Riv. Mat. Univ. Parma (4) **15*** (1989), 35-40

TRISTANO MANACORDA (*)

Una osservazione al riguardo della propagazione per onde del calore

Alla memoria di ANTONIO MAMBRIANI

1 - Quaranta anni fa, Carlo Cattaneo propose, in un seminario tenuto a Roma [2], una soluzione dell'annoso problema della propagazione con velocità finita delle variazioni di temperatura in un materiale indeformabile termicamente isotropo. Si trattava, in sostanza, di chiarire un paradosso perché, accettando l'equazione classica di Fourier della propagazione del calore, si perviene al risultato irrealistico che le onde termiche hanno velocità infinita. La questione era stata già segnalata da Stefan [10], e poi ripresa da Maxwell [7] il quale, tuttavia, si era limitato ad osservare che la contraddizione si poteva superare con la teoria cinetica. Cattaneo, individuato nella forma della equazione costitutiva per il flusso di calore il punto critico del problema, fu il primo ad ottenere, con procedimento che faceva riferimento alla teoria cinetica dei gas e con metodo rigoroso, una nuova equazione costitutiva che permetteva di eliminare il paradosso di una propagazione istantanea delle perturbazioni. La nuova equazione costitutiva, ormai universalmente nota come equazione di Maxwell-Cattaneo, è

$$\dot{\boldsymbol{q}} + \sigma \boldsymbol{q} = k \operatorname{grad} \theta \tag{1.1}$$

ove σ e k sono costanti positive, $\boldsymbol{q}$ è il vettore di propagazione termica, θ è la temperatura.

Purtroppo, la deduzione di Cattaneo non era del tutto rigorosa, come fu subito osservato da Kaliski [6]. Da allora, i tentativi di giustificare con tutto

(*) Indirizzo: Istituto di Matematiche Applicate «U. Dini», Facoltà di Ingegneria, Università degli Studi, via Bonanno 25b, I-56100, Pisa.

rigore la (1.1) si sono moltiplicati. Rimando, per una bibliografia esauriente, a [3] e alla memoria, che ho potuto conoscere sotto forma di manoscritto preparatorio, di Preziosi e Joseph [9]. A mio parere, la dimostrazione più soddisfacente è ancora quella di Gurtin e Pipkin [5] nella quale, tuttavia, l'ipotesi fondamentale appare più un artificio matematico che la traduzione di una proprietà fisica non considerata in precedenza. Devo anche citare sull'argomento gli acuti lavori di Grioli [4] e di Bressan [1].

Una deduzione diversa della equazione di Maxwell-Cattaneo è stata fatta da I. Müller [8] nell'ambito di una teoria più generale, la termodinamica estesa. Müller, rovesciando il punto di vista tradizionale, interpreta il vettore $\boldsymbol{q}$ come una quantità costitutiva, obbediente ad una nuova equazione di bilancio.

Nella presente nota, senza la pretesa di fornire una soluzione definitiva del problema, lo si affronta da un punto di vista diverso da quello tradizionale, che sembra più aderente alla genesi fisica del medesimo, riprendendo, in fondo, l'idea originaria di Cattaneo. La formulazione è sempre macroscopica e si riferisce a solidi indeformabili. In un certo senso, viene provato che, se si desidera che la propagazione del calore avvenga con velocità finita, l'equazione costitutiva per $\boldsymbol{q}$ deve essere, almeno approssimativamente, del tipo (1.1). Il procedimento è semplicissimo, ed è questa una delle ragioni che hanno motivato la presente nota.

2 - Sia C un continuo indeformabile, termicamente isotropo, di cui x e y sono due punti qualunque. Si ammette che esista una funzione vettoriale $\boldsymbol{\omega}(x, y)$ ed una costante positiva c tale che il vettore di propagazione termica $\boldsymbol{q}$ in x all'istante t è dato da

$$\boldsymbol{q}(x, t) = \int_C \boldsymbol{\omega}(x, y, t - \frac{r}{c})\,\mathrm{d}v(y) \tag{2.1}$$

essendo $r = |x - y|$. In altri termini, la forma di $\boldsymbol{q}$ in x nell'istante t è precisata dalla conoscenza di $\boldsymbol{\omega}$ in tutti i punti y di C nell'istante precedente $t - \frac{r}{c}$. È evidente la parentela di questa ipotesi con la teoria di Cattaneo.

Dalla (2.1) subito si osserva che, se $\boldsymbol{\omega}$ è sufficientemente regolare, si ha

$$\dot{\boldsymbol{q}}(x, t) = \int_C \boldsymbol{\omega}_\xi(x, y, t - \frac{r}{c})\,\mathrm{d}v(y) \tag{2.2}$$

ove $\xi = t - \frac{r}{c}$.

