Riv. Mat. Univ. Parma (4) **15*** (1989), 41-61

BIANCA MANFREDI (*)

Su la pluriderivazione di Antonio Mambriani (**)

Introduzione

«Assegnate n funzioni $X_1 = X_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, X_n = X_n(x_1, \ldots, x_n)$ *delle n variabili indipendenti* $x_1, \ldots, x_n$*, resta individuato l'operatore* $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{x_1, \ldots, x_n} = X_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + X_n \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ *alle derivate (parziali, certamente se* $n > 1$*) del primo ordine, lineare e omogeneo. Intendo mostrare che agli operatori aventi la forma di* $\mathcal{D}$ *spetta un posto fondamentale nell'Analisi. Chiamo brevemente «pluriderivatori» tali operatori e «pluriderivazione» la corrispondente operazione.*

Si constatano facilmente i seguenti due fatti di rilievo: 1°) *Le regole di pluriderivazione sono quelle stesse della derivazione.* 2°) *Combinando linearmente, con coefficienti funzioni delle variabili* $x_1, \ldots, x_n$*, un numero finito di pluriderivatori con queste variabili, si ottiene ancora un pluriderivatore con tali variabili.*

Ne segue che, nello spazio delle n variabili $x_1, \ldots, x_n$*, se ai derivatori* $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ *e ai corrispondenti «antiderivatori»* $(\dfrac{\partial}{\partial x_1})^{-1}, \ldots, (\dfrac{\partial}{\partial x_n})^{-1}$ *si associano gli infiniti possibili pluriderivatori* $\mathcal{D}$ *e gli eventuali loro inversi («antipluriderivatori»), l'ordinario Calcolo differenziale e integrale viene ad ampliarsi e a potenziarsi, dando luogo ad un più generale «Calcolo pluriderivazionale e antipluriderivazionale» che mi sembra importante di trattare.»*

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università di Parma, via Massimo D'Azeglio 85/A, I-43100, Parma.

(**) Lavoro eseguito con i fondi del 40%.

Così si esprimeva nel lontano 1955 Antonio Mambriani nella sua Memoria *La pluriderivazione e una classificazione delle equazioni differenziali* [5].

Così con una esposizione sintetica, che vuole illustrare i notevoli risultati della Memoria, e con una semplice estensione ai pluriderivatori del secondo ordine di alcune classiche equazioni della Fisica Matematica, mi è grato ricordare il MAESTRO con il riproporre una ricerca da Lui particolarmente sentita, proprio quella che è stata l'inizio della mia attività scientifica e della mia collaborazione nel tempo con Antonio Mambriani.

1 - La pluriderivazione di Antonio Mambriani

In un dominio $\mathcal{B} \in \mathrm{R}^n$ siano assegnate $n\,(n > 1)$ funzioni $X_i(x)$, con $i = 1, \dots, n$ e $x = (x_1, \dots, x_n)$, finite e continue in $\mathcal{B}$ insieme alle loro derivate parziali prime. L'operatore

$$(1) \qquad \mathcal{D} = \sum_1^n X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

è detto in [5] *pluriderivatore* e *pluderivazione* la corrispondente operazione interessante le funzioni differenziabili di R^n.

Nell'ipotesi che una funzione $X_i(x)$, ad esempio $X_1(x)$, sia $\neq 0$ per ogni $x \in \mathcal{B}$, il sistema differenziale ordinario

$$(2) \qquad \frac{dx_k}{dx_1} = \frac{X_k(x)}{X_1(x)} \qquad k = 2, \dots, n$$

possiede [8] un sistema di integrali (chiamato in [5] *sistema completo di generatrici di $\mathcal{D}$ relative a x_1*)

$$(3) \qquad x_k = \gamma_k(x_1;\ c_2, \dots, c_n) \qquad k = 2, \dots, n$$

invertibile nel *sistema completo di costanti pluriderivazionali relative a x_1* (v. [5], p. 326)

$$(4) \qquad c_k = \omega_k(x_1,\ x_2, \dots, x_n) \qquad k = 2, \dots, n.$$

Allora il pluriderivatore $\mathcal{D}$ è atto a una decomposizione ([6], [5]) della forma

$$(5) \qquad \mathcal{D} = X_1(x)\, \mathcal{S}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{S}$$

ove $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}^{-1}$ sono due sostituzioni, una inversa dell'altra, che mutano x_k $(k = 2, \ldots, n)$ nelle funzioni $\gamma_k(x)$ e $\omega_k(x)$ rispettivamente, mentre la sottolineatura frecciata indica l'ordine, da destra a sinistra, delle operazioni da eseguirsi. Precisamente, essendo

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{matrix} x_2 & \ldots & x_n \\ \gamma_2(x) & \ldots & \gamma_n(x) \end{matrix} \right\} \qquad \mathcal{S}^{-1} = \left\{ \begin{matrix} x_2 & \ldots & x_n \\ \omega_2(x) & \ldots & \omega_n(x) \end{matrix} \right\} \tag{6}$$

la (5) afferma che il pluriderivatore $\mathcal{D}$ può scomporsi nel prodotto delle quattro operazioni elementari seguenti:

(i) una sostituzione completa $\mathcal{S}$ di generatrici di $\mathcal{D}$ relative ad x_1;

(ii) la derivazione rispetto alla variabile x_1;

(iii) la sostituzione $\mathcal{S}^{-1}$ inversa di $\mathcal{S}$;

(iv) la moltiplicazione per il primo coefficiente $X_1(x)$ di $\mathcal{D}$.

Per convalidare la (5) basta verificare che per una funzione $z(x)$ differenziabile in $\mathcal{B}$ vale l'identità $\mathcal{D}z(x) \equiv X_1(x)\underleftarrow{\mathcal{S}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{S}}\, z(x)$, ove $\mathcal{D}$ ha l'espressione (1).

Osservazioni. I - Qualunque sia il numero delle variabili indipendenti, nell'operatore $\underleftarrow{\mathcal{S}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{S}}$ di (5) figura una sola derivata parziale, che qui si è convenuto essere la derivata parziale rispetto a x_1. D'altra parte se applichiamo questo operatore a una funzione differenziabile $f(x)$ si ottiene

$$\underleftarrow{\mathcal{S}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{S}}\, f(x) = \underleftarrow{\mathcal{S}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1}}\, f(x_1, \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x)).$$

Ora, poichè $f(x_1, \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x))$ è una funzione composta rispetto ad x_1, la derivata parziale $\partial/\partial x_1$ agendo su $f(x_1, \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x))$ fa intervenire effettivamente le derivate parziali di $f(x)$ rispetto a tutti i suoi argomenti. Per questa ragione in [5] l'operatore $\underleftarrow{\mathcal{S}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{S}}$ è detto *derivatore plurimo rispetto a* x_1. In virtù di (5) si può allora affermare: qualunque sia il numero delle variabili indipendenti, un pluriderivatore $\mathcal{D}$ è il prodotto ordinato di un derivatore plurimo rispetto a una sola delle variabili indipendenti, per il coefficiente di $\mathcal{D}$ relativo alla variabile indipendente scelta.

