno studiato quando tale teorema sussiste ma, per quanto è a conoscenza dell'autrice, limitatamente al caso di un fluido *non viscoso*, dimostrando che condizione necessaria e sufficiente affinché ciò avvenga è che la forza magnetica sia conservativa.

---

(*) Indirizzo: Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale dell'Università di Pisa, via Diotisalvi 2, I-56100, Pisa.

(**) Ricevuto: 14-II-1989.

Scopo principale della presente nota è esaminare quando il teorema di Kelvin sussiste per un fluido *viscoso* elettroconduttore per il quale si tenga conto anche dell'effetto Hall; più specificamente in 2, data la condizione necessaria e sufficiente affinché ciò avvenga, si evidenziano alcune proprietà, conseguenze dell'equazione di Helmholtz cui necessariamente deve soddisfare il campo cinetico di un moto MFD che conserva la circolazione, riguardanti tre significative classi di moti: i moti MFD di Beltrami, i moti MFD per cerchi concentrici, una classe di moti MFD per i quali si ha l'effetto di «congelamento» sia delle linee vorticose che delle linee magnetiche.

In 3 si evidenzia il fatto che per un fluido viscoso elettroconduttore il teorema di Kelvin può sussistere sia se il campo magnetico è generatore di forza magnetica conservativa (ed in tal caso il campo cinetico ammette un potenziale di flessione come in idrodinamica) sia se è generatore di forza magnetica non conservativa, fornendo un'esemplificazione di tali moti MFD e mettendo in luce il ruolo significativo svolto dall'effetto Hall nel caso viscoso.

## 2 - Considerazioni generali

Le equazioni non lineari MFD (in unità di Gauss) per il fluido in esame sono

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 = \operatorname{grad}\left(U - \frac{p}{\rho}\right) - \nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{4\pi\mu\rho}\boldsymbol{B} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{B} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{v}) = \nu_m \nabla^2 \boldsymbol{B} + \beta \operatorname{rot}(\boldsymbol{B} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{B}) \tag{2.2}$$

$$0 = \operatorname{div} \boldsymbol{v} \tag{2.3}$$ $$0 = \operatorname{div} \boldsymbol{B} \tag{2.4}$$

essendo $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$, $\nu$ la viscosità cinematica (costante), $\nu_m$ il coefficiente di viscosità magnetica, $\beta = \beta_H c^2/4\pi\mu$ con $\beta_H$ coefficiente di Hall.

Considerando il rotore di ambo i membri della (2.1) si ottiene l'equazione di compatibilità

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}) = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{4\pi\mu\rho}\operatorname{rot}(\boldsymbol{B} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{B})\,. \tag{2.5}$$

Per brevità chiameremo moto MFD ogni soluzione solenoidale ($\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$) delle (2.2) e (2.5).

Detta $\Gamma$ la circolazione di $\boldsymbol{v}$ relativa a una linea chiusa materiale, si riconosce facilente che vale il seguente

Teorema di Kelvin (in MFD). *Condizione necessaria e sufficiente affinché per il fluido in esame sia* $\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}t = 0$ *è che risulti*

$$0 = \mathrm{rot}[\boldsymbol{B} \wedge \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}/4\pi\mu\rho] - \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{2.6}$$

*o equivalentemente*

$$0 = \mathrm{rot}[\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{grad}\,\boldsymbol{B}/4\pi\mu\rho - \nu\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega}]\,. \tag{2.7}$$

Chiameremo *moto* MFD *che conserva la circolazione* un moto MFD $(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{B})$ per cui valga il teorema di Kelvin in MFD.

Dalle (2.6) e (2.5) segue che, se sussiste il teorema di Kelvin in MFD, necessariamente il campo cinetico verifica la

$$0 = \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathrm{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}) \tag{2.8}$$

come nel caso idrodinamico (cfr. per esempio [12], pag. 87).

Valgono pertanto risultati analoghi a quelli idrodinamici che siano conseguenza della (2.8), per esempio:

(a) Un moto MFD di Beltrami ($\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v} = 0$) verifica il teorema di Kelvin se e solo se $\boldsymbol{v}$ è stazionario (nel caso idrodinamico cfr. per esempio [12], pag. 98, $[4]_3$).