Se addirittura $\boldsymbol{\omega}$ è una funzione analitica di ξ, è

$$\boldsymbol{\omega}(x,\ y,\ t-\frac{r}{c})=\boldsymbol{\omega}(x,\ y,\ t-\frac{r}{c})|_{r=0}-\boldsymbol{\omega}_{\xi}(x,\ y,\ t-\frac{r}{c})|_{r=0}(\frac{r}{c})+O(\frac{r^2}{c^2}) \tag{2.3}$$

ossia

$$\boldsymbol{\omega}(x,\ y,\ t-\frac{r}{c})=\boldsymbol{\omega}(x,\ x,\ t)-\boldsymbol{\omega}_{\xi}(x,\ x,\ t)(\frac{r}{c})+O(\frac{r^2}{c^2}) \tag{2.4}$$

e, analogamente,

$$\boldsymbol{\omega}_{\xi}(x,\ y,\ t-\frac{r}{c})=\boldsymbol{\omega}_{\xi}(x,\ x,\ t)-\boldsymbol{\omega}_{\xi\xi}(x,\ x,\ t)(\frac{r}{c})+O(\frac{r^2}{c^2})\,. \tag{2.5}$$

Sostituendo nella (2.1) l'espressione di $\boldsymbol{\omega}$ sotto forma di sviluppo in serie arrestato al primo ordine, si deduce

$$\boldsymbol{q}(x,\ t)=(\mathrm{vol.}\,C)\,\boldsymbol{\omega}(x,\ x,\ t)-(\frac{I_x}{c})\,\boldsymbol{\omega}_{\xi}(x,\ x,\ t)+O(\frac{r^2}{c^2}) \tag{2.6}$$

ove si è posto

$$I_x=\int_C r(x,\ y)\,\mathrm{d}v(y)\,. \tag{2.7}$$

momento statico polare del corpo rispetto ad x.

D'altro canto, la (2.2), tenuto conto della (2.5), fornisce

$$\dot{\boldsymbol{q}}(x,\ t)=(\mathrm{vol.}\,C)\,\boldsymbol{\omega}_{\xi}(x,\ x,\ t)-(\frac{I_x}{c})\,\boldsymbol{\omega}_{\xi\xi}(x,\ x,\ t)+O(\frac{r^2}{c^2}) \tag{2.8}$$

da cui

$$\boldsymbol{\omega}_{\xi}(x,\ x,\ t)=(\frac{1}{\mathrm{vol.}\,C})\,\dot{\boldsymbol{q}}(x,\ t)+(\frac{I_x}{c\ \mathrm{vol.}\,C})\,\boldsymbol{\omega}_{\xi\xi}(x,\ x,\ t)+O(\frac{r^2}{c^2})\,. \tag{2.9}$$

Sostituendo nella (2.6), si ottiene infine

$$\boldsymbol{q}(x,\ t)=(\mathrm{vol.}\,C)\,\boldsymbol{\omega}(x,\ x,\ t)-(\frac{I_x}{c\ \mathrm{vol.}\,C})\,\dot{\boldsymbol{q}}(x,\ t)+O(\frac{r^2}{c^2})\,. \tag{2.10}$$

È naturale ammettere che, per $c \Rightarrow \infty$, l'equazione costitutiva per $\boldsymbol{q}$ si riduca alla legge di Fourier. Ciò permette di chiarire il significato di $\boldsymbol{\omega}(x,\ x,\ t)$ perché si ha

$$(2.11)\qquad (\text{vol.}\, C)\,\boldsymbol{\omega}(x,\ x,\ t) = K\,\text{grad}\,\theta\,.$$

Posto allora

$$(2.12)\qquad \sigma = \frac{(c\ \text{vol.}\, C)}{I_x} \qquad (\sigma > 0)$$

la (2.10) diviene

$$\boldsymbol{q}(x,\ t) = K\,\text{grad}\,\theta - \left(\frac{1}{\sigma}\right)\dot{\boldsymbol{q}}(x,\ t) + O\left(\frac{r^2}{c^2}\right)$$

ed infine, a meno di termini dell'ordine di $\frac{1}{c^2}$,

$$(2.13)\qquad \dot{\boldsymbol{q}}(x,\ t) + \sigma\boldsymbol{q}(x,\ t) = k\,\text{grad}\,\theta \qquad (\sigma > 0,\ k = \sigma K > 0)$$

che è proprio del tipo dell'equazione di Maxwell-Cattaneo. Si osservi che nella (2.13) σ e k sono funzioni di x, come se il solido non fosse omogeneo. È questo tuttavia un risultato che non sorprende perché, avendo postulato con la (2.1) un'equazione di comportamento non locale, il flusso termico di $\boldsymbol{q}$ dipende necessariamente dalla posizione.