II - Sempre a conferma della generalità dell'algoritmo di [5] si sottolinea che per il pluriderivatore $\mathcal{D}$ esistono infiniti sistemi completi di generatrici relative ad x_1, e quindi infiniti sistemi completi di costanti pluriderivazionali rispetto ad x_1. Ad ogni sistema completo di generatrici relative a x_1 deve associarsi un sistema completo di costanti pluriderivazionali relative a x_1 in modo che le corrispondenti sostituzioni $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}^{-1}$ siano una inversa dell'altra.

III - Si osserva che $X_1(x) \equiv \underleftarrow{\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}}\, X_1(x)$ e che, pertanto, la (5) può scriversi nella forma

$$(5)' \qquad \underleftarrow{\mathcal{S}^{-1} X_1(x_1;\ \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x)) \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{S}}\,.$$

Nel caso particolare $X_1(x) = 1$, la (5)' si riduce al derivatore plurimo rispetto a x_1. A questo caso semplice è utile ricondursi quando si ha da risolvere l'equazione a derivate parziali non omogenea $\mathcal{D}z(x) = \varphi(x)$ con $\varphi(x)$ assegnata funzione continua (1).

IV - L'iterata di ordine m (m intero positivo) del pluriderivatore $\mathcal{D}$ ha l'epressione

$$(7) \qquad \mathcal{D} = \underleftarrow{\mathcal{S}^{-1} [X_1(x_1;\ \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x)) \frac{\partial}{\partial x_1}\ ]^m \mathcal{S}} \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

V - Detta $\mathrm{A}(x)$ una funzione continua in $\mathcal{B}$, *l'operatore differenziale non omogeneo* $\mathcal{D} + \mathrm{A}(x)$ *è pure decomponibile in un prodotto di operazioni elementari.* Precisamente, indicata con $\bar{\psi}(x)$ una particolare funzione tale che $\mathcal{D}\bar{\psi}(x) = \mathrm{A}(x)$ (2)

(1) Basta invero dividere ambo i membri dell'equazione per la funzione $X_1(x)$ che abbiamo convenuto essere $\neq 0$ nel dominio $\mathcal{B}$.

(2) Ad esempio, per $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}$ ed $\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} x_i^m$ si ha $\bar{\psi} = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1}$, supposto m intero positivo.

si ha

$$\mathcal{D} + \mathrm{A} = \mathrm{e}^{-\bar{\psi}}\mathcal{D}\,\mathrm{e}^{\bar{\psi}}. \tag{8}$$

Invero, quando si tenga presente che le regole della pluriderivazione sono le stesse della derivazione ordinaria (v. Introduzione), l'operatore a secondo membro di (8) applicato ad una funzione differenziabile $z(x)$, dà successivamente

$$\mathrm{e}^{-\bar{\psi}}\mathcal{D}\,\mathrm{e}^{\bar{\psi}} z = \mathrm{e}^{-\bar{\psi}}[\mathcal{D}(\mathrm{e}^{\bar{\psi}} z)] = \mathrm{e}^{-\bar{\psi}}[(\mathcal{D}\,\mathrm{e}^{\bar{\psi}})\, z + \mathrm{e}^{\bar{\psi}}\mathcal{D}z] = \mathrm{e}^{-\bar{\psi}}[e^{\bar{\psi}}\mathrm{A}z + \mathrm{e}^{\bar{\psi}}\mathcal{D}z] = [\mathrm{A} + \mathcal{D}]\, z.$$

Esempio. Sia $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{n} a(x_i)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, con $a(x_1) \neq 0\ \forall x_1 \in \mathcal{B}$, un pluriderivatore i cui coefficienti sono tali che l'integrale $b(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \dfrac{1}{a(t)}\,\mathrm{d}t$ ammette la funzione inversa che indico con $\bar{b}(\xi)$. Dalla (2) segue

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{a(x_k)} = \frac{\mathrm{d}x_1}{a(x_1)} \qquad k = 2, 3, \dots, n \qquad \text{e quindi}$$

$$b(x_1) - b(x_k) = b(c_k) \Rightarrow c_k = \bar{b}(b(x_1) - b(x_k)) \Rightarrow x_k = \bar{b}(b(x_1) - b(x_k)) \tag{9}$$

ove $k = 2, 3, \dots, n$. Da (3) e (4) discende $\omega_k(x) = \bar{b}(b(x_1) - b(x_k))$, $\gamma_k = \bar{b}(b(x_1) - b(x_k))$ con $k = 2, 3, \dots, n$. Pertanto, le sostituzioni $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}^{-1}$ date da (6) risultano eguali, essendo precisamente

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1} = \left\{ \begin{matrix} x_2 & \cdots & x_n \\ \bar{b}(b(x_1) - b(x_2)) & \cdots & \bar{b}(b(x_1) - b(x_n)) \end{matrix} \right\}$$

e il pluriderivatore dato si decompone nel prodotto seguente

$$\mathcal{D} = a(x_1)\,\mathcal{S}^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1}\,\mathcal{S}. \tag{10}$$

Casi particolari. (α): $a(x_i) = 1$ per $i = 1, \dots, n$. La (10) diventa

$$(10)_\alpha \qquad \mathcal{D} = \underleftarrow{\mathcal{S}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{S}} \qquad \text{con} \quad \mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1} = \left\{ \begin{matrix} x_2 & \dots & x_n \\ x_1 - x_2 & \dots & x_1 - x_n \end{matrix} \right\}.$$

(β): $a(x_i) = x_i$ con $x_i \neq 0$ in $\mathcal{B}$ per $i = 1, 2, \dots, n$. Allora si ha

$$(10)_\beta \qquad \mathcal{D} = \underleftarrow{x_1 \mathcal{S}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{S}} \qquad \text{con} \quad \mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1} = \left\{ \begin{matrix} x_2 & \dots & x_n \\ x_1/x_2 & \dots & x_1/x_n \end{matrix} \right\}.$$