(b) Un moto MFD per cerchi concentrici (detto anche *rotazione* MFD), $\boldsymbol{v} = v(r,\ z,\ t)\,\boldsymbol{e}_\theta$ (1), verifica il teorema di Kelvin (2) solo se $v = f(t)/r + h(r)$.

---

(1) Qui e nel seguito indicheremo con $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{K}$ i versori di una terna di coordinate cilindriche $r$, $\theta$, $z$.

(2) È noto che in idrodinamica un moto per cerchi concentrici è necessariamente piano (cioè $v = v(r,\ t)$) e nei casi non viscoso o viscoso stazionario conserva la circolazione.

In MFD esistono moti per cerchi concentrici non necessariamente piani (come per esempio se $\beta = 0$ il moto alla Chandrasekhar $\boldsymbol{v} = z(ar + b/r)\,\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{B} = \pm 2\sqrt{\pi\mu\rho}\,\boldsymbol{v}$) ma solo se il campo cinetico è piano, $v = v(r,\ t)$, può conservare la circolazione.

(c) Per un moto MFD stazionario che conserva la circolazione esistono superfici materiali che sono superfici di flusso e vorticose al tempo stesso (superfici di Lamb) (nel caso idrodinamico cfr. per esempio [12], pag. 134).

Si osservi che se $\nu_m = \beta = 0$ la (2.2) è analoga alla (2.8),pertanto in assenza di effetto Hall e per conducibilità elettrica infinita tra i moti MFD che conservano la circolazione vi sono moti del tipo $\boldsymbol{B} = A\boldsymbol{\omega}$ (3), come per esempio

$$\boldsymbol{v} = (ay^2 + by + d)\,\boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{B} = A(2ay + b)\,\boldsymbol{K}. \tag{2.9}$$

Dalle (2.7), ponendo $\nu = 0$, si riconosce in particolare che il teorema di Kelvin sussiste per un fluido incomprimibile elettroconduttore *non viscoso* soggetto a forze di massa conservative *se e solo se la forza magnetica è conservativa* (cfr. per esempio [1]).

Ciò accade in particolare per *ogni* moto MFD di Beltrami (stazionario) (4) e per le particolari rotazioni MFD $\boldsymbol{v} = (ar + b/r)\,\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{B} = (Ar + D/r)\,\boldsymbol{e}_\theta$.

Si osservi infine che i moti MFD che conservano la circolazione non sono mai influenzati dall'effetto Hall nel caso non viscoso, mentre possono esserlo nel caso viscoso.

In 3 esamineremo il caso di un fluido MFD viscoso, trascurando il caso non viscoso (noto in letteratura).

## 3 - Caso viscoso

Per un fluido viscoso soggetto a forze di massa conservative in idrodinamica sussiste il teorema di Kelvin se e solo se il moto ammette un *potenziale di flessione* ($\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0$).

In MFD nel caso viscoso dalla (2.6) si riconosce che se il campo magnetico è force-free o generatore di forza magnetica conservativa sussiste il teorema di

(3) Si osservi che per tali moti si ha un effetto di congelamento sia delle linee vorticose (cfr. per esempio [9], pag. 152) sia delle linee magnetiche (cfr. per esempio [2], pag. 19).

(4) Si noti che per $\nu = 0$ l'insieme dei moti MFD di Beltrami stazionari non è vuoto, per esempio è un moto MFD possibile per $\nu = \nu_m = 0$

$$\boldsymbol{v} = (a_1 \cos \alpha z + a_2 \operatorname{sen} \alpha z)\,\boldsymbol{i} + (a_2 \cos \alpha z - a_1 \operatorname{sen} \alpha z)\,\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{B} = A\boldsymbol{v}$$

con $\operatorname{grad} A \cdot \boldsymbol{v} = 0$ ed $a_1$, $a_2$, $\alpha$ costanti arbitrarie.

Kelvin solo se $\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0$; viceversa per i moti MFD che ammettono potenziale di flessione sussiste il teorema di Kelvin solo se la forza magnetica è conservativa o nulla.