3 - Si riprenda ora l'equazione (2.13) e si associ ad essa l'equazione dell'energia nella forma

$$(3.1)\qquad \rho\dot{\varepsilon} = \text{div}\,\boldsymbol{q}\,.$$

Nella ipotesi della dipendenza di ε solo da θ, la (3.1) diviene

$$(3.2)\qquad \rho c_v \frac{\partial\theta}{\partial t} = \text{div}\,\boldsymbol{q} \qquad c_v = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}\cdot$$

Derivando la (2.13) rispetto al tempo ed eliminando θ mediante la (3.2), si ottiene

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{q}}{\partial t^2} + \sigma(x)\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} = \left(\frac{k(x)}{\rho c_v}\right)\frac{\partial^2 \boldsymbol{q}}{\partial x^2} \tag{3.3}$$

una equazione del tipo dell'equazione dei telegrafisti a coefficienti variabili.

Volendo considerare onde di discontinuità ordinaria per la (3.3), con le condizioni di Hugoniot-Hadamard si ottiene

$$\xi U^2 = \left(\frac{k}{\rho c_v}\right) \boldsymbol{n}(\xi \cdot \boldsymbol{n}) \tag{3.4}$$

ove ξ è il vettore caratteristico delle discontinuità delle derivate seconde di $\boldsymbol{q}$ e U la velocità di propagazione. Le eventuali onde di discontinuità sono, perciò, longitudinali e dall'equazione

$$\det.\left(U^2 \delta_{ij} - \left(\frac{k}{\rho c_v}\right) n_i n_j\right) = 0 \tag{3.5}$$

si ottiene, per la corrispondente velocità di propagazione, l'espressione

$$U = \left(\frac{k}{\rho c_v}\right)^{1/2} \tag{3.6}$$

mentre la velocità delle onde trasversali è nulla. Può, dunque, propagarsi un'unica onda longitudinale, di ampiezza arbitraria, mentre le eventuali onde trasversali sono stazionarie (vedasi anche [2]).

Osservazione. Dato che σ e k dipendono da x, l'equazione cui obbedisce la temperatura è diversa dalla (3.3). Si ottiene infatti

$$\rho c_v \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} - k\Delta\theta = -\boldsymbol{q} \cdot \operatorname{grad} \sigma . \tag{3.7}$$

Eliminando $\boldsymbol{q}$ mediante la (2.13), si trova che θ soddisfa all'equazione del terzo ordine

$$\rho c_v \frac{\partial^3 \theta}{\partial t^3} + 2\rho c_v \sigma \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \sigma \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} + k \operatorname{grad} \sigma \cdot \operatorname{grad} \theta = k\Delta\theta \tag{3.8}$$

che ancora ammette la propagazione di un'unica onda longitudinale con la velocità (3.6).

È interessante notare che, in questo ordine di approssimazione, per determinare la temperatura occorre conoscere i valori iniziali di questa e delle sue derivate prima e seconda rispetto al tempo.

Bibliografia

[1] A. BRESSAN: [•]$_1$ *The paradox of heat propagation and acceleration waves in elastic bodies and viscous fluids dealt with by means of iterated discontinuities*, Mem. Acc. Naz. Lincei (8) **16** (1980), 43-108; [•]$_2$ *Una teoria sulla propagazione di onde di accelerazione termomeccaniche nei continui*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend. (8) **67** (1979), 259-264.

[2] C. CATTANEO, *Sulla conduzione del calore*, Atti Sem. Mat. Fis. Università Modena **3** (1948-49), 84-99.

[3] D. S. CHANDRASEKHARAIAH, *Thermoelasticity with second sound: a review*, Appl. Mech. Rev. **39** (1986), 355-376.

[4] G. GRIOLI, *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend. (8) **67** (1979), 332-339; 426-432.

[5] A. E. GURTIN and A. C. PIPKIN, *A general theory of heat conduction with finite wave speeds*, Arch. Rational Mech. Anal. **31** (1968), 113-126.

[6] S. KALINSKI, *Wave equation of heat conduction*, Bull. Acad. Pol. Sci. **13** (1965), 221-219.

[7] I. C. MAXWELL, *On the dynamic theory of gases*, Phyl. Trans. Roy. Soc. London, Sec. A, **157** (1867), 49-88.

[8] I. MÜLLER, *Thermodynamics*, Pitman, Boston, 1985.

[9] L. PREZIOSI and D. D. JOSEPH, *Heat waves* (ms.).

[10] I. STEFAN, *Über die Pfortpflanzung der Warme*, Sitzungberichte Akad. Wiss. Wien 47$_2$ (1863), 326-344.

***