(γ): $a(x_i) = x_i^2$ con $x_i \neq 0$ in $\mathcal{B}$ per $i = 1, 2, \dots, n$. Allora si ha

$$(10)_\gamma \qquad \mathcal{D} = \underleftarrow{x_1^2 \mathcal{S}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{S}} \qquad \text{con} \quad \mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1} = \left\{ \begin{matrix} x_2 & \dots & x_n \\ 1/(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}) & \dots & 1/(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n}) \end{matrix} \right\}.$$

2 - La antipluriderivazione di Antonio Mambriani

2.1 - L'operatore inverso $\mathcal{D}^{-1}$, se esiste, di un pluriderivatore $\mathcal{D}$ è detto *anti-pluriderivatore* e *antipluriderivazione secondo* $\mathcal{D}^{-1}$ o, brevemente, $\mathcal{D}^{-1}$*-anti-pluriderivazione*, la corrispondente operazione interessante le funzioni continue di $\mathbb{R}^n$. Così, fra due funzioni di $\mathbb{R}^n$ $f(x)$ differenziabile e $F(x)$ continua, vale la relazione

$$\mathcal{D} f(x) = F(x) \Leftrightarrow f(x) = \mathcal{D}^{-1} F(x) = \mathcal{D}^{-1}\text{–}\textit{antipluriderivata di } F(x).$$

Si osserva che avendosi $\mathcal{D} x_i = X_i(x)$ per $i = 1, \dots, n$, le variabili indipendenti possono interpretarsi come le $\mathcal{D}^{-1}$–antipluriderivate dei coefficienti di $\mathcal{D}$.

In virtù di (5) valgono le seguenti affermazioni:

(i) Un pluriderivatore se decomponibile in un prodotto di operazioni elementari invertibili è invertibile.

(ii) Nelle ipotesi ammesse in **1**, $\mathcal{D}$ è invertibile e l'antipluriderivatore $\mathcal{D}^{-1}$ si decompone nel prodotto ordinato di operazioni elementari invertibili secondo la seguente epressione

$$\text{(11)} \qquad \underleftarrow{\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{S}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1} \mathcal{S} X_1^{-1}(x)}$$

ove l'antiderivatore $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1}$ va inteso in tutta la sua generalità.

Ad esempio, il pluriderivatore $\mathcal{D} = \sum\limits_{i=q}^{n} a(x_i) \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ (con $a(x_1) \neq 0 \ \forall x_1 \in \mathcal{B}$), essendo decomponibile secondo la (10), è invertibile e il suo $\mathcal{D}^{-1}$ ha l'epressione

$$\underleftarrow{\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{S}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1} \mathcal{S}(1/a(x_1))} \qquad \text{con} \quad \mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1}\left\{\begin{matrix} x_2 & \cdots & x_n \\ \bar{b}(b(x_1) - b(x_2)) & \cdots & \bar{b}(b(x_1) - b(x_n)) \end{matrix}\right\}.$$

Osservazioni. I - L'operatore $\underleftarrow{\mathcal{S}^{-1}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1} \mathcal{S}}$ è l'inverso del derivatore plurimo rispetto a x_1 dato da $\underleftarrow{\mathcal{S}^{-1} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{S}}$ (v. Osservazione I di **1**) ed avendo come parte antiderivazionale solo $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1}$ viene chiamato *antiderivatore plurimo rispetto ad* x_1. Da (11) segue allora che un antipluriderivatore, qualunque sia il numero delle variabili indipendenti, è il prodotto di una funzione di queste variabili per un antiderivatore plurimo rispetto a una di tali variabili.

II. - La (11) può scriversi in virtù di (5)'

$$\text{(11)}' \qquad \underleftarrow{\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{S}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1} X_1^{-1}(x_1;\ \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x)) \mathcal{S}}\,.$$

III. - L'iterata di ordine $m > 0$ di $\mathcal{D}^{-1}$ ha l'epressione

$$\text{(12)} \qquad \underleftarrow{\mathcal{D}^{-m} = \mathcal{S}^{-1}\left[X_1(x_1;\ \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x)) \frac{\partial}{\partial x_1}\right]^{-m} \mathcal{S}} \qquad m = 1,\ 2, \ldots$$

ottenuta da (7) mutando ivi m in $-m$. Riunendo le relazioni (7) e (12) si ottiene

$$\mathcal{D}^{\mu} = \underleftarrow{\mathcal{S}^{-1}[X_1(x_1;\ \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x)) \frac{\partial}{\partial x_1}\ ]^{\mu}\mathcal{S}} \qquad \mu = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

2.2 - *Costanti $\mathcal{D}$-pluriderivazionali e variabili $\mathcal{D}$-pluriderivazionali indipendenti.* L'applicazione di (11)$'$ a una funzione $F(x)$ continua in $\mathcal{B}$ porta alla relazione

$$\mathcal{D}^{-1}F(x) = \underleftarrow{S^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_1})^{-1}} \frac{F(x_1;\ \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x))}{X_1(x_1;\ \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x))} \tag{14}$$

ove l'antiderivatore $(\frac{\partial}{\partial x_1})^{-1}$ va inteso in tutta la sua generalità. Ora se si indica con $(\frac{\partial}{\partial x_1})_*^{-1}$ una particolare determinazione di $(\frac{\partial}{\partial x_1})^{-1}$, definita a meno di una *arbitraria funzione Ω costante rispetto ad x_1*, dalla (14) segue

$$\mathcal{D}^{-1}F(x) = \underleftarrow{\mathcal{S}^{-1}}[(\frac{\partial}{\partial x_1})_*^{-1} \frac{F(x_1;\ \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x))}{X_1(x_1;\ \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x))} + \Omega(x_2, \ldots, x_n)]$$

ed anche, ricordando l'espressione di $\mathcal{S}^{-1}$ data da $(6)_2$

$$\mathcal{D}^{-1}F(x) = \underleftarrow{\mathcal{S}^{-1}}[(\frac{\partial}{\partial x_1})_*^{-1} \frac{F(x_1;\ \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x))}{X_1(x_1;\ \gamma_2(n), \ldots, \gamma_n(x))}] + \Omega(\omega_2(x), \ldots, \omega_n(x)). \tag{15}$$

In particolare per $F(x) \equiv 0$ in $\mathcal{B}$, la (15) dà

$$\mathcal{D}^{-1}0 = \Omega(\omega_2(x), \ldots, \omega_n(x)) \Rightarrow \mathcal{D}\Omega(\omega_2(x), \ldots, \omega_n(x)) = 0. \tag{16}$$

Si osserva che per $n = 1$ si ha $\mathcal{D} \equiv D \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ onde, per $(16)_2$, è $\Omega =$ costante. Questa analogia con il Calcolo differenziale ordinario induce a chiamare *costanti pluriderivazionali per $\mathcal{D}$ le arbitrarie funzioni $\Omega(\omega_2(n), \ldots, \omega_n(x))$ derivabili nei loro $n-1$ argomenti $\omega_2, \ldots, \omega_n$ e soddisfacenti alla* $(16)_2$ o, brevemente, *costanti $\mathcal{D}$-pluriderivazionali.*

Se in (15) $F(x) \equiv 1$ in $\mathcal{B}$, risulta

$$\mathcal{D}^{-1} 1 = \underleftarrow{S}^{-1}[(\frac{\partial}{\partial x_1})_*^{-1} X_1^{-1}(x_1;\ \gamma_2(x), \dots, \gamma_n(x))] + \Omega(\omega_2(x), \dots, \omega_n(x))$$

ed anche

$$\mathcal{D}^{-1} 1 = (x)_{\mathcal{D}} + \Omega(\omega_2(x), \dots, \omega_n(x)) \qquad \text{con} \tag{17}$$

$$(x)_{\mathcal{D}} = \underleftarrow{S}^{-1}[(\frac{\partial}{\partial x_1})_*^{-1} X_1^{-1}(x_1;\ \gamma_2(x), \dots, \gamma_n(x))]. \tag{18}$$

Ora, per $n = 1$ e $X_1 = 1$, risulta $(x)_{\mathcal{D}} = x$ e la (17) si riduce alla relazione del Calcolo differenziale ordinario

$$(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^{-1} 1 = x + c.$$

Il confronto di questa relazione con la (17) porta a definire la funzione $(x)_{\mathcal{D}}$ *variabile pluriderivazionale indipendente per* $\mathcal{D}$ *(relativamente a* x_1*)* o, brevemente, *variabile* $\mathcal{D}$*-pluriderivazionale indipendente.*

L. Tanzi Cattabianchi in [9] generalizza le precedenti definizioni chiamando:

(i) *Costante pluriderivazione per* $\mathcal{D}$ *ogni funzione* $\Omega(x)$, $x \in \mathrm{R}^n$, *tale che* $\mathcal{D}\Omega(x) = 0$.

(ii) *Variabile pluriderivazione per* $\mathcal{D}$ *ogni funzione* $\psi(x)$, $x \in \mathrm{R}^n$, *tale* $\mathcal{D}\psi(x) = 1$.

Esempio. Per il pluriderivatore $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{n} a(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ con $a(x_1) \neq 0$ $\forall x_1 \in \mathcal{B}$ (già considerato a p. 45) le costanti $\mathcal{D}$-pluriderivazionali e le variabili $\mathcal{D}$-pluriderivazionali indipendenti hanno le seguenti epressioni:

per $a(x_i) = 1$	$i = 1, 2, \dots, n$	$(\Omega)_{\mathcal{D}} = \Omega(x_1 - x_2, \dots, x_1 - x_n)$	$(x)_{\mathcal{D}} = x_1$
per $a(x_i) = x_i$	$i = 1, 2, \dots, n$	$(\Omega)_{\mathcal{D}} = \Omega(x_1/x_2, \dots, x_1/x_n)$	$(x)_{\mathcal{D}} = \lg \lvert x_1 \rvert$
per $a(x_i) = x_i^2$	$i = 1, 2, \dots, n$	$(\Omega)_{\mathcal{D}} = \Omega(1/x_1, \dots, 1/x_n)$	$(x)_{\mathcal{D}} = -1/x_1$.

Osservazione. Analoghe espressioni si ottengono per $(\Omega)_{\mathcal{D}}$ e $(x)_{\mathcal{D}}$ quando si considera un $\mathcal{D}$ relativo (anzichè a x_1) a una qualunque delle altre variabili $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

3 - Applicazioni

3.1 - *Risoluzione di equazioni a variabile separate.* Con questa denominazione in [5] vengono definite le equazioni a derivate parziali del primo ordine riconducibili alla forma seguente

$$\mathcal{D}z(x) = \frac{f(x)}{g(z(x);\ \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x))} \qquad x \in \mathrm{R}^n \tag{19}$$

ove: $\mathcal{D}$ ha l'espressione (1), $z(x)$ è la funzione incognita, $f(x)$ è una data funzione continua, $g(z(x);\ \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x))$ è una data funzione continua rispetto a z e derivabile, con derivate continue, rispetto agli argomenti $\omega_k(x)$, $k = 2, \ldots, n$, formanti un sistema completo di costanti $\mathcal{D}$-pluriderivazionali relative a x_1.

Detta $G_*(z(x);\ \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x)) = \int_* g(z(x);\ \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x))\, dz$ una particolare determinazione dell'integrale indefinito e ricordando che le regole di pluriderivazione sono quelle stesse della derivazione del Calcolo ordinario, si ha (per la regola di derivazione delle funzioni composte)

$$\mathcal{D}G_*(z;\ \omega_2, \ldots, \omega_n) = g(z;\ \omega_2, \ldots, \omega_n)\mathcal{D}z + \sum_{k=2}^{n} [(\int_* \frac{\partial g(z;\ \omega_2, \ldots, \omega_n)}{\partial \omega_k}\, dz)\mathcal{D}\omega_k].$$

Ora per $k = 2, 3, \ldots, n$ è $\mathcal{D}\omega_k = 0$ essendo ω_k una costante $\mathcal{D}$-pluriderivazionale; pertanto $\mathcal{D}G_* = g\mathcal{D}z$ onde da (19) segue

$$\mathcal{D}G_*(z(x);\ \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x)) = f(x) \qquad \text{da cui} \tag{19'}$$

$$G_*(z(x);\ \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x)) = \mathcal{D}^{-1} f(x) \tag{20}$$

e questa relazione rappresenta l'integrale generale della equazione a variabili separate.

Osservazione. È interessante sottolineare che per $n = 1$ la (20) coincide con la relazione che dà l'integrale generale delle equazioni del primo ordine a variabile separate del Calcolo differenziale ordinario.

Esempio. Sia da risolvere l'equazione

$$(21) \qquad \frac{\mathcal{D}z}{z^2+\beta^2(x)} = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \mathcal{D} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad x_i \neq 0 \qquad x_i \in \mathcal{B} \ (i=1,\dots,n)$$

essendo $\beta^2(x)$ una data funzione degli argomenti x_1/x_k, $k=2,\ 3,\dots,n$. Si osserva che l'insieme $\{x_1/x_k,\ k=2,\ 3,\dots,n\}$ costituisce un sistema completo di costanti $\mathcal{D}$-pluriderivazionali relative a x_1, onde la funzione $\beta^2(x)$ risulta una costante $\mathcal{D}$-pluriderivazionale relativa a x_1. Pertanto la (21) è un'equazione del tipo (19) ed inoltre il suo primo membro può scriversi nella forma $\frac{1}{\beta}\mathcal{D}\operatorname{arctg} z/\beta$. Il secondo membro di (21), essendo $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}x_i = \mathcal{D}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (con $\mathcal{D}$ dato da $(21)_2$), può scriversi nella forma $\mathcal{D}\sum_{i=1}^{n} x_i$, onde dalla (21) segue

$$\mathcal{D}\operatorname{arctg} z/\beta = \beta(x)\mathcal{D}[\sum_{i=1}^{n} x_i] = \mathcal{D}[\beta(x)\sum_{i=1}^{n} x_i]$$

e quindi

$$\operatorname{arctg} z/\beta = \beta(x)\sum_{i=1}^{n} x_i + \Omega(x_1/x_2,\dots,x_1/x_n)$$

con Ω simbolo di funzione arbitraria. Esplicitando z si ottiene

$$z(x) = \beta(x)\operatorname{tg}[\beta(x)\sum_{i=1}^{n} x_i + \Omega(x_1/x_2,\dots,x_1/x_n)]$$

e questo è l'integrale generale dell'equazione (21).

Osservazione. In analogia con il Calcolo differenziale ordinario G. Battioni in [2] definisce *equazione a derivate parziali omogenea* (*o equazione di Gabriele Manfredi*) la seguente equazione della forma (o riconducibile ad essa)

$$\mathcal{D}z = f(x/(x)_{\mathcal{D}})$$

o più in generale della forma

$$(22) \qquad \mathcal{D}z = f(z/(x)_{\mathcal{D}};\ k_1,\ k_2,\dots,k_n)$$

dove: $\mathcal{D}$ ha l'epressione (1); f è una data funzione continua; $(x)_{\mathcal{D}}$ è una variabile $\mathcal{D}$-pluriderivazionale indipendente; $k_j(x)$ con $j=1,\ 2,\dots,n$ sono delle costanti $\mathcal{D}$-pluriderivazionali. Posto $Z = z/(x)_{\mathcal{D}}$, la (22) si riconduce all'equazione a variabili separate

$$\mathcal{D}Z = \frac{f(Z,\ k_1,\ k_2, \ldots, k_n)}{(x)_{\mathcal{D}}}$$

da cui

$$Z = \int_* \frac{dZ}{f(z;\ k_1,\ k_2, \ldots, k_n)} - \lg |(x)_{\mathcal{D}}| + \Omega(x)$$

dove $\Omega(x)$ è un'arbitraria costante pluriderivazionale per $\mathcal{D}$.

3.1 - *Equazioni lineari.* Per definizione [5] queste equazioni sono della forma (o riconducibile ad essa)

$$(\mathcal{D} + \mathrm{A}(x))\, z(x) = f(x) \qquad x \in \mathcal{B} \tag{23}$$

avendo $\mathcal{D}$ l'epressione (1) ed essendo $\mathrm{A}(x)$ e $f(x)$ assegnate funzioni continue in $\mathcal{B}$.

Ora, tenendo presente la (8) si ha

$$\mathcal{D} + \mathrm{A}(x) = \underleftarrow{e^{-\bar{\psi}(x)}\ \mathcal{D}\, e^{\bar{\psi}(x)}}$$

indicando $\bar{\psi}(x)$ una particolare funzione derivabile tale che $\mathcal{D}\bar{\psi} = \mathrm{A}(x)$.

La (23) può scriversi allora nella forma

$$\underleftarrow{e^{-\bar{\psi}}\ \mathcal{D}\, e^{\bar{\psi}(x)}}\ z(x) = f(x) \qquad \text{da cui} \tag{23$'$}$$

$$z(x) = \underleftarrow{e^{-\bar{\psi}(x)}\ \mathcal{D}^{-1}\ e^{\bar{\psi}(x)}}\ f(x)$$

ed anche, indicando $\mathcal{D}_*^{-1}$ una particolare determinazione di $\mathcal{D}^{-1}$ e $\Omega(\omega_2(x), \ldots, \omega_n(x))$ una qualunque $\mathcal{D}$-costante pluriderivazionale (relativamente a x_1),

$$z(x) = e^{-\bar{\psi}(x)}\ [\underleftarrow{\mathcal{D}_*^{-1}\ e^{\psi(x)}}\ f(x) + \Omega(\omega_2(x), \ldots, \omega_n(x))]. \tag{24}$$

La relazione (24) definisce l'integrale generale di (23) che ricordando la (11) può scriversi nella forma

$$(24)' \qquad z(x) = e^{-\bar{\psi}(x)}\,[\underleftarrow{\mathcal{S}^{-1}\,(\frac{\partial}{\partial x_1})_*^{-1}\,\mathcal{S} X_1^{-1}(z)\,e^{\bar{\psi}(x)}}\,f(x) + \Omega(\omega_2(x), \dots, \omega_n(x))].$$

Esempio. Sia da risolvere l'equazione lineare

$$(25) \qquad \mathcal{D}z = z + e^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \qquad \mathcal{D} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Volendo applicare (24)' osservo che in questo caso si ha: $X_1 = X_1^{-1} = 1$; per (8) $\bar{\psi}(x) = -x_1$; $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1} = \{ \begin{matrix} x_2 & \dots & x_n \\ x_1 - x_2 & \dots & x_1 - x_n \end{matrix} \}$ (v. $(10)_\alpha$, p. 46); $\omega_k = x_1 - x_k$ $(k = 2, 3, \dots, n)$; $f(x) = e^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$. Pertanto da (24)' segue [3]

$$z(x) = \frac{1}{n-1}\,e^{\sum_{i=1}^{n} x_i} + e^{x_1}\,\Omega(x_1 - x_2, \dots, x_1 - x_n)$$

relazione che definisce l'integrale generale di (25).

Osservazione. In analogia con il Calcolo differenziale ordinario, le equazioni a derivate parziali della forma

$$\mathcal{D}z + \mathrm{A}(x)\,z = f(x)\,z^m \qquad x \in \mathcal{B} \qquad m \neq 0,\ 1$$

sono chiamate in [5] *equazioni a derivate parziali di primo ordine e di Bernoulli.* Con il cambiamento di variabile $Z = z^{1-m}$ le equazioni (26) si riconducono a equazioni a derivate parziali lineari.

[3] Invero

$$\underleftarrow{e^{x_1}\,\mathcal{S}^{-1}\,(\frac{\partial}{\partial x_1})_*^{-1}\,\mathcal{S}}\,e^{-x_1}\,e^{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \underleftarrow{e^{x_1}\,\mathcal{S}^{-1}\,(\frac{\partial}{\partial x_1})_*^{-1}}\,e^{(x_1 - x_2) + \dots + (x_1 - x_n)}$$

$$= \underleftarrow{e^{x_1}\,\mathcal{S}^{-1}\,(\frac{\partial}{\partial x_1})_*^{-1}}\,e^{(n-1)x_1 - (x_2 + \dots + x_n)}$$

$$= \underleftarrow{e^{x_1}\,\mathcal{S}^{-1}}\,\frac{1}{n-1}\,e^{(n-1)x_1 - (x_2 + \dots + x_n)} = \frac{1}{n-1}\,e^{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Il metodo della pluriderivazione per la ricerca dell'integrale generale di alcune classiche equazioni a derivate parziali del secondo ordine della Fisica Matematica

1 - Nell'intento di mostrare come la pluriderivazione possa portare all'integrale generale di alcune equazioni a derivate parziali del secondo ordine interessanti questioni fisico-matematiche, esamino, per semplicità, il *pluriderivatore in due variabili indipendenti x e y, del secondo ordine e a coefficienti costanti*

$$\mathcal{L} = a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2a_{13}\frac{\partial}{\partial x} + 2a_{23}\frac{\partial}{\partial y} + a_{33} \tag{1}$$

ove $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

Come è noto al pluriderivatore $\mathcal{L}$ corrisponde biunivocamente la funzione razionale intera

$$\mathcal{P}(X, Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}X + 2a_{23}Y + a_{33}$$

che è decomponibile nel prodotto di due polinomi distinti di primo grado quando, e sol quando, è nullo il determinante $A = |a_{ij}|$ e non tutti nulli i determinanti A_{ij} del secondo ordine appartenenti ad A. Esistono allora due terne di costanti α_i e β_i $(i = 1, 2, 3)$ tali che

$$\mathcal{P}(X, Y) = (\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3)(\beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3)$$

e, in corrispondenza, sarà

$$\mathcal{L} = \left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3\right)\left(\beta_1\frac{\partial}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial}{\partial y} + \beta_3\right). \tag{2}$$

Ne segue l'affermazione: *Se e solo se è nullo il determinante $A = |a_{ij}|$ e non tutti nulli i suoi minori del secondo ordine, il pluriderivatore $\mathcal{L}$ dato da* (1) *è decomponibile nel prodotto di due pluriderivatori del primo ordine, distinti, lineari, non omogenei e a coefficienti costanti*

$$\mathcal{D}_1 = \alpha_1\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \qquad \mathcal{D}_2 = \beta_1\frac{\partial}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial}{\partial y} + \beta_3$$

ciascuno dei quali è a sua volta decomponibile nel prodotto di operazioni elementari tutte invertibili.

Nel caso in cui sono tutti nulli i determinanti del secondo ordine appartenenti a A, esiste una terna di costanti α, β, γ tale che

$$\mathcal{P}(X,\ Y) = (\alpha X + \beta Y + \gamma)^2 \rightarrow \mathcal{L} = (\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma)^2$$

essendo $\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma$ *decomponibile nel prodotto di operazioni elementari tutte invertibili* (4).

2 - Al pluriderivatore del secondo ordine iperbolico

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{3}$$

con a costante positiva, corrisponde un determinante A nullo e non tutti nulli i suoi minori del secondo ordine. In virtù della precedente affermazione di **1**, il pluriderivatore (3) è decomponibile nel prodotto di due distinti pluriderivatori del primo ordine. Precisamente

$$\mathcal{L} = \mathcal{D}_{\mathrm{I}} \cdot \mathcal{D}_{\mathrm{II}} \qquad \mathcal{D}_{\mathrm{I}} = \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y} \qquad \mathcal{D}_{\mathrm{II}} = \frac{\partial}{\partial x} - a \frac{\partial}{\partial y}\,. \tag{3$'$}$$

Applichiamo ora a $\mathcal{D}_{\mathrm{I}}$ e a $\mathcal{D}_{\mathrm{II}}$ la decomposizione (5)′ (v. p. 44), osservando che qui $X_1 \equiv 1$,

$$\mathcal{D}_{\mathrm{I}} = \underleftarrow{\mathcal{S}_{\mathrm{I}}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{S}_{\mathrm{I}}} \qquad \mathcal{S}_{\mathrm{I}} = \left\{ {y \atop y + ax} \right\} \quad \mathcal{S}_{\mathrm{I}}^{-1} = \left\{ {y \atop y - ax} \right\}$$

$$\mathcal{D}_{\mathrm{II}} = \underleftarrow{\mathcal{S}_{\mathrm{II}}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{S}_{\mathrm{II}}} \qquad \mathcal{S}_{\mathrm{II}} = \left\{ {y \atop y - ax} \right\} \quad \mathcal{S}_{\mathrm{II}}^{-1} = \left\{ {y \atop y + ax} \right\}.$$

Ne segue

$$\mathcal{L} = \underleftarrow{[\mathcal{S}_{\mathrm{I}}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{S}_{\mathrm{I}}]\,[\mathcal{S}_{\mathrm{II}}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{S}_{\mathrm{II}}]} \tag{4}$$

(4) Un'affermazione analoga vale anche per un pluriderivatore del secondo ordine, a coefficienti costanti, in tre variabili indipendenti.

cioè $\mathcal{L}$ si decompone nel prodotto di operazioni elementari tutte invertibili: esiste pertanto il suo antipluriderivatore $\mathcal{L}^{-1}$ che risulta anch'esso prodotto di operazioni elementari (v. (i) e (ii) di p. 46)

$$(5)\qquad \mathcal{L}^{-1} = \mathcal{D}_{\mathrm{II}}^{-1}\,\mathcal{D}_{\mathrm{I}}^{-1} \qquad \mathcal{D}_{\mathrm{I}}^{-1} = \underleftarrow{\mathcal{S}_{\mathrm{I}}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1}\mathcal{S}_{\mathrm{I}}} \qquad \mathcal{D}_{\mathrm{II}}^{-1} = \underleftarrow{\mathcal{S}_{\mathrm{II}}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1}\mathcal{S}_{\mathrm{II}}}$$

ove $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1}$ va inteso in tutta la sua generalità.

La (5) permette di individuare *l'integrale generale della equazione di d'Alenbert o equazione della corda vibrante*

$$\mathcal{L}\,z(xy) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - a^2\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) z(x,\ y) = 0 .$$

Invero per $(5)_1$

$$z(x, y) = \underleftarrow{\mathcal{L}^{-1}}\,0 \equiv \underleftarrow{\mathcal{D}_{\mathrm{II}}^{-1}\cdot\mathcal{D}_{\mathrm{I}}^{-1}}\,0$$

da cui, ricordando la $(16)_1$ (di p. 48),

$$z(x, y) = \underleftarrow{\mathcal{D}_{\mathrm{II}}^{-1}}\,\Omega_1(y - ax)$$

ove Ω_1 è il simbolo di funzione arbitraria derivabile almeno due volte nel suo argomento. Tenendo presente l'espressione di $\mathcal{D}_{\mathrm{II}}^{-1}$ data da $(5)_3$ si ha

$$z(x,\ y) = \underleftarrow{\mathcal{S}_{\mathrm{II}}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1}\mathcal{S}_{\mathrm{II}}}\,\Omega_1(y - ax) = \underleftarrow{\mathcal{S}_{\mathrm{II}}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1}}\,\Omega_1(y - 2ax)$$

ed anche per l'arbitrarietà di Ω_1

$$z(x,\ y) = \underleftarrow{\mathcal{S}_{\mathrm{II}}^{-1}}\,[\Omega_1(y - 2ax) + \Omega_2(y)]$$

con Ω_2 simbolo di funzione arbitraria derivabile almeno due volte nel suo argomento. Si ottiene così

$$z(x, y) = \Omega_1(y - ax) + \Omega_2(y + ax) \tag{6}$$

cioè, il ben noto *integrale di d'Alembert*: in assenza di forze esterne la piccola vibrazione $z(x, y)$ di una corda (elastica, omogenea, inestendibile) intorno alla sua configurazione rettilinea di equilibrio è, in ogni istante x, data dalla sopprapposizione dell'onda progressiva Ω_1 e dell'onda regressiva Ω_2.

3 - Al pluriderivatore del secondo ordine ellittico

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{7}$$

con $a > 0$, corrisponde il determinante A nullo e non tutti nulli sono i suoi determinanti del secondo ordine. Pertanto il pluriderivatore $\mathcal{L}$ dato da (3) è decomponibile nel prodotto di due distinti pluriderivatori del primo ordine, avendosi precisamente

$$\mathcal{L} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + ai \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - ai \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

con i unità immaginaria.

Si può procedere analogamente al caso **2** per la ricerca dell'*integrale generale della equazione di Poisson o equazione del potenziale*

$$\mathcal{L}z(x, y) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) z(x, y) = 0$$

supposta $z(x, y)$ funzione analitica. Si osserva però che questo integrale si deduce direttamente da (6) pensando ivi le funzioni arbitrarie Ω_1 e Ω_2 funzioni analitiche rispettivamente delle variabili coniugate $\xi = y - aix$, $\bar{\xi} = y + aix$.

4 - Al pluriderivatore del secondo órdine parabolico

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b \frac{\partial}{\partial y} \tag{8}$$

con b costante positiva corrisponde un determinante A *non* nullo e pertanto, in virtù dell'affermazione di **1** (v. p. 54), il pluriderivatore $\mathcal{L}$ dato da (8) non è decomponibile nel prodotto di due pluriderivatori del primo ordine.

5 - Al pluriderivatore del secondo ordine iperbolico

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + p \frac{\partial}{\partial x} + q \tag{9}$$

con a costante positiva (condizione di iperbolicità di $\mathcal{L}$) e con i parametri p e q non negativi, corrisponde un determinante A *nullo (essendo non tutti nulli i suoi minori del secondo ordine) quando e sol quando vale la relazione*

$$q = \frac{p^2}{4}\,. \tag{10}$$

Osservo subito che poichè per $p = q = 0$ l'operatore $\mathcal{L}$ coincide con quello già considerato in **2**, e poichè, per (10), p (o q) nullo implica q (o p) nullo, qui si considereranno i parametri p e q entrambi positivi. Quando si tenga presente l'affermazione di **1**, risulta: *se, e solo se, vale* (10), *il pluriderivatore* $\mathcal{L}$ *dato da* (9) *è decomponibile nel prodotto di due pluriderivatori del primo ordine.*

Risulta infatti, in virtù di (10),

$$\mathcal{L} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{p}{2}\right)^2 - a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y} + \frac{p}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - a \frac{\partial}{\partial y} + \frac{p}{2}\right). \tag{11}$$

Ora, in virtù della (8) di p. 45, e della definizione dei pluriderivatori $\mathcal{D}_{\mathrm{I}}$ e $\mathcal{D}_{\mathrm{II}}$ (v. p. 55), si ha

$$\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y} + \frac{p}{2} = \underleftarrow{e^{-\frac{p}{2}x}\, \mathcal{D}_{\mathrm{I}}\, e^{\frac{p}{2}x}} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial x} - a \frac{\partial}{\partial y} + \frac{p}{2} = \underleftarrow{e^{-\frac{p}{2}x}\, \mathcal{D}_{\mathrm{II}}\, e^{\frac{p}{2}x}}$$

da cui per l'identità $(11)_2$ è

$$\mathcal{L} = \underleftarrow{[e^{-\frac{p}{2}x}\, \mathcal{D}_{\mathrm{I}}\, e^{\frac{p}{2}x}]\cdot[e^{-\frac{p}{2}x}\, \mathcal{D}_{\mathrm{II}}\, e^{\frac{p}{2}x}]} = \underleftarrow{e^{-\frac{p}{2}x}\, \mathcal{D}_{\mathrm{I}}\, \mathcal{D}_{\mathrm{II}}\, e^{\frac{p}{2}x}}\,. \tag{12}$$

Il pluriderivatore $\mathcal{L}$ risulta così prodotto di operazioni tutte invertibili: esiste allora il suo antipluriderivatore $\mathcal{L}^{-1}$ e questo ha l'espressione

$$\mathcal{L}^{-1} = \underleftarrow{e^{-\frac{p}{2}x}\, \mathcal{D}_{\mathrm{II}}^{-1}\, \mathcal{D}_{\mathrm{I}}^{-1}\, e^{\frac{p}{2}x}} \tag{13}$$

ove $\mathcal{D}_{\mathrm{I}}^{-1}$ e $\mathcal{D}_{\mathrm{II}}^{-1}$ sono dati rispettivamente da $(5)_2$ e $(5)_3$.

La (13) permette di individuare l'*integrale generale della equazione* che chiamerò *quasi-generalizzata della corda vibrante*: a differenza del caso trattato in 2, la corda qui oscilla in presenza della resistenza del mezzo (supposta proporzionale alla velocità del punto variabile sulla corda, con p fattore di proporzionalità) e della forza elastica di richiamo (supposta proporzionale allo spostamento del punto variabile nella corda, con q fattore di proporzionalità), *essendo i parametri p e q legati dalla condizione* (10).

Indicato con $z(x, y)$ lo spostamento dall'asse y del punto variabile $P(y)$ sulla corda e supposta trascurabile la forza di massa agente su $P(y)$, si dimostra (v. [1], vol. 2, p. 526) che $z(x, y)$ deve soddisfare l'equazione

$$\mathcal{L} z = 0 \qquad \text{con } \mathcal{L} \text{ epresso dalla (9).} \tag{14}$$

Ne segue $z(x, y) = \mathcal{L}^{-1} 0$ cioè per (13)

$$z(x, y) = \underleftarrow{e^{-\frac{p}{2}x}\, \mathcal{D}_{\mathrm{II}}^{-1}\, \mathcal{D}_{\mathrm{I}}^{-1}\, e^{\frac{p}{2}x}}\, 0 = \underleftarrow{e^{-\frac{p}{2}x}\, \mathcal{D}_{\mathrm{II}}^{-1}\, \mathcal{D}_{\mathrm{I}}^{-1}}\, 0 . \tag{15}$$

Ripetendo qui il procedimento usato in 2 per ottenere l'integrale di d'Alembert, si ottiene

$$z(x, y) = e^{-\frac{p}{2}x} \{\Omega_1(y - ax) + \Omega_2(y + ax)\} \tag{16}$$

che rappresenta l'integrale generale della equazione (14).

Il confronto di (16) con (6) porta ad affermare: se vale la condizione (10) l'effetto della presenza di una resistenza del mezzo e di una forza elastica di richiamo si traduce in uno smorzamento, di tipo esponenziale, dell'onda progressiva $\Omega_1(g - ax)$ e dell'onda regressiva $\Omega_2(y + ax)$ che caratterizzano la vibrazione della corda non sollecitata da forze esterne.

Osservazioni. I - *L'equazione dei telegrafi* è data da Courant in [4] (v. pp. 192, 193) nella forma

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + (\alpha + \beta) u_t + \alpha\beta\, u = 0 \tag{17}$$

ove: u indica la corrente come funzione del tempo e della posizione x lungo il cavo; c, α, β sono costanti positive (5). Il Courant prova che nel cavo *non* si manifesta il «fenomeno della distorsione ondosa» *se, e solo se,* vale la condizione $\alpha = \beta$; di conseguenza ogni soluzione di (17) si esprime come sovrapposizione di un'onda progressiva e di un'onda regressiva entrambe smorzate esponenzialmente nel tempo (con eguale parametro di smorzamento) e «non distorte». Viene poi sottolineato che l'assenza del fenomeno di distorsione è di rilevante interesse in telegrafia per la trasmissione di segnali lungo il cavo.

Ora, se si confronta la (17) con la (9), una opportuna interpretazione delle variabili e dei parametri che vi figurano, fa concludere che: le due equazioni differenziali coincidono formalmente; la condizione data da Courant si può esprimere nella forma (10); ogni soluzione di (16) ha l'epressione (6). Ciò a conforto del metodo della pluriderivazione per i derivatori del secondo ordine a coefficienti costanti.

II - La ricerca dell'integrale generale di equazioni a derivate parziali con coefficienti *non costanti,* interessanti questioni di aerodinamica (quali ad esempio l'equazione di Eulero-Poisson e l'equazione di Tricomi) sarà oggetto di un mio prossimo lavoro nell'ambito della pluriderivazione.

III - Luigi Merli in [7] si avvale della pluriderivazione nel provare l'esistenza e l'unicità, in convenienti ipotesi, della soluzione di un problema di Cauchy retto dall'equazione semilineare $\mathcal{D}z = f(x, z)$. L'estensione al caso $\mathcal{L}z = f(x, z)$, $\mathcal{L}$ pluriderivatore del secondo ordine, sarà oggetto di un mio prossimo studio.

---

(5) Le costanti c, α e β sono legate alle caratteristiche del cavo dalle relazioni

$$c^2 = \frac{1}{LC} \qquad \alpha = \frac{G}{C} \qquad \beta = \frac{R}{L}$$

indicando C la capacità, L l'induttanza, G la conduttanza, R la resistenza.

Bibliografia

[1] L. AMERIO, *Analisi Matematica con elementi di Analisi Funzionale*, vol. II-vol. III (pt. I e pt. II), Utet, Torino, 1977-1981, 1982.

[2] G. BATTIONI, *Equazioni alle derivate parziali, di primo ordine e omogenee*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 2 (1961), 47-52.

[3] S. CALAFIORE, *Dipendenza lineare e wronskiani nell'ambito della pluriderivazione*, Riv. Mat. Univ. Parma 8 (1957), 93-98.

[4] R. COURANT and D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, vol. II, Interscience Pubbishers, N. Y., 1962.

[5] A. MAMBRIANI, *La pluriderivazione e una classificazione delle equazioni differenziali*, Riv. Mat. Univ. Parma **6** (1955), 321-348.

[6] B. MANFREDI: $[\bullet]_1$ *Decomposizione in prodotto di operazioni elementari delle espressioni alle derivate parziali, del primo ordine e totalmente lineari*, Boll. Un. Mat. Ital. (3), 4 (1949), 381-390; $[\bullet]_2$ *Su la risoluzione delle equazioni alle derivate parziali del second'ordine, lineari e a coefficienti costanti*, Riv. Mat. Univ. Parma, 3 (1952), 91-95; $[\bullet]_3$ *Su la genesi dei pluriderivatori*, Boll. Un. Mat. Ital. (3), **11** (1956), 538-543.

[7] B. L. MERLI: $[\bullet]_1$ *Esistenza e unicità degli integrali di un'equazione alle derivate parziali della forma* $X_1(x_1, \dots, x_n) \dfrac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n) \dfrac{\partial z}{\partial x_n} = f(x_1, \dots, x_n, z)$, Annali Mat. Pura e Appl. (4) **46** (1958), 97-107; $[\bullet]_2$ *Sul problema di Cauchy relativo alle equazioni alle derivate parziali del primo ordine di tipo semilineare*, Annali Mat. Pura e Appl. (4) **59** (1962), 229-238.

[8] G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, N. Zanichelli, Bologna, 1948.

[9] L. TANZI CATTABIANCHI, *Su le costanti pluriderivazionali e su le variabili pluriderivazionali indipendenti*, Riv. Mat. Univ. Parma, 8 (1957), 215-228.

* * *