Si riconosce facilmente che il teorema di Kelvin sussiste:

*per ogni moto* MFD *universale* (5), come per esempio per il moto MFD (di Hill)

$$\boldsymbol{v} = -2Arz\boldsymbol{e}_r - (2Aa^2 - 4Ar^2 - 2Az^2)\boldsymbol{K} \qquad \boldsymbol{B} = Dr\,\boldsymbol{e}_\theta + B_0\boldsymbol{K} \tag{3.1}$$

*e se* $\nu_m = 0$ *e* $\beta \neq 0$ *per ogni moto alla Chandrasekhar* (6) *stazionario;*

*per ogni rotazione rigida* MFD $\boldsymbol{v} = ar\boldsymbol{e}_\theta$ (non necessariamente universale), come per esempio se $\nu_m = 0$

$$\boldsymbol{v} = ar\,\boldsymbol{e}_\theta \qquad \boldsymbol{B} = B_\theta(r)\,\boldsymbol{e}_\theta + B_0\boldsymbol{K}. \tag{3.2}$$

Si osservi che esistono moti MFD che ammettono un potenziale di flessione ma per i quali non sussiste il teorema di Kelvin, come per esempio per $\beta = 0$ il moto alla Chandrasekhar (6)

$$\boldsymbol{v} = \frac{az + b}{r}\boldsymbol{e}_r \qquad \boldsymbol{B} = \pm 2\sqrt{\pi\mu\rho}\,\boldsymbol{v}. \tag{3.3}$$

Se la forza magnetica non è conservativa, il teorema di Kelvin è ammesso per i moti MFD con $\nabla^2 \boldsymbol{\omega} \neq 0$ che verificano la (2.6).

Si riconosce che il teorema di Kelvin con forza magnetica non conservativa sussiste:

per un moto MFD piano (7) (stazionario o non) *solo in assenza di effetto Hall,*

---

(5) Per la nozione di moto MFD universale ed un'ampia esemplificazione di tali moti MFD cfr. per esempio $[8]_1$.

(6) Si riconosce con facili calcoli che nel caso stazionario i moti allineati $\boldsymbol{B} = \lambda\boldsymbol{v}$ con $\lambda$ costante verificano il teorema di Kelvin solo se la forza magnetica è conservativa; in particolare dei moti alla Chandrasekhar nel caso stazionario solo gli universali verificano il teorema di Kelvin e se $\nu_m = 0$ e $\beta \neq 0$ ogni moto alla Chandrasekhar stazionario è universale e quindi verifica il teorema di Kelvin.

(7) Moto MFD piano è un moto $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B})$ del tipo $\boldsymbol{v} = v_x(x, y, t)\boldsymbol{i} + v_y(x, y, t)\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{B} = B_x(x, y, t)\boldsymbol{i} + B_y(x, y, t)\boldsymbol{j}$.

come per esempio per il moto MFD ($\beta = 0$)

$$(3.4) \qquad \boldsymbol{v} = a e^{\alpha x} \boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{B} = A\boldsymbol{i} + (D + Cx - \frac{Aa}{\nu_m \alpha} e^{\alpha x})\boldsymbol{j} \qquad A^2 = 4\pi\mu\rho\nu\nu_m \alpha^2 ;$$

per un moto MFD assialsimmetrico (8) (stazionario o non) *solo in assenza di effetto di Hall;*

per un moto alla Chandrasekhar *solo nel caso non stazionario*, con $\nu_m$ e $\beta$ non contemporaneamente nulli (9);

per la rotazione (viscosa) MFD

$$(3.5) \qquad \boldsymbol{v} = ar^3 \boldsymbol{e}_\theta , \qquad \boldsymbol{B} = \frac{A}{r}\boldsymbol{e}_r + (Cr + \frac{D}{r} - \frac{aA}{4\nu_m})\boldsymbol{e}_\theta + (B_0 - 16\pi\mu\rho\frac{\nu}{\nu_m} a\beta r^2)\boldsymbol{K}$$

con $A^2 = 32\pi\mu\rho\nu\nu_m$.

Si osservi infine che per i moti di Beltrami (stazionari) viscosi sussiste il teorema di Kelvin solo se la forza magnetica non è conservativa, in quanto dalle relazioni puramente cinematiche si ha (cfr. $[4]_3$) che per un moto di Beltrami stazionario necessariamente è $\nabla^2 \boldsymbol{\omega} \neq 0$.

## Bibliografia

[1] C. AGOSTINELLI: $[\bullet]_1$ *Su alcuni moti magneto idrodinamici ai quali è applicabile la teoria di Helmholtz sui vortici*, Rend. Sem. Mat. Torino **16** (1956-57), 393-412; $[\bullet]_2$ *Sui moti vorticosi in magnetofluidodinamica*, Atti Simposio sulla Magnetofluidinamica, Bari 10-14 Gennaio 1961, 137-148.

[2] V. C. A. FERRARO and C. PLUMPTON, *An introduction to magneto-fluid mechanics*, Oxford University Press, 1966.

[3] W. F. HUGHES and F. J. YOUNG, *The electromagnetodynamics of fluids*, Wiley, New York, 1966.

---

(8) Moto MFD assialsimmetrico è un moto $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B})$ del tipo $\boldsymbol{v} = v_r(r, z, t)\boldsymbol{e}_r + v_z(r, z, t)\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{B} = B_r(r, z, t)\boldsymbol{e}_r + B_z(r, z, t)\boldsymbol{K}$.

(9) Per $\nu \neq 0$ e $\nu_m = \beta = 0$ sono possibili solo moti alla Chandrasekhar stazionari e quindi il teorema di Kelvin è ammesso solo per forza magnetica conservativa (cfr. nota (6)).

[4] A. W. MARRIS: [•]$_1$ *Steady rotationally-symmetric circulation-preserving motions of a viscous fluid*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **108** (1974), 489-510; [•]$_2$ *Steady isochoric circulation-preserving motions whose stream-lines are plane geodesics on the Lamb surfaces*, Arch. Ration. Mech. Anal. **54** (1974), 238-256; [•]$_3$ *The impossibility of steady screw motions of a Navier-Stokes fluid*, Arch. Ration. Mech. Anal. **70** (1979), 47-60; [•]$_4$ *On circulation-preserving motions with lamellar vorticity*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) **33** (1982), 124-131; [•]$_5$ *On motions with constant speed and stream-line parameters*, Arch. Rat. Mech. Anal. **90** (1985), 1-14.

[5] A. W. MARRIS and M. G. ASWANI, *On the general impossibility of controllable axi-symmetric Navier-Stokes motions*, Arch. Ration. Mech. Anal. **63** (1977), 107-153.

[6] A. W. MARRIS and W. L. YIN, *On circulation-preserving complex-lamellar motions with steady stream-lines*, Arch. Ration. Mech. Anal. **82** (1983), 109-115.

[7] D. MIHALAS and B. MIHALAS, *Foundations of radiation hydrodynamics*, Oxford University Press, 1984.

[8] G. REMORINI: [•]$_1$ *Sui moti universali in magneto-fluidodinamica*, Note Mat. II (1982), n. 2, 189-212; [•]$_2$ *Sull'integrale di Bernoulli in magnetofluidodinamica*, Ann. Mat. Univ. Ferrara Sez. VII Sc. Mat. **36** (1988), 121-134.

[9] J. SERRIN, *Mathematical principes of classical fluid mechanics*, Handbuch der Physik, VIII/1 (1959), Berlin-Göttingen-Heidelberg Springer.

[10] J. A. SHERCLIFF, *A textbook of magnetohydrodynamics*, Pergamon Press, 1965.

[11] W. B. THOMPSON, *An introduction to plasma physics*, Pergamon Press, 1962.

[12] C. TRUESDELL, *The kinematics of vorticity*, Indiana University Press, Bloomington, 1954.

[13] W. L. YIN, *Circulation-preserving plane flow of incompressible viscous fluids*, Arch. Ration. Mech. Anal. **83** (1983), 169-184.


## Summary

*The sufficient and necessary condition is provided so that Kelvin's theorem for an incompressible, viscous electroconductor fluid holds also taking Hall's effect into account. Examples are given of significants* MFD *circulation-preserving motions in presence of conservative or non conservative magnetic forces.*